

TAGUNGSBAND ZUR VERNETZUNGSTAGUNG 2023 IN SIEGEN



WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien Münster

**Mathematiklernen
mit
digitalen Medien**

Herausgegeben von
Frederik Dilling, Gero Stoffels & Ingo Witzke

Band 4

FREDERIK DILLING & INGO WITZKE (HRSG.)

**DIGITALER MATHEMATIKUNTERRICHT
IN FORSCHUNG UND PRAXIS II**

TAGUNGSBAND ZUR VERNETZUNGSTAGUNG 2023 IN SIEGEN

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte
und Medien Münster

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte Informationen sind im Internet über <http://dnb.de> abrufbar

Umschlag-Grafik: Frederik Dilling



The E-Book is open access under Creative Commons license CC BY-NC-ND

© WTM – Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien, Ferdinand-Freiligrath-Str., 26 48147 Münster
Münster 2024 – E-Book
ISBN 978-3-95987-294-2
<https://doi.org/10.37626/GA9783959872942.0>

Vorwort

In einer zunehmend digitalisierten Welt gewinnt auch die digitale Bildung immer mehr an Bedeutung. Schulen stehen vor der Herausforderung, Schülerinnen und Schüler auf ein Leben in einer digital geprägten Gesellschaft vorzubereiten. Gleichzeitig bieten digitale Medien und Werkzeuge ungeahnte Möglichkeiten, den Mathematikunterricht innovativ und effektiv zu gestalten.

Wir freuen uns sehr, Ihnen den Tagungsband der „Vernetzungstagung 2023 - Mathematikunterricht mit digitalen Medien und Werkzeugen in Schule und Forschung“ vorzustellen. Diese Tagung, organisiert von der Mathematikdidaktik der Universität Siegen im Rahmen des Projekts DigiMath4Edu (www.digimath4edu.de), fand vom 5. bis 6. Mai 2023 statt. Sie setzte die Tradition der Vernetzungsveranstaltungen fort und bot eine Plattform für den Austausch und die Vernetzung von Expert:innen aus Forschung und Praxis.

Ein zentrales Ziel dieser Tagung war es, die vielfältigen Möglichkeiten digitaler Medien im Mathematikunterricht zu erkunden und zu diskutieren. Die Teilnehmenden setzten sich intensiv mit neuen Lehr- und Lernmethoden auseinander und entwickelten gemeinsam Ideen, wie digitale Werkzeuge gewinnbringend eingesetzt werden können. Das Programm umfasste inspirierende Vorträge, praxisorientierte Workshops und spannende Podiumsdiskussionen.

Der vorliegende Tagungsband spiegelt die Vielfalt und Tiefe der behandelten Themen wider. Die Beiträge reichen von praxisnahen Unterrichtskonzepten über theoretische Erörterungen bis hin zu empirischen Studien. Die verschiedenen digitalen Medien und Werkzeuge, die in den Beiträgen betrachtet werden, zeigen die Bandbreite der Möglichkeiten auf.

Unser besonderer Dank gilt allen Teilnehmenden, Referierenden und den Organisator:innen der Tagung. Ihr Engagement und ihre wertvollen Beiträge haben diese Veranstaltung zu einem großen Erfolg gemacht. Wir hoffen, dass dieser Tagungsband dazu beiträgt, die Diskussion und Zusammenarbeit in diesem wichtigen Bereich weiter zu fördern und neue Impulse für die Praxis und Forschung im Mathematikunterricht zu setzen.

Wir wünschen Ihnen eine anregende Lektüre und freuen uns auf zukünftige Vernetzungsveranstaltungen.

Mit besten Grüßen,

Die Herausgeber des Tagungsbandes

Inhaltsverzeichnis

Simon Barlovits & Matthias Ludwig <i>Mathematikunterricht im Freien: Zur Motivation von Lernenden bei der Bearbeitung von MathCityMap-Mathtrails</i>	1
Sofia Bielinski, Niklas Peters & Susanne Prediger <i>Digital gestützte Lernpfade hin zum verständigen Umgang mit Gewichten – Design der divomath-Unterrichtsbausteine</i>	17
Marco Böhm & Ralf Holzmann <i>Werkzeugkompetenzen von Lehramtsstudierenden im Bereich elementarer Funktionen – Konzeption eines Tests zu den Bedien- und Auswahlkompetenzen bezüglich GeoGebra und Tabellenkalkulation</i>	33
Frederik Dilling, Kathrin Holten, Kevin Hörnberger, Rebecca Schneider & Ingo Witzke <i>Entwicklung einer Fortbildungsstruktur zum Einsatz digitaler Medien im Mathematikunterricht – ein Werkstattbericht</i>	49
Frederik Dilling & Marc Herrmann <i>Digitale Medien in aktuellen Mathematikschulbüchern – Erste Ergebnisse einer Untersuchung in den Jahrgangsstufen 5-9</i>	61
Hans-Jürgen Elschenbroich <i>Kegelschnitte erkunden - genetisch, ganzheitlich, dynamisch, anschaulich</i>	73
Corinna Hankeln, Ulf Kroehne, Sebastian Groß, Lea Voss & Susanne Prediger <i>User-Experience-Design und Instruktionen für Lernende und Lehrkräfte in digitalen formativen Assessments</i>	85
Kevin Hörnberger & Julian Plack <i>Mit LEGO-Robotern durch die Schulzeit – Ein Einblick in die Verbindung von Mathematik und Informatik, mit möglichen Beispielen für den Alltagsunterricht</i>	103
Kevin Hörnberger, Jasmin Müller, Tatjana Visarius, Insa Germer und Rebekka Post <i>Auffassungen von Lernenden und Lehrenden in NRW zu CAS-Apps als Alternative zu klassischen Handhelds am Beispiel der Apps CASeasy+..</i>	113

Melanie Huth, Jasmin Pollok & Christof Schreiber <i>Unterrichtsinintegrierte Förderangebote der Digitalen Drehtür Hessen im Fach Mathematik</i>	129
Marcel Klinger <i>Algorithmisches Denken im Mathematikunterricht fördern: Ein Praxisbeitrag aus der Lehramtsausbildung Mathematik</i>	145
Matthias Knippers <i>Auswahl und Nutzung von Erklärvideos im Mathematikunterricht - eine Annäherung aus verschiedenen Perspektiven der Praxis und der Theorie</i>	157
Jenny Knöppel & Felicitas Pielsticker <i>„Ich hab wieder gezählt“ – Eine Fallstudie zur Untersuchung der Zähl- und Bündelungsstrategien einer Grundschülerin mit Rechenschwierigkeiten</i>	175
Jacqueline Köster, Felicitas Pielsticker, Jonalyn Margaux Smith <i>Problemlösungsprozesse in homogenen und heterogenen Gruppen unter Nutzung eines CAD-Programms – Eine Fallstudie im außerschulischen MINT-Projekt "MINT ins Land"</i>	193
Sabine Kowalk, Ute Sproesser & Kerstin Frey <i>Förderung des Funktionalen Denkens durch digital-gestützte Lernumgebungen und Embodiment</i>	209
Sabine Kowalk & Ute Sproesser <i>Förderung digitaler Lehrkompetenz im Projekt 4 digit.L</i>	221
Tim Läufer, Simone Jablonski & Matthias Ludwig <i>Erstelle deinen Messeturm! – Modellierungsprozesse von Schüler*innen mit 3D-Druck-Technologie</i>	235
Tim Läufer & Matthias Ludwig <i>Es zählt der Prozess: Planen, Modellieren, 3D-Drucken und TPACK</i>	251
Katja Lenz & Tim Lutz <i>Enaktive Materialhandlungen digital verarbeiten – ein innovativer Ansatz zur Entwicklung des Stellenwertverständnisses</i>	259
Corinne Leu, Thomas Schmalfeldt & Andreas Schulz <i>Förderung konzeptuellen Wissens zu Stellenwertsystemen durch ein intelligentes Tutorsystem in der Lehrpersonenausbildung mehrerer Schulstufen</i>	273

Hoang Nguyen <i>Erlernen der Ableitung über dynamische Visualisierungen per se besser als über statische? – Ergebnisse aus einer Pilotierungsstudie</i>	289
Melanie Platz, Christina Bierbrauer, Laura Monz & Moein Alinaghian <i>Die AR-App „Rechen-StAR“ zur Unterstützung des Zahlverständnisses in der Primarstufe</i>	307
Anne Rahn <i>Ein Modell zum Operationsverständnis</i>	319
Philipp Rüeger, Jessica Kruschwitz & Thomas Schmalfeldt <i>Individuelle Unterstützung von Primarschulkindern beim Lösen von Zahlenmaueraufgaben mithilfe eines intelligenten Tutors</i>	329
Rebecca Schneider, Frederik Dilling, Kathrin Holten, Kevin Hörnberger & Ingo Witzke <i>Gelingensfaktoren digitaler Transformation im Mathematikunterricht – erste Ergebnisse einer explorativen Studie aus dem Projekt DigiMath4Edu</i>	343
Dirk Weber, David Jolitz & Marvin Bader <i>Einsatz KI-basierter Taschenrechner in der Grundschule – Grundlegende Einordnung und empirische Eindrücke.....</i>	359
Sina Wetzel & Matthias Ludwig <i>Möglichst kurz, aber dennoch didaktisch wertvoll – Können mathematische Erklärvideos dem Spannungsfeld beider Ansprüche gerecht werden?</i>	375
Mira H. Wulff & Aiso Heinze <i>Vorbereitung auf die digitale Arbeitswelt im regulären Mathematikunterricht? Der 3D-Druck als authentischer Lernkontext aus Sicht von Unternehmen</i>	393

Simon Barlovits & Matthias Ludwig

Goethe-Universität Frankfurt, barlovits@math.uni-frankfurt.de

Mathematikunterricht im Freien: Zur Motivation von Lernenden bei der Bearbeitung von MathCityMap-Mathtrails

Mathematikunterricht kann ins Freie verlagert werden: Bei sogenannten Mathtrails bearbeiten die Lernenden draußen – unterstützt durch die MathCityMap-App – mathematische Aufgaben zu real existierenden Objekten. Im Beitrag wird die Motivation von Lernenden bei einer Mathtrail-Bearbeitung untersucht. Es zeigt sich, dass die Motivation von der Bearbeitungsdauer einer Aufgabe, dem Bearbeitungserfolg sowie der Motivation im Mathematikunterricht abhängt.

1. Einleitung

Außerschulisches Lernen kann die Erschließung der eigenen Umwelt fördern (Baar & Schönknecht, 2018). So können Schüler:innen beim Museumsbesuch oder bei Erkundungen in der Natur Primärerfahrungen sammeln, Wissen aktiv konstruieren und problemorientiert lernen (Karpa et al., 2015). Zudem ist mit dem außerschulischen Lernen die Hoffnung verbunden, die Motivation und das Interesse der Lernenden am Unterrichtsfach zu fördern (Baar & Schönknecht, 2018).

Jene Potentiale gelten ebenso für den außerschulischen Mathematikunterricht (Sitter, 2019). Auch existieren ausgearbeitete Konzepte, wie Mathematikunterricht außerhalb des Klassenraums gestaltet werden kann, beispielsweise Praxisbeiträge im Themenheft „Außerschulische Lernorte“ des Friedrich-Verlages (Scheerer & Rasfeld, 2010). Dennoch wird im Mathematikunterricht „die außerschulische Lernumgebung in der alltäglichen Unterrichtspraxis gegenwärtig kaum bis gar nicht genutzt“ (Sitter, 2019, S. 80).

Vor diesem Hintergrund verfolgt dieser Beitrag zwei Ziele: Erstens wird mit dem Mathtrail-Konzept eine Form außerschulischen Lernens präsentiert. Mit Blick auf die Praxis wird das MathCityMap-System vorgestellt, welches die Planung, Durchführung und Evaluation von Mathtrails ermöglicht. Zweitens wird die Motivation der Lernenden während der Bearbeitung eines Mathtrails untersucht. Zuvor soll jedoch ein Blick auf ein Teilgebiet des außerschulischen Lernens, den Outdoor-Unterricht, geworfen werden.

2. Theoretischer Hintergrund

2.1 Outdoor-Unterricht

Outdoor-Lernen bezieht sich nicht nur auf den Lernort, welcher aus dem Klassenzimmer ins Freie verlagert wird. Vielmehr handelt es sich hierbei um ein Unterrichtskonzept, bei welchem der Gang nach draußen in die Klassenraumaktivität eingebettet wird (von Au, 2016).

Outdoor learning is about activating all the school subjects in an integrated training where activities out-of-doors and indoors are closely

linked together. The pupils learn in an authentic context: that is, they learn *about* nature *in* nature, *about* society *in* the society and *about* the local environment *in* the local environment (Jordet, 1998, S. 24 [norwegisches Original] zitiert nach Jordet, 2009, S. 7, H.i.O.).

Ziel ist es, die Umwelt zu erfassen – und diese Erfahrung im Unterrichtskontext zu reflektieren. Es geht also darum, „Sinn-volle Lernerfahrungen [...] wert-voll und be-greif-bar“ (von Au, 2015, S. 17, H.i.O.) zu machen. Den Ansatz, die eigene Umwelt neu zu entdecken, verfolgt auch das Mathtrail-Konzept, welches im Folgenden vorgestellt wird.

2.2 Mathtrails

Bei einem Mathtrail handelt es sich um eine Sammlung von mathematischen Aufgaben zu real existierenden Objekten entlang einer festgelegten Route (English et al., 2011). Die Mathtrail-Aufgaben können hierbei vielfältig gestaltet sein und alle Niveaustufen vom Elementarbereich bis zur Sekundarstufe II abdecken. So können Lernende beispielsweise ebene Figuren an der Frontseite eines historischen Gebäudes entdecken, das Volumen eines Zylinders bestimmen oder die Steigung von Rollstuhlrampen untersuchen (English et al., 2010; Jablonski et al., 2023; Zender, 2019). Die Aufgaben können dabei einen „bunten Mix“ des bereits Gelernten darstellen (z.B. English et al., 2004) oder als themenbasierter Mathtrail auf den aktuellen Schulstoff fokussiert sein (Zender, 2019).

Typischerweise bearbeiten die Lernenden Mathtrail-Aufgaben in Kleingruppen zusammen und erheben die benötigten Daten durch Zählen, Messen oder Schätzen (Cross, 1997). Folglich bieten Mathtrails große Potentiale für die mathematischen Kompetenzen *Argumentieren* und *Kommunizieren* im Sinne eines Austauschs über den Lösungsprozess (Cross, 1997) sowie *Modellieren* im Sinne der Erschließung einer Realsituation und des Modellbildungsprozesses (Buchholtz, 2021; Ludwig et al., 2013; Jablonski, 2023). Auch überfachliche Kompetenzen und Softskills wie Kooperations- und Teamfähigkeit sowie Selbstregulierung und das eigenständige Arbeiten können durch die Bearbeitung von Mathtrails gefördert werden (Buchholtz, 2020).

Seit einigen Jahren wird die Idee des Mathtrails um einen „neuen“ *Mobile-Learning-Ansatz* erweitert (Ludwig et al., 2013). Genutzt werden z.B. Actionbound (Buchholtz, 2021) oder das MathCityMap-System (Ludwig et al., 2013). Letzteres wird im Beitrag in den Blick genommen.

2.3 MathCityMap-System

MathCityMap ist ein kosten-, werbe- und DSGVO-konformes System zur Vorbereitung, Durchführung und Evaluation von Mathtrails. Es besteht aus einem Webportal für Lehrkräfte und einer App für Schüler:innen.

Im MathCityMap-Webportal können Lehrkräfte nach bestehenden Mathtrails suchen oder eigene Mathtrails erstellen. Zudem steht im Webportal mit dem sogenannten *Digitalen Klassenzimmer* ein Tool für die Evaluation und Nachbereitung des Mathtrails zur Verfügung. Für eine detaillierte Darstellung des Webportals sei an dieser Stelle auf Gurjanow et al. (2021) verwiesen.

Die MathCityMap-App unterstützt Lernende bei der Bearbeitung von Mathtrail-Aufgaben. Dies ist exemplarisch in Abbildung 1 dargestellt. Die App führt die Lernenden via GPS-Navigation zum Ort der Aufgabe und zeigt (a) die Aufgabenstellung an. Bei Bedarf können die Lernenden bis zu (b) drei Hinweise aufrufen, welche den Lösungsprozess unterstützen. Zudem erhalten die Lernenden (c) auf Basis einer automatischen Antwortvalidierung unmittelbar Rückmeldung, ob die berechnete Lösung mit der erwarteten Lösung (bzw. bei Messaufgaben wie in Abbildung 1: dem erwarteten Lösungsintervall) übereinstimmt. Ist die berechnete Lösung falsch, werden die Lernenden zur Überprüfung und Verbesserung des Lösungswegs aufgefordert. Bei einer korrekten Lösungseingabe wird das Ergebnis durch die App als richtig bestätigt. Zuletzt können die Lernenden (d) eine Musterlösung aufrufen und den eigenen mit einem möglichen Lösungsweg vergleichen.

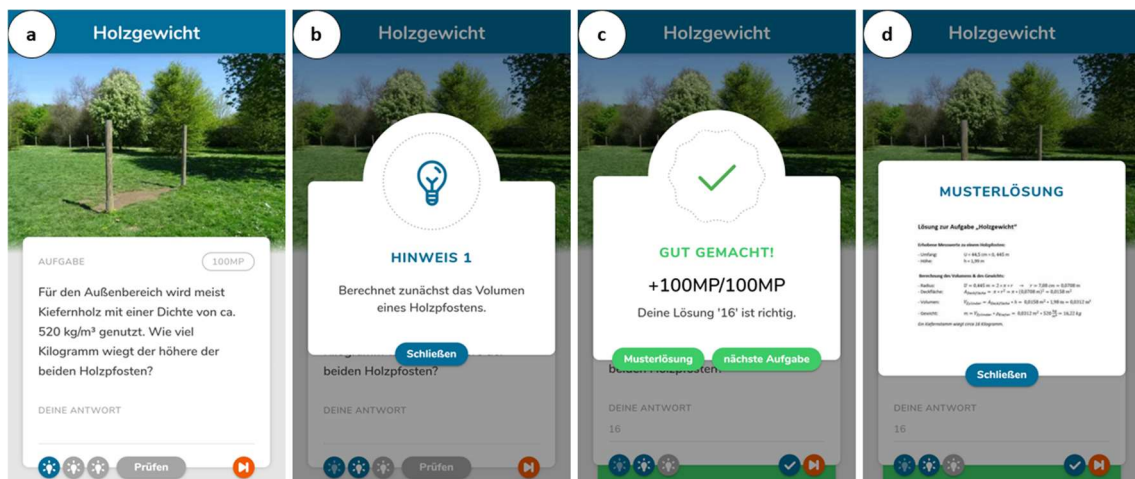


Abbildung 1: Bearbeitung der Aufgabe „Holzgewicht“ mit Hilfe der MathCityMap-App: (a) Aufgabenstellung, (b) Hinweis, (c) Antwortvalidierung und Gamification sowie (d) Musterlösung.

3. Forschungsstand & Forschungsfragen

Im Folgenden wird der Forschungsstand zur Motivation von Lernenden bei Mathtrails zusammengefasst. Hierbei werden sowohl „klassische“, d.h. nicht-digitale, als auch *mobile Mathtrails* in den Blick genommen.

3.1 (Mobile) Mathtrails

Zu „klassischen“ Mathtrails, durchgeführt mit Papier und Stift, finden sich in der Literatur kaum systematische Untersuchungen, sondern vielmehr Erfahrungsberichte (Buchholtz, 2020). Einig sind sich jene Autor:innen, dass Mathtrails Spaß machen, das Teamwork fördern und die Anwendung mathematischen Wissens ermöglichen (Cross, 1997; English et al., 2011; Zender, 2020).

Jüngere Untersuchungen betrachten meist Mathtrails mit Technologieunterstützung durch Smartphone-Apps. So betonen beispielsweise Buchholtz (2021), Jablonski (2023) oder Jablonski et al. (2023) die Bedeutung der App-Nutzung für das mathematische Modellieren: Hinweise können insbesondere die Modellierungsschritte des Vereinfachens und Strukturierens sowie des Mathematisierens unterstützen. Die automatische Antwortvalidierung kann die Lernenden zu einem kontextbezogenen Überprüfen der eigenen Antwort anregen – und somit zu einer erneuten Aufgabenbearbeitung führen.

Auch führt die App-Nutzung zu einem deutlich größeren Bearbeitungserfolg von Mathtrail-Aufgaben: Werden „klassische“ und mobile Mathtrails verglichen, so zeigt sich eine signifikant höhere Lösungsrate bei Schüler:innen, welche mit der App arbeiten und folglich Hinweise und Musterlösung nutzen können (Barlovits & Ludwig, 2023). Auch besitzt der Einsatz von Mobilgeräten bei Mathtrails das Potenzial zur Nutzung von *Augmented Reality*, z.B. zur Bearbeitung von STEAM-Aufgaben (Haas et al., 2023), oder in der Verfügbarkeit von internetfähigen Geräten, z.B. für das Recherchieren benötigter Formeln (Buchholtz, 2021).

Neuere Forschungsarbeiten nehmen auch die Motivation von Lernenden bei Mathtrails in den Blick. Basierend auf Studien in Indonesien (Cahyono, 2018) und Deutschland (Gurjanow, 2020) kann eine hohe Motivation von Schüler:innen bei MathCityMap-Mathtrails angenommen werden. Insbesondere zeigen die Ergebnisse der indonesischen Studie, dass die Mathtrail-Bearbeitung Lernende stärker motiviert als „regulärer“ Unterricht im Klassenraum (Cahyono, 2018).

Wird hingegen die Motivation bei „klassischen“ und mobilen Mathtrails verglichen, so kann kein Motivationsunterschied festgestellt werden. Folglich scheint nicht die App-Nutzung, sondern das Outdoor-Lernen maßgeblich für die hohe Motivation der Lernenden bei Mathtrails zu sein (Barlovits & Ludwig, 2023).

3.2 Forschungsfragen

Auch wenn bereits mehrere Untersuchungen zur Motivation der Lernenden bei Mathtrails durchgeführt wurden, so fehlen – nach unserem Kenntnisstand – bislang Befunde, wovon die Motivation von Lernenden bei einzelnen Mathtrail-Aufgaben abhängt und wie sich im Verlauf eines Mathtrails verändert. Aus dieser Forschungslücke ergeben sich folgende Fragestellungen:

FF1: Inwiefern hängt die Motivation von Lernenden bei der Bearbeitung von Mathtrail-Aufgaben von der Bearbeitungszeit, ihrem Bearbeitungserfolg sowie ihrer Einstellung zum Mathematikunterricht ab?

Für die Bearbeitungszeit von einzelnen Mathtrail-Aufgaben existieren in der Literatur verschiedene Hinweise. So konzipieren English et al. (2011) kurze Aufgaben in einem Zeitumfang von fünf bis zehn Minuten Bearbeitungszeit. Buchholtz (2020) beschreibt, dass eine Bearbeitungszeit von 20 Minuten nicht überschritten werden sollte. Die Frage, wie lange eine Mathtrail-Aufgabe dauern sollte, ist insofern von Interesse, als dass dies Rahmenbedingungen für Aufgabenumfang und

Aufgabenkomplexität setzt. Plausibel erscheint es jedenfalls, dass bei steigender Bearbeitungsdauer die Motivation der Lernenden tendenziell abnimmt. Folglich soll eine Bearbeitungszeitspanne identifiziert werden, welche komplexe Aufgaben zulässt und zugleich die Freude und Motivation der Lernenden aufrechterhält.

Gleichzeitig scheint es auch plausibel, dass eine korrekt gelöste Aufgabe die Lernenden stärker motiviert als eine falsche Aufgabenbearbeitung. Erwartbar ist es ebenfalls, dass sich die Motivation im Mathematikunterricht auch auf die Bearbeitung von Mathematikaufgaben im Freien auswirkt. Daher sollen neben der Bearbeitungsdauer der Aufgabe auch der Einfluss des Bearbeitungsstatus im Sinne eines Lösungserfolgs sowie die individuelle Motivation im Mathematikunterricht berücksichtigt werden.

In einer zweiten Forschungsfrage soll die Motivation von Lernenden im Verlauf einer Mathtrail-Bearbeitung untersucht werden:

FF2: Wie verändert sich die Motivation von Lernenden während der Bearbeitung eines Mathtrails im zeitlichen Verlauf?

Zwei konkurrierende Hypothesen werden in Bezug auf *FF1* aufgestellt. Einerseits beschreiben Zender (2019) und Gurjanow (2020) einen Trainingseffekt: Beim Absolvieren eines zweiten Mathtrails konnten die Lernenden signifikant mehr Aufgaben bearbeiten und wiesen eine höhere Motivation als beim ersten Mathtrail auf. Bedingt sei dies durch die Gewöhnung an das Unterrichtssetting, d.h. an die Nutzung von App und Messwerkzeugen sowie das kooperative Arbeiten (Gurjanow, 2020; Zender, 2019). Hieraus kann die Hypothese aufgestellt werden, dass auch bereits im ersten Mathtrail eine allmähliche Gewöhnung an das neue Setting stattfindet und folglich die Motivation der Lernenden im Verlauf des Mathtrails steigt. Andererseits könnte sich – so die zweite Hypothese – beim Absolvieren des Mathtrails ein Ermüdungseffekt einstellen: Mit steigender Bearbeitungsdauer sinkt die kognitive Leistungsfähigkeit der Teilnehmenden, was potentiell mit einem Motivationsverlust einhergeht.

4. Methode

4.1 Datenerhebung

Im Sommer 2018 bearbeiteten Schüler:innen der 9. Jahrgangsstufe einen themenbasierten Mathtrail zu Zylindern. Der Mathtrail kann mit dem Code 37667 in der MathCityMap-App aufgerufen werden. Eine Beispielaufgabe findet sich in Abbildung 1. An der Datenerhebung nahmen drei Klassen (Gymnasialzweig einer kooperativen Gesamtschule) teil. Von den 53 teilnehmenden Schüler:innen liegen insgesamt 51 vollständige Datensätze vor, welche in die Auswertung eingehen.

Um die Motivation der Lernenden während des Mathtrails zu messen, wurden an jeder Aufgabe kurze Motivationsfragebögen bereitgelegt. Diese sollten individuell von den Schüler:innen ausgefüllt werden. Um die Zeitdauer für das Ausfüllen des Fragebogens gering zu halten, besteht dieser lediglich aus sechs Items. Sie beruhen

auf dem *Intrinsic Motivation Inventory* (Center for Self-Determination Theory, o.J.) und greifen auf die *Self-Determination Theory* zurück, welche Motivation als Zugkraft für das Ausführen von Handlungen betrachtet (Deci & Ryan, 1985).

Im Fragebogen beziehen sich jeweils zwei Items auf eine Subskala des *Intrinsic Motivation Inventory*. Die Subskala Interesse und Freude wurde gewählt, da diese nach Ryan und Deci (2000) mit hoher intrinsischer Motivation einhergeht. Amotivation, d.h. die Absenz von Motivation, kann unter anderem aus einem Mangel an Kompetenzerleben oder einer Relevanz bzw. Nützlichkeit der auszuführenden Tätigkeit erwachsen (Ryan & Deci, 2000). Folglich wurden auch jene beiden Subskalen in den Fragebogen aufgenommen. Alle Items werden auf einer 7-Punkt-Likert-Skala gegeben (0 = „Ich stimme gar nicht zu“; 6 = „Ich stimme voll und ganz zu“). Die Items und die zugehörigen Subskalen sind in Tabelle 1 dargestellt. Mit ähnlich formulierten Items wurde vor der Intervention zudem die Motivation der Lernenden im Mathematikunterricht erhoben.

Nr.	Item	Subskala
1	Ich denke, dass ich ziemlich gut im Lösen dieser Mathtrail-Aufgabe war.	Kompetenzerleben
2	Das Bearbeiten dieser Mathtrail-Aufgabe hat mir Spaß gemacht.	Interesse & Freude
3	Ich bin mit meiner Leistung beim Bearbeiten dieser Mathtrail-Aufgabe zufrieden.	Kompetenzerleben
4	Ich denke, dass mir das Bearbeiten dieser Aufgabe hilft, Mathematik besser zu verstehen.	Nützlichkeit
5	Ich empfand das Bearbeiten dieser Mathtrail-Aufgabe als sehr interessant.	Interesse & Freude
6	Ich denke, dass das Bearbeiten dieser Aufgabe nützlich für das Verstehen von Mathematik ist.	Nützlichkeit

Tabelle 1: Fragebogen zur Erhebung der Motivation von Lernenden bei Mathtrail-Aufgaben. Ähnliche Items werden zur Erhebung der Motivation im Mathematikunterricht genutzt.

Die 51 Schüler:innen arbeiteten in 18 Kleingruppen zusammen. Insgesamt liegen 161 Motivationsfragebögen zu 58 bearbeiteten Aufgaben vor: Die Kleingruppen bearbeiteten zwischen einer und sechs Aufgaben ($MW = 3.05$, $SD = 1.23$). In fünf Fällen beantworteten die Kleingruppen Fragebögen gemeinsam – jene Werte gehen als Individualwerte aller Lernenden der jeweiligen Gruppe in die Analyse ein.

Um das Ablaufen des Mathtrails durch die Gruppen zu rekonstruieren, wurden die Lernenden in den Fragebögen auch nach der Bearbeitungszeit (in Minuten) gefragt. Insgesamt wurde der Mathtrail inklusive einer Einführung in die App-Bedienung und einer kurzen Feedbackrunde in einer Doppelstunde bearbeitet.

4.2 Datenauswertung

Die Datenauswertung erfolgt in zwei Schritten: Zuerst wird die interne Konsistenz des Fragebogens geprüft. Anschließend erfolgt die eigentliche Datenauswertung durch lineare Regressionen und Mehrebenenanalysen.

Der Fragebogen, bestehend aus je zwei Items der Subskalen Interesse und Freude, Kompetenzerleben sowie Nützlichkeit, wird auf interne Konsistenz geprüft. Für alle Motivationsbögen sowie für die jeweils erste, zweite und dritte Aufgabenbearbeitung liegt eine akzeptable bis gute interne Konsistenz vor (Tabelle 2). Weitere Aufgabenbearbeitungen wurden nicht berücksichtigt, da hier nur noch Werte von Schüler:innen aus maximal vier Gruppen vorlagen.

Fokus	N	Cronbach's α	Konfidenzintervall
Alle Bearbeitungen	161	.793	(.748, .832)
1. Aufgabe	51	.791	(.745, .829)
2. Aufgabe	48	.778	(.728, .820)
3. Aufgabe	41	.843	(.808, .872)

Tabelle 2: Interne Konsistenz der drei Subskalen in Abhängigkeit für alle Bearbeitungen bzw. für die ersten drei Aufgaben.

Aufgrund der befriedigenden internen Konsistenz kann angenommen werden, dass die sechs Items der drei Subskalen ein gemeinsames Konstrukt, nämlich Motivation bei der Aufgabenbearbeitung, messen. Daher wird ein Summenscore über die sechs Items gebildet. Um die Skala leichter interpretieren zu können, wird der Summenscore durch die Itemanzahl geteilt. So ergibt sich eine Gesamtskala für die Motivation bei der Aufgabenbearbeitung von 0 = „keine Motivation“ bis 6 = „höchste Motivation“.

Die Daten werden mit *RStudio* ausgewertet. Hierzu wird auf einfache und multiple lineare Regressionen (Package *car*; Fox et al., 2023) sowie Mehrebenenanalysen (Package *lme4*; Bates et al., 2023) zurückgegriffen. Für die Regressions- und Mehrebenenanalysen orientieren wir uns an Field et al. (2012). Hierauf basierend wurden auch die Voraussetzungen für die statistischen Verfahren geprüft.

Insbesondere sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass üblicherweise sehr große Samples für Mehrebenenanalysen vorausgesetzt werden. So empfehlen Hox et al. (2017) beispielsweise eine Stichprobe bestehend aus 50 Organisationseinheiten mit je 20 Untereinheiten. Allerdings konnten Simulationsstudien in den letzten Jahren zeigen, dass die Nutzung von Mehrebenenanalysen basierend auf der REML-Schätzmethode auch bei relativ kleinen Samples zu verlässlichen Ergebnissen führen kann (z.B. Bell et al., 2014; Elff et al., 2020).

Wie im Folgenden beschrieben, kann die Mehrebenenanalyse im Gegensatz zur Regressionsanalyse die gegebene Datenstruktur adäquat darstellen. Daher greifen wir im Beitrag auch auf jenes Verfahren zurück, diskutieren die Ergebnisse allerdings unter Berücksichtigung des relativ kleinen Samples der Studie.

5. Ergebnisse

Im Ergebnisteil werden die Forschungsfragen zunächst auf Basis zweier linearer Regressionen untersucht (Kapitel 5.1). Anschließend werden die Daten mit Hilfe zweier Mehrebenenanalysen modelliert (Kapitel 5.2).

5.1 Multiple lineare Regression

Um *FF1* zu beantworten, wird ein erstes lineares Regressionsmodell aufgestellt. Dieses stellt die Motivation der Lernenden bei der Bearbeitung von Mathtrail-Aufgaben in Abhängigkeit zweier Prädiktoren dar: Es berücksichtigt die Bearbeitungszeit der Aufgabe sowie den Bearbeitungsstatus. Letzterer unterscheidet im Sinne der automatischen Antwortvalidierung durch die MathCityMap-App zwischen einer guten oder akzeptablen Lösung bzw. einer final falschen Lösung, d.h. dem Abbruch der Aufgabe ohne korrektes Ergebnis.

Abbildung 2 zeigt die Regressionsgeraden für die drei Bearbeitungsstatus (falsche, akzeptable oder gute Lösung). Wenig überraschend ist die Motivation der Lernenden bei einer Aufgabenlösung (grün: gute Lösung; gelb: akzeptable Lösung) deutlich höher als bei einer falschen Lösung (rot). Ähnlich hoch fällt hingegen die Motivation der Lernenden bei einer guten oder akzeptablen Lösungsgüte aus. Unabhängig vom Bearbeitungsstatus kann eine deutliche Abnahme der Motivation mit steigender Bearbeitungsdauer beobachtet werden, wobei selbst bei einer Aufgabenlösung der theoretische Mittelwert der Skala von drei Motivationspunkten nach ca. 20-minütiger Bearbeitungsdauer unterschritten wird.

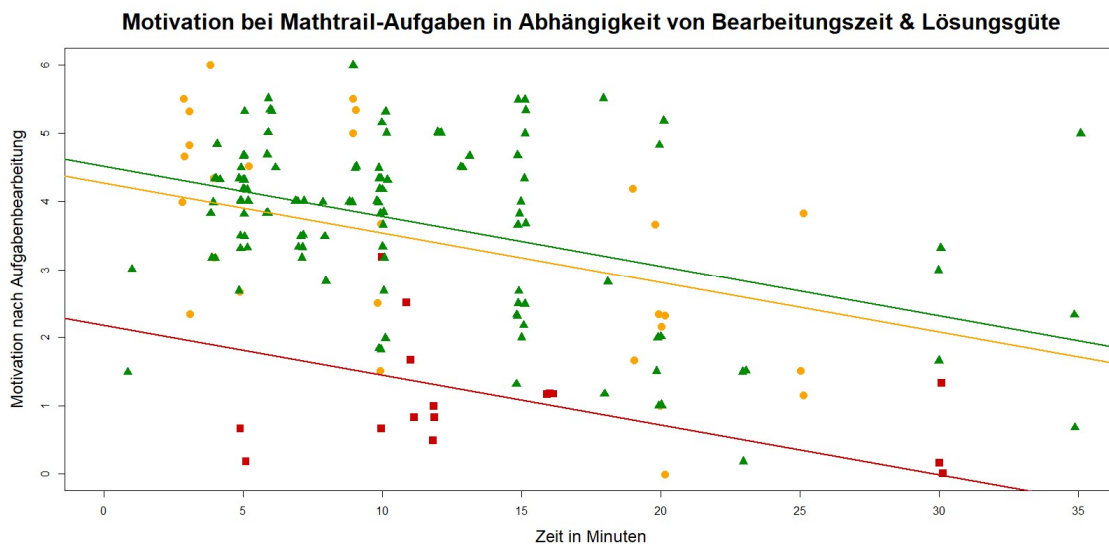


Abbildung 2: Motivation bei Mathtrail-Aufgaben in Abhängigkeit von Bearbeitungszeit des Bearbeitungsstatus im Sinne der Lösungsgüte; grün: gute Lösung, orange: akzeptable Lösung; rot: final falsche Lösung.

Die Parameter des zugehörigen Regressionsmodells R1 sind in Tabelle 3 (oberer Teil) dargestellt. Die Ergebnisse bestätigen den graphischen Eindruck: Es gibt eine signifikante Abnahme der Motivation um 0.08 Punkte (*SE*: 0.01) pro Minute zusätzlicher Bearbeitungszeit. Zudem liegt die Motivation für gelöste Aufgaben um

mehr als 2 Punkte höher als bei einer final falschen Lösung – die Motivation hängt also maßgeblich davon ab, *ob* die Aufgabe gelöst werden konnte. Hingegen spielt es keine Rolle, *wie* die Aufgabe gelöst wurde (akzeptable oder gute Lösung): Im Vergleich jener Bearbeitungsstatus zeigt sich kein signifikanter Unterschied, $p = .323$.

Modell	adj. R ²	Parameter	B	SE B	β	p
Modell R1	0.39	Intercept ^a	4.27	0.26		< .001
		Zeit Aufgabe	-0.08	0.01	-.378	< .001
		Lösung (gut)	0.24	0.25		.323
		Lösung (falsch)	-2.09	0.37		< .001
Modell R2	0.46	Intercept ^a	3.36	0.34		< .001
		Zeit Aufgabe	-0.08	0.01	-.380	< .001
		Lösung (gut)	0.16	0.23		.483
		Lösung (falsch)	-2.05	0.35		< .001
		Motivation im MU	0.30	0.07	.257	< .001
		Zeit Mathtrail	0.01	0.01	.107	.077

Tabelle 3: Lineare Regressionsmodelle zur Beschreibung der Motivation bei Mathtrail-Aufgaben unter Berücksichtigung der Bearbeitungszeit und Lösungsgüte sowie – im Fall von Modell R2 – der Motivation im Mathematikunterricht (Motivation MU) und der Dauer des Mathtrails zum Zeitpunkt der Aufgabenbearbeitung (Zeit Mathtrail); adj. R²: adjustiertes Bestimmtheitsmaß, B: Regressionskoeffizient, SE B: Standardfehler des Regressionskoeffizienten; β : Standardisierter Regressionskoeffizient; ^a Prädiktor unter der Annahme des Bearbeitungsstatus „akzeptable Lösung“.

Durch Regressionmodell R1 kann mit 39 % ein substantieller Anteil der Varianz der Daten aufgeklärt werden. Allerdings weist das Modell einen relativ hohen RMSE-Wert (*Root Mean Squared Error*) von 1.15 auf. Dies bedeutet, dass die tatsächlichen Datenpunkte im Mittel um 1.15 Punkte auf der Motivationsskala von 0 bis 6 von der Vorhersage durch die Regressionsgerade abweichen.

Um die Daten besser zu modellieren, wird ein zweites Regressionsmodell R2 aufgestellt. Dieses berücksichtigt zusätzlich die Prädiktoren „Motivation im Mathematikunterricht“ und „Zeitdauer Mathtrail“ (Tabelle 3, unterer Teil). Modell R2 zeigt für die Bearbeitungszeit sowie die Bearbeitungsstatus sehr ähnliche Werte wie das vorhergehende Modell. Es zeigt zudem einen signifikant positiven Zusammenhang zwischen der Motivation im Mathematikunterricht und bei der Bearbeitung von Mathtrail-Aufgaben: Ist die Motivation im Mathematikunterricht von Lernenden um einen Punkt höher/niedriger als im Stichprobenmittel (Skala von 0 bis 6), so steigt/fällt die Motivation für die Bearbeitung von Mathtrail-Aufgaben um 0.30 Punkte (*SE*: 0.07) auf einer analogen Skala. Auf Basis der standardisierten Regressionskoeffizienten β kann ferner geschlossen werden, dass der Prädiktor „Motivation im Mathematikunterricht“ einen etwas geringeren Einfluss auf die

Motivation bei der Aufgabenbearbeitung besitzt als die Bearbeitungszeit (β -Koeffizienten von .257 bzw. $-.380$).

Der Prädiktor „Zeitdauer des Mathtrails“ mit $B = 0.01$ ($SE: 0.01$) ist, wenn auch nur knapp, nicht signifikant, $p = .077$. Inhaltlich deutet dieses Ergebnis darauf hin, dass die Motivation im Verlauf des Mathtrails minimal steigt, nämlich um 0.01 Punkte pro Minute. Mit Hilfe des β -Koeffizienten kann dieser Einfluss als gering interpretiert werden: Die Bearbeitungszeit ($\beta = -.380$) bzw. die Motivation im Mathematikunterricht ($\beta = .257$) besitzen einen mehr als dreifach bzw. doppelt so großen Einfluss auf die Motivation bei der Bearbeitung von Mathtrail-Aufgaben wie der Prädiktor „Zeitdauer des Mathtrails“ ($\beta = .107$).

Insgesamt kann das zweite Regressionsmodell 46 % der Varianz aufklären. Es besitzt einen RMSE-Wert von 1.08 Punkten. Im Vergleich zum ersten Modell kann es den Datensatz signifikant besser modellieren, $\chi(2) = 10.79$, $p < .001$.

Zwischenergebnis I: Mit Hilfe von Regressionsmodellen wurde untersucht, welche Prädiktoren einen Einfluss auf die Motivation zur Bearbeitung von Mathtrail-Aufgaben besitzen. Sowohl die Bearbeitungszeit und der Bearbeitungsstatus (im Sinne einer Unterscheidung von gelösten und nicht gelösten Aufgaben) als auch die Motivation im Mathematikunterricht konnten hierbei als Prädiktoren mit substantieller Auswirkung auf die Motivation identifiziert werden. Hingegen scheint der Zeitpunkt der Aufgabenbearbeitung während des Mathtrails nur eine untergeordnete Rolle für die Motivation von Lernenden zu spielen.

5.2 Mehrebenenanalyse

Mittels Regressionsanalysen konnten erste Einsichten gewonnen werden, von welchen Prädiktoren die Motivation bei der Bearbeitung von Mathtrail-Aufgaben abhängt. Allerdings wurden in hierbei wurden zwei wesentliche Eigenschaften des Datensatzes nicht berücksichtigt:

Erstens liegen *geklumpte Daten* vor, da der Mathtrail in Gruppen bearbeitet wurde. Es scheint plausibel, dass Schüler:innen innerhalb der eigenen Gruppe eine ähnliche Motivation aufweisen als im Vergleich zu Schüler:innen anderer Gruppen (vgl. Field et al., 2012). Zweitens wurden Mehrfachmessungen vorgenommen: Die Lernenden füllten nach jeder Aufgabe einen Motivationsbogen aus, sodass je Schüler:in im Mittel 3.05 Motivationsbögen (Minimum: 1; Maximum: 6) vorliegen. Auch hier kann angenommen werden, dass sich die Motivation innerhalb eines Individuums stärker ähnelt als zwischen den Individuen (Field et al., 2012).

Um jene Datenstrukturen zu berücksichtigen, werden die Modelle aus Kapitel 5.1 im Folgenden als Mehrebenenmodelle mit je drei Ebenen spezifiziert: Ebene 0 entspricht den Aufgabenbearbeitungen auf Individualebene – und damit dem Verlauf der Motivation auf individueller Ebene. Ebene 1 stellt die Individualebene dar, während Ebene 2 der Bearbeitung des Mathtrails in Kleingruppen Rechnung trägt.

Das Nullmodell (Tabelle 4, links) wird mit einem *random Intercept* auf Ebene 1 und Ebene 2 spezifiziert. Allein durch jene Berücksichtigung der Datenstruktur

kann das Nullmodell 33 % der Varianz aufklären (*conditional R²*). Auch dies deutet darauf hin, dass die Regressionsmodelle aus Kapitel 5.1 die Daten nur ungenügend modellieren können.

Modell	Nullmodell		Modell M1		Modell M2	
Fixed Part						
Prädiktor	Wert (SE)	Sig.	Wert (SE)	Sig.	Wert (SE)	Sig.
Intercept ^a	3.20 (0.21)	***	3.42 (0.23)	***	2.50 (0.35)	***
Zeit Aufgabe ^b			−0.07 (0.01)	***	−0.08 (0.01)	***
Lösung (gut)			0.15 (0.22)		0.15 (0.22)	
Lösung (falsch)			−2.15 (0.33)	***	−2.17 (0.32)	***
Motivation MU ^b					0.29 (0.09)	**
Zeit Mathtrail ^b					0.01 (0.00)	
Random Part						
Gruppe	Wert (SE)		Wert (SE)		Wert (SE)	
Lernende	0.20 (0.44)		0.27 (0.52)		0.27 (0.52)	
Kleingruppen	0.56 (0.75)		0.14 (0.37)		0.14 (0.37)	
Residuen	1.52 (1.23)		0.83 (0.91)		0.83 (0.91)	
Modellgüte						
Devianz ^c	561.8		479.7		466.2	
AIC ^c	569.8		493.7		484.2	
BIC ^c	582.1		515.2		511.9	
Marginal R ² ^d	0.000		0.381		0.475	
Conditional R ² ^d	0.332		0.624		0.647	
RMSE	1.14		0.81		0.81	

Tabelle 4: Mehrebenenmodelle (REML-Schätzung) zur Beschreibung der Motivation bei Mathtrail-Aufgaben unter Berücksichtigung der Bearbeitungszeit und Lösungsgüte sowie – im Fall von Modell M2 – der Motivation im Mathematikunterricht (Motivation MU) und der Dauer des Mathtrails zum Zeitpunkt der Aufgabenbearbeitung (Zeit Mathtrail); SE: Standardfehler; Sig.: Signifikanzniveau mit $p < .05$ (*), $p < .01$ (**) oder $p < .001$ (***); AIC: Akaike Information Criterion, BIC: Bayesian Information Criterion; RMSE: Root Mean Squared Error; ^a Prädiktor unter der Annahme des Bearbeitungsstatus „akzeptable Lösung“; ^b Prädiktor zentriert; ^c Bestimmung von Devianz, AIC und BIC auf Basis der ML-Schätzung; ^d Bestimmung des Pseudo-R² nach Nakagawa et al. (2017).

Vergleich der Modelle R1 und M1: Das Mehrebenenmodell M1 berücksichtigt analog zum Regressionsmodell R1 die Bearbeitungszeit und den Bearbeitungsstatus. Es zeigt sich eine signifikante Abnahme der Motivation um 0.07 Punkte

(*SE*: 0.01) pro Minute Bearbeitungszeit. Während die Motivation bei einer final falschen Aufgabenbearbeitung signifikant geringer als bei einer akzeptablen Lösung ausfällt (-2.14 ; *SE*: 0.32), können keine Motivationsunterschiede zwischen den Bearbeitungsstatus „akzeptable Lösung“ und „gute Lösung“ festgestellt werden. Damit bestätigt das Modell M1 die Ergebnisse des Regressionsmodells R1.

Dass die Datenstruktur durch Mehrebenenmodell M1 besser abgebildet werden konnte als durch das Regressionsmodells R1 zeigt sich am RMSE-Wert: Liegt dieser für Modell R1 bei 1.15 Punkten, so weichen beobachtete und prognostizierte Daten für Modell M1 um 0.81 Punkte voneinander ab.

Vergleich des Nullmodells mit Modell M1: Modell M1 beschreibt die Daten signifikant besser als das Nullmodell, $\chi(3) = 82.13$, $p < .001$ (Vergleich mittels ML statt REML-Schätzer). Dies wird auch beim Blick auf die Modellgütemaße deutlich: Devianz, AIC und BIC fallen allesamt erheblich geringer aus. Die Prädiktoren des Modells M1 besitzen eine hohe Varianzaufklärung von 38 % (*marginal R*²). Das Gesamtmodell M1 kann durch die Berücksichtigung der Gruppenstruktur sowie der Mehrfachmessung sogar 62 % der Varianz aufklären (*conditional R*²).

Vergleich der Modelle M1 und M2: In einem zweiten Mehrebenenmodell M2 werden zudem die Motivation im Mathematikunterricht sowie der Bearbeitungszeitpunkt der Aufgabe im Mathtrail berücksichtigt. Der Prädiktor „Motivation im Mathematikunterricht“ besitzt einen signifikanten Einfluss auf die Motivation bei der Aufgabenbearbeitung: Eine um einen Punkt erhöhte Motivation im Mathematikunterricht führt tendenziell zu einer um 0.29 Punkte (*SE*: 0.09) erhöhten Motivation bei der Mathtrail-Aufgabenbearbeitung. Der Zeitverlauf des Mathtrails führt nach Modell M2 zu einem minimalen Anstieg der Motivation um 0.01 (0.00) Punkte pro Minute. Allerdings ist dieser Einfluss, wenn auch knapp, nicht signifikant, $p = .094$. Die weiteren Prädiktoren des Modells weisen ähnliche Werte wie in Modell M1 auf.

Modell M2 kann die Daten durch die Hinzunahme zweier Prädiktoren signifikant besser beschreiben als Modell M1, $\chi(2) = 13.49$, $p = .001$ (Vergleich mittels ML statt REML-Schätzer). Zwar bleibt der RMSE-Wert bei beiden Modellen unverändert, jedoch kann Modell M2 noch deutlich mehr Varianz aufklären: Das *marginal R*² liegt für Modell M2 bei 0.475, das *conditional R*² bei 0.647.

Vergleich der Modelle R2 und M2: Im Vergleich zum Regressionsmodell R2 kann das Mehrebenenmodell M2 die Daten genauer beschreiben, was durch den deutlich niedrigeren RMSE-Wert deutlich wird (R2: 1.08; M2: 0.81). Bezogen auf die Prädiktoren führen beide Analysen jedoch zu analogen Ergebnissen.

Zwischenergebnis II: Die Mehrebenenanalysen bestätigen die Ergebnisse der linearen Regressionen: Die Prädiktoren Bearbeitungszeit, Bearbeitungsstatus und die Motivation im Mathematikunterricht beeinflussen die Motivation von Lernenden bei der Bearbeitung von Mathtrail-Aufgaben. Hingegen wirkt sich der Zeitpunkt der Aufgabenbearbeitung während des Trails nicht signifikant auf die Motivation der Lernenden aus.

6. Diskussion

Im vorliegenden Beitrag wurde das Mathtrail-Konzept für den Mathematikunterricht im Freien vorgestellt. Bei Mathtrails bearbeiten die Lernenden in Kleingruppen Mathematikaufgaben zu interessanten Objekten in ihrer Umgebung (English et al., 2010; Cross, 1997). Unterstützt werden kann das Lernen im Freien dabei durch die MathCityMap-App (Ludwig et al., 2013).

Bisherige Arbeiten konnten zeigen, dass die Lernenden MathCityMap-Mathtrails als motivierend empfinden (Cahyono, 2018; Zender, 2019). Allerdings fehlten bislang Studien, welche untersuchten, wovon die Motivation von Lernenden bei einzelnen Mathtrail-Aufgaben abhängt (*FF1*) und wie sich im Verlauf eines Mathtrails verändert (*FF2*). Um jenen Fragen nachzugehen, wurden in der vorliegenden Arbeit je zwei Regressions- und Mehrebenenmodelle aufgestellt, welche zu gleichen Befunden führen:

Im Hinblick auf *FF1* konnten die Bearbeitungszeit einer Aufgabe, der Bearbeitungsstatus sowie die Motivation im Mathematikunterricht als relevante Prädiktoren für die Motivation bei der Bearbeitung einer Mathtrail-Aufgabe identifiziert werden. Insgesamt konnte gezeigt werden, dass die Motivation der Lernenden bei Mathtrail-Aufgaben mit zunehmender Bearbeitungsdauer tendenziell sinkt. Wenig überraschend führt auch das Lösen der Aufgabe zu einer höheren Motivation der Lernenden – wenngleich es scheinbar keine Rolle spielt, ob die Aufgabe gut oder „nur“ akzeptabel gelöst werden kann. Zuletzt ist der Mathtrail nicht frei von Einstellungen zum Mathematikunterricht: Wer dort motivierter zu Werke geht, weist tendenziell auch eine höhere Motivation bei der Bearbeitung von Mathtrail-Aufgaben auf.

Ferner konnte gezeigt werden, dass der Zeitpunkt der Aufgabenbearbeitung kaum eine Rolle für die Motivation der Lernenden spielt (*FF2*). Wenn überhaupt, so steigt die Motivation der Lernenden über die Dauer des Mathtrails (hier: 70 Minuten) nur minimal. Beim ersten Mathtrail zeigt sich also weder ein Trainingseffekt (vgl. Gurjanow, 2020; Zender, 2019) noch ein Ermüdungseffekt.

6.1 Praktische Implikationen

Unter der Annahme, dass die Motivation im Verlauf des Mathtrails über 70 Minuten – wenn überhaupt – nur minimal steigt (*FF2*), scheint eine Doppelstunde eine geeignete Zeitdauer zur Durchführung von Mathtrails darzustellen. Eine mögliche Zeitplanung der Doppelstunde wird nachfolgend skizziert:

Zunächst führt die Lehrkraft knapp in das besondere Setting, nämlich das Lernen im Freien, ein. Sie stellt die MathCityMap-App vor und teilt die Lernenden in Kleingruppen ein (ca. 15 Minuten). Auf die 70-minütiger Bearbeitung des Mathtrails folgt eine kurze Feedbackrunde, in welcher z.B. Folgendes blitzlichtartig besprochen werden kann: „Wie hat euch die Bearbeitung des Mathtrails gefallen?“, „Was hat besonders gut geklappt?“ oder „Wo traten Schwierigkeiten auf?“ In der darauffolgenden Stunde sollte eine detaillierte Nachbereitung und Reflexion des Mathtrails folgen (vgl. von Au, 2016). Gestützt werden kann diese auf

das *Digitale Klassenzimmer*, ein in das MathCityMap-System integriertes Evaluationstool (Gurjanow et al., 2019).

Auch liefert die vorliegende Arbeit Hinweise zur zeitlichen Gestaltung von Mathtrail-Aufgaben. In der Literatur finden sich verschiedene Empfehlungen zur Aufgabengestaltung, z.B., fünf bis zehn Minuten (English et al., 2011) oder eine maximale Bearbeitungszeit von 20 Minuten (Buchholtz, 2020). Letztere Obergrenze wird durch diese Arbeit empirisch bestätigt: Ab circa 20-minütiger Bearbeitungszeit sinkt die Motivation der Lernenden selbst bei einer Aufgabenlösung unter den theoretischen Skalenmittelwert (siehe Abbildung 2). Bearbeitungszeiten von mehr als 20 Minuten führen also tendenziell zu einer Demotivation der Lernenden. Folglich kann die von Buchholtz (2020) definierte Obergrenze von 20 Minuten als sinnvoller Richtwert für Mathtrail-Aufgaben bestätigt werden.

Für die Nutzung von MathCityMap im Schulunterricht können in Bezug auf *FFI* zwei Vorschläge abgeleitet werden. Da die Motivation der Lernenden stark von ihrer Fähigkeit abhängt, eine Mathtrail-Aufgabe lösen zu können, erscheint erstens die Nutzung der in MathCityMap *Teilaufgaben*-Funktion sinnvoll. Teilaufgaben zerlegen komplexe Aufgaben in kleinere Teilziele, sodass die Lernenden im Lernprozess stärker angeleitet werden. Da die Teilaufgaben optional aufrufbar sind, stellen sie gewissermaßen einen Kompromiss zwischen einer komplexen Aufgabe und einem – insbesondere für leistungsschwächere Lernenden – angemessenen Aufgabenniveau dar (vgl. Ludwig et al., 2022). Zweitens könnte im Hinblick auf die Bearbeitungszeit ein *Timer* in der App implementiert werden, welcher eine maximale Bearbeitungszeit (z.B. 20 Minuten) pro Aufgabe zulässt. So könnte sichergestellt werden, dass sich die Lernenden nicht zu lange an einer (möglicherweise für sie zu schwierigen) Aufgabe aufhalten und darüber die Lust und Freude am Mathematikunterricht im Freien verlieren. Denn dies bleibt das Ziel des Mathtrails: „Math trails make mathematics come alive for children by engaging them cognitively, physically, and emotionally.“ (English et al., 2010, S.403).

6.2 Limitationen

Die Studie wurde mit einem kleinen Sample von drei Klassen der 9. Jahrgangsstufe (Gymnasialzweig einer kooperativen Gesamtschule; N = 51) durchgeführt. Dies sollte – insbesondere im Hinblick auf die Mehrebenenanalysen – bei der Interpretation der Ergebnisse berücksichtigt werden. Allerdings führen Mehrebenen- und Regressionsmodelle zu analogen Ergebnissen, was aus unserer Sicht auf eine gewisse Belastbarkeit der Ergebnisse hindeutet.

Ferner sind folgende Limitationen der Studie zu nennen: Erstens wurden einige Motivationsfragebögen nicht individuell, sondern in der Gruppe beantwortet. Das Gruppenergebnis wurde auf alle Lernenden der Gruppe übertragen. Zweitens wurden für acht Aufgaben keine Motivationsfragebögen durch die Lernenden ausgefüllt. Mehrheitlich geschah dies, da die Aufgabe aufgrund des Stundenendes nicht abgeschlossen wurde. Drittens musste die Bearbeitung des Mathtrails bei einer Klasse wegen starken Regens bereits nach 55 Minuten abgebrochen werden.

Literatur:

- Baar, R., & Schönknecht, G. (2018). *Außerschulische Lernorte: didaktische und methodische Grundlagen*. Beltz.
- Bell, B. A., Morgan, G. B., Schoeneberger, J. A., Kromrey, J. D., & Ferron, J. M. (2014). How low can you go?. *Methodology*, 10(1), 1–11.
- Barlovits, S., & Ludwig, M. (2023). Effective or not? The impact of mobile learning on students' interest, self-efficacy, and performance in outdoor mathematics education. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Kónya (Hrsg.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (S. 2867–2874). Alfréd Rényi Institute of Mathematics & ERME.
- Bates, D., Maechler, M., Bolker, Ben, & Walker, S. (2023). *Package “lme4”: Linear Mixed-Effects Models using “Eigen“ and S4*. CRAN. <https://cran.r-project.org/web/packages/lme4/index.html>
- Buchholtz, N. (2020). Mathematische Wanderpfade unter einer didaktischen Perspektive. *mathematica didactica*, 43(2), 95–110.
- Buchholtz, N. (2021). Modelling and Mobile Learning with Math Trails. In Leung, F. K. S., Stillman, G. A., Kaiser, G., & Wong, K. L. (Hrsg.), *Mathematical Modelling Education in East and West. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (S. 331–340). Springer.
- Cahyono, A. N. (2018). *Learning mathematics in a mobile app-supported math trail environment*. Springer.
- Center for Self-Determination Theory (o.J.). *Intrinsic Motivation Inventory (IMI). Scale Description*. [selfdeterminationtheory.org https://selfdeterminationtheory.org/wp-content/uploads/2022/02/IMI_Complete.pdf](https://selfdeterminationtheory.org/wp-content/uploads/2022/02/IMI_Complete.pdf)
- Cross, R. (1997). Developing mathematics trails. *Mathematics Teaching*, 158, 38–39.
- Deci, E. L., & Ryan, R. M. (1985). *Motivation and self-determination in human behavior*. Plenum.
- Elff, M., Heisig, J. P., Schaeffer, M., & Shikano, S. (2021). Multilevel analysis with few clusters: Improving likelihood-based methods to provide unbiased estimates and accurate inference. *British Journal of Political Science*, 51(1), 412–426.
- English, L. D., Humble, S., & Barnes, V. E. (2010). Trailblazers. *Teaching children mathematics*, 16(7), 402–409.
- Field, Z., Miles, J., & Field, A. (2012). *Discovering statistics using R*. Sage.
- Fox, J., Weisberg, S, & Price, B. (2023). *Package “car”: Companion to Applied Regression*. CRAN. <https://cran.r-project.org/web/packages/car/index.html>
- Gurjanow, I. (2020). *MathCityMap – Eine Bildungs-App für Mathematische Wanderpfade* [Dissertation]. Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main.
- Gurjanow, I., Jablonski, S., Ludwig, M., & Zender, J. (2019). Modellieren mit MathCityMap: Praxisbezogene Beispiele zum Modellieren am realen Objekt. In I. Grafenhofer, & J. Maaß (Hrsg.), *Neue Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht 6: ISTRON-Schriftenreihe* (S. 95–105). Springer.

- Haas, B., Lavicza, Z., Houghton, T., & Kreis, Y. (2023). Can you create? Visualising and modelling real-world mathematics with technologies in STEAM educational settings. *Current Opinion in Behavioral Sciences*, 52, 101297.
- Hox, J., Moerbeek, M., & Van de Schoot, R. (2017). *Multilevel analysis: Techniques and applications*, 3. Auflage. Routledge.
- Jablonski, S. (2023). Is it all about the setting? – A comparison of mathematical modelling with real objects and their representation. *Educational Studies in Mathematics*, 113(2), 307–330.
- Jablonski, S., Barlovits, S., & Ludwig, M. (2023). How Digital Tools support the Validation of Modelling Results. *Frontiers in Education*, 8, 1145588.
- Jordet, A. N. (1998). *Nærmiljøet som klasserom. Uteskole i teori og praksis*. Cappelen Akademisk Forlag.
- Jordet, A. N. (2009). What is Outdoor Learning? In OUTLiNES – Outdoor Learning in Elementary Schools (Hrsg.), *From Grassroot to Curriculum in Teacher Education* (S. 7–17). OUTLiNES.
- Karpa, D., Lübbecke, G., & Adam, B. (2015). Außerschulische Lernorte. Theoretische Grundlagen und praktische Beispiele. *Schulpädagogik heute*, 6(11), 1–13.
- Ludwig, M., Barlovits, S., & Schubert, M (2022). Die Welt vermessen: Der Aufbau von Größenvorstellungen durch Längen- und Höhenmessungen mit MathCityMap. *Fördermagazin Sekundarstufe*, 2022/1, 12–16.
- Ludwig, M., Jesberg, J., & Weiß, D. (2013). MathCityMap: faszinierende Belebung der Idee mathematischer Wanderpfade. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 55(53), 14–19.
- Nakagawa, S., Johnson, P. C. D., and Schielzeth, H. (2017). The coefficient of determination R^2 and intra-class correlation coefficient from generalized linear mixed-effects models revisited and expanded. *Journal of The Royal Society Interface*, 14(134), 20170213.
- Ryan, R. M., & Deci, E. L. (2000). Intrinsic and extrinsic motivations: Classic definitions and new directions. *Contemporary educational psychology*, 25(1), 54–67.
- Scheerer, P., & Rasfeld, P. (2010). Außerschulische Lernorte. Chancen und Möglichkeiten für den Mathematikunterricht. *mathematik lehren*, 160, 4–10.
- Sitter, K. (2019). *Geometrische Körper an inner- und außerschulischen Lernorten: Der Einfluss des Protokollierens auf eine sichere Begriffsbildung*. Springer.
- von Au, J. (2016). Einführung und Überblick. In J. von Au, & U. Gade (Hrsg.), „Raus aus dem Klassenzimmer“. *Outdoor Education als Unterrichtskonzept* (S. 13–39). Beltz Juventa.
- Zender, J. (2019). *Mathtrails in der Sekundarstufe I: Der Einsatz von MathCityMap bei Zylinderproblemen in der neunten Klasse*. WTM.
- Zender, J. (2020). On the history of mathematics trails. In É. Barbin, K. Bjarnadóttir, F. Furinghetti, A. Karp, G. Moussard, J. Prytz, & G. Schubring (Hrsg.), „Dig where you stand“ 6. *Proceedings of the Sixth International Conference on the History of Mathematics Education* (S. 369–382). WTM.

Sofia Bielinski¹, Niklas Peters¹ & Susanne Prediger^{1,2}

¹Technische Universität Dortmund, ²IPN Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik, Kiel/Berlin

sofia.bielinski@math.tu-dortmund.de

Digital gestützte Lernpfade hin zum verständigen Umgang mit Gewichten – Design der divomath-Unterrichtsbausteine

Lernen komplexer Inhalte vollzieht sich in mehreren Lernstufen, die in einem Lernpfad angeordnet und aufeinander bezogen werden. In divomath werden digitale Werkzeuge daher systematisch eingebunden in ein umfassendes Unterrichtskonzept mit Aufgabenserien entlang eines Lernpfads. Der Beitrag zeigt am Thema Gewichte, wie Lernpfade über Bausteine hinweg mit zentralen Prinzipien Verstehensorientierung und Kommunikationsförderung ausgestaltet werden können.

1. divomath – digitale verstehensorientierte Lehr-Lernumgebungen: Struktur und zugrundeliegende Prinzipien

1.1 Hintergrund und Inhaltstruktur

Zahlreiche fachdidaktisch vielversprechende digitale Tools und Lernangebote wurden in den letzten 40 Jahren entwickelt, um mathematischen Kompetenzaufbau zu fördern. Ihre mögliche Lernwirksamkeit wurde empirisch nachgewiesen, sowohl für mathematische Werkzeuge wie dynamische Geometrie-Software oder Computer-Algebra-Systeme (Drijvers et al., 2016; Pinkernell et al., 2021), als auch für interaktive Lernumgebungen mit automatischem Feedback (Hillmayr et al., 2017; Scheiter, 2021), und für den Verständnisaufbau (Sacristan et al., 2010).

In der Praxis bleiben die eingesetzten Lernangebote allerdings hinter den punktuell nachgewiesenen Potentialen weit zurück: Für deutschsprachige interaktive Lernumgebungen mit automatischem Feedback wies eine Überblicksstudie nach, dass vorrangig prozedurale Fertigkeiten trainiert werden, während Verständnis nicht systematisch aufgebaut wird (Thurm & Graevert, 2022). Für digitale Werkzeuge wird die Nicht-Ausschöpfung der Potentiale meist den Herausforderungen der Lehrkräfte zugeschrieben, digitale Werkzeuge geeignet in ganzheitliche Unterrichtskonzepte zu integrieren (Drijvers et al., 2016; Scheiter, 2021).

Daher hat sich das Design-Research-Projekt *divomath* zum Ziel gesetzt, digitale verstehensorientierte Lehr-Lernumgebungen für den Mathematikunterricht zu entwickeln und zu erforschen, die alle Phasen des Unterrichts (Erarbeiten, Systematisieren & Sichern, Üben) umfassen (Abraham et al., 2023). Bislang entwickelt wurden je drei Module für die Jahrgänge 3/4 und 5/6 (vgl. Abb. 1), letztere verbindet das Multiplikationsverständnis als durchgängiger Kern. Die Module haben mehrere Bausteine, die, ähnlich wie eine Unterrichtsreihe gedacht, jeweils mehrere Einheiten umfassen. Jede Einheit besteht aus mehreren Sequenzen, die nach den Phasen Erarbeiten, Systematisieren und Üben strukturiert sind und etwa einer Un-

terrichtsstunde entsprechen (vgl. Abb. 1). Dieser Beitrag fokussiert auf fünf Einheiten der Bausteine *Gewichte kennen und schätzen* und *Gewichtseinheiten umwandeln*.

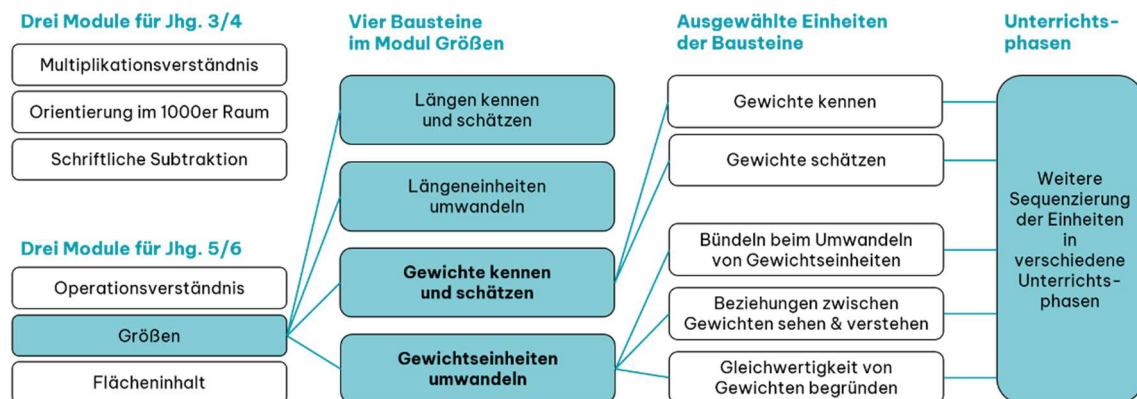


Abb. 1: Inhaltsstruktur von divomath in ausgewählten Einheiten.

1.2 Prinzipien und Komponenten der *divomath*-Module und -Bausteine

Für das Design der *divomath*-Bausteine wurden fünf übergreifende didaktische Prinzipien für qualitätvollen Mathematikunterricht (Prediger et al., 2022) in 14 Designprinzipien ausdifferenziert (Abraham et al., 2023), die in Abbildung 2 kurz benannt und in den weiteren Abschnitten ausschnittsweise erläutert werden.

Aufgabensequenzen mit dynamischen Visualisierungen ermöglichen den *Lernenden*, Schritt für Schritt Verständnis für Konzepte, Strategien und Verfahren aufzubauen. Dazu werden unterschiedliche Anregungen und Hilfen für Einzel-, Tandem- und Gruppenarbeitsphasen angeboten. Weitere Elemente wie der Einsatz von Leitfiguren oder der sich modulübergreifend-aufbauende Wissensspeicher, der jederzeit abrufbar ist, sollen das nachhaltige und langfristige Lernen ermöglichen.

Zur Unterstützung der *Lehrkräfte* werden zu jedem Baustein didaktische Hintergründe und zu jeder Einheit eine Handreichung mit Verlaufsplanung, Stundenziel und Teillernzielen sowie in der Einheit zu erwerbenden Kompetenzen des Lehrplans zur Verfügung gestellt. Ebenfalls erhalten Lehrkräfte die Möglichkeit, die Lernprozesse ihrer Lernenden über alle Unterrichtsphasen hinweg durch Anzeige von zentralen Ergebnissen aus offenen und geschlossenen Aufgaben zu diagnostizieren. Die Moderation der Plenumsphasen wird durch Impulse unterstützt.

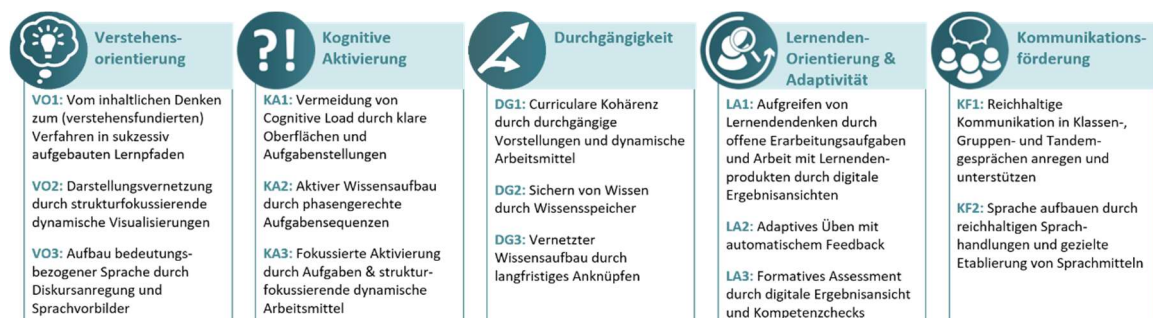


Abb. 2: Designprinzipien der *divomath*-Lehr-Lernumgebung (adaptiert aus Abraham et al., 2023).

1.3 Fachdidaktische Strukturierung der Module entlang von Lernpfaden

In diesem Beitrag berichten wir, wie die Entwicklung der Module nicht nur auf den 14 Designprinzipien aufbaut (vgl. dazu Abraham et al., 2023), sondern auch auf einer fachdidaktischen Strukturierung entlang von Lernpfaden. Mediendidaktisch-technisch ist ein Lernpfad eine (ggf. adaptive) Sequenz von Aufgaben und Materialangeboten. Im fachdidaktischen Design-Research dagegen wird der Lernpfad als Sequenzierung von Lernstufen konzipiert, zu denen nacheinander Lerngelegenheiten angeboten werden (z. B. mit Aufgaben und digitalen Tools), und die immer wieder aufeinander bezogen werden (Confrey, 2006; Sacristan et al., 2010). Während die *angebotenen intendierten Lernpfade* die Angebotsseite zeitlich linear strukturieren, sind die *individuellen Lernwege* der Lernenden häufig verschlungener und weniger geradlinig (Confrey, 2006). Daher ist es wichtig, zwischen den Lernstufen immer wieder Verknüpfungen herzustellen.

Im Weiteren werden wir exemplarisch für die *divomath*-Bausteine *Gewichte kennen und schätzen* sowie *Gewichtseinheiten umwandeln* den Prozess der Ausgestaltung der Designprinzipien entlang des Lernpfads beschreiben. An diesen Bausteinen werden unterschiedliche Designprinzipien tiefergehend konkretisiert und verdeutlicht, dass einzelne Lernstufen im Lernpfad nicht gleichzusetzen sind mit den Phasen des Unterrichts, denn jede Lernstufe soll erarbeitet, systematisiert und geübt werden.

2. Design des Bausteins *Gewichte kennen und schätzen*

2.1 Lernziele des Bausteins

Der Baustein *Gewichte kennen und schätzen* fokussiert den Aufbau und die Konsolidierung von Größenvorstellungen zu Gewichten, insbesondere über das Schätzen. Obwohl Gewichte einen konkreten Alltagsbezug aufweisen, haben viele Jugendliche und Erwachsene kaum tragfähige Größenvorstellungen und Schätzstrategien aufgebaut (u. a. Swan & Jones, 1980; Hagena, 2019).

Schätzen wird wie folgt beschrieben: „Estimating is guessing, but the guessing must be educated“ (Bright, 1976, S. 86). Schätzen ist also nicht „wildes“, sondern begründbares Raten. Dies erfolgt durch mentale Vergleiche mit eigenen Größenvorstellungen, bei denen *Stützpunktvorstellungen* abgerufen werden. Stützpunktvorstellungen für Gewichte umfassen Wissen über vertraute Objekte (in den Bausteinen „Merkbilder“ genannt), die mental verknüpft werden mit ungefähren Gewichtsangaben (Franke & Ruwisch, 2010). Stützpunktvorstellungen vermitteln also zwischen numerischen Gewichtsangaben und der Realität und nehmen somit eine ähnliche Funktion ein wie Grundvorstellungen. Der Rückgriff auf Stützpunktvorstellungen ist hilfreich für verständige und erfolgreiche Schätzstrategien (u. a. Joram et al., 2005). Diese umfassen sowohl den direkten Vergleich oder das Einschachteln mit einem oder zwei eingrenzenden Stützpunkten („Schwerer als das Handy aber leichter als die Milchtüte, also ungefähr 500 g.“) als auch ein indirekter

Vergleich wie das mentale Ausmessen mit mehreren Repräsentanten („Ungefähr so schwer wie drei Handys, also 600 g.“).

2.2 Prinzip Kommunikationsförderung und seine Konkretisierung

Faktenwissen zu Stützpunktvorstellungen wird nicht isoliert erarbeitet und trainiert, sondern nach kurzer Einführung im ganzheitlichen Gebrauch, also bei und durch die Entwicklung und Aushandlung von Schätz-Strategien. Die Aneignung von Strategien bedarf Anlässen zum eigenen Erfinden von Strategien (durch offene Schätzaufgaben), dem externen Input (durch Strategien der Leitfiguren) und dann vor allem der Kommunikation der Kinder untereinander zum Austausch über Strategien (Götze, 2007; Durkin et al., 2017).

Kommunikation ist also zentrales Lernmedium für den Strategie-Aufbau, doch viele Kinder müssen die dafür nötigen Sprachhandlungen und Sprachmittel erst erlernen. Das Prinzip *Kommunikationsförderung* umfasst daher beide Bereiche, Lernen *durch* Kommunikation und Lernen *von* Kommunikation (Lampert & Cobb, 2003; Prediger et al., 2022; siehe auch Abb. 2). Beide Bereiche sind allerdings in den meisten in Deutschland eingeführten digitalen Lernumgebungen bislang wenig berücksichtigt (Thurm & Graewert, 2022), obwohl prinzipiell zahlreiche Tools zur digitalen Kommunikationsunterstützung zur Verfügung stehen (Geiger et al., 2023).

KF1: Reichhaltige Kommunikation in Klassen-, Gruppen- und Tandemgesprächen anregen und unterstützen

Das Lernen *durch* Kommunikation erfolgt nach dem Designprinzip der reichhaltigen Diskursanregungen in (nicht nur kognitiv, sondern auch) diskursiv reichhaltigen Aktivitäten sowohl im Klassengespräch als auch in Gruppen- und Tandemarbeit (Prediger, 2020; Moschkovich, 2015). Durch die Lehrkraft angeleitete Klassengespräche zeigen sich zwar als wichtig für den Verständnis- und Strategieaufbau der Lernenden, sind jedoch nur zeitlich begrenzt umsetzbar und daher durch Gruppen- und Tandemgespräche zu ergänzen (Götze, 2007).

Die *divomath*-Bausteine bieten reichhaltige Anlässe, die Kommunikation der Lernenden untereinander *anzuregen*. Dazu werden zunächst in vorstellbaren Kontexten intuitive Ideen der Lernenden aktiviert, die sie verbalisieren können. Um unterschiedliche Wissensstände zwischen den Lernenden als Kommunikationsanlass zu nutzen, erhalten sie unterschiedliche Inputs, die sie sich beispielsweise in Form einer Strategiekonferenz gegenseitig erklären sollen. Der daran anknüpfende Vergleich verschiedener Ideen, Strategien, etc. kann den Lernprozess vertiefen (Durkin et al., 2017).

Nicht jede angeregte Kommunikation unter Lernenden ist automatisch auf Fachliches bezogen (Barnes & Todd, 1995) und diskursiv reichhaltig, z. B. wenn Lernende nur gegenseitig wiedergeben, was sie gesehen haben. Weniger reichhaltige Sprachhandlungen sind beispielsweise das Nennen von Fakten, Berichten von

konkreten Rechenwegen, wohingegen z. B. das Erklären von Bedeutungen, Erläutern der allgemeinen Strategie hinter einem konkreten Rechenweg, Begründen der Auswahl einer Strategie oder Abwägen der Genauigkeit einer Schätzung reichhaltiger sind (Prediger et al., 2019). Um diese diskursive Reichhaltigkeit zu intensivieren, wird die Kommunikation daher wie folgt unterstützt:

- Visualisierungen mit Darstellungsvernetzungs-Aktivitäten (Lesh, 1979; fürs Digitale Kaput, 1986) bieten *konzeptuelle Unterstützung*, indem Stützpunktvorstellungen mit Merkbildern visualisiert und in Schätzungen explizit eingebunden werden (→ Verbindung zu Prinzipien VO2, KA2 aus Abb. 2)
- Dynamische Interaktionselemente wie Drag'n'Drop bieten *kognitive Unterstützung*, indem die notwendigen kognitiven Aktivitäten durch digitales Handeln sichtbar sowie für die Lernenden konkreter vorstellbar (z. B. Abschätzen durch Einschachteln zwischen zwei Merkbilder) und damit leichter kommunizierbar gemacht werden (Sacristan et al., 2010) (→ KA3)
- Nach eigener Erkundung bieten Leitfiguren beim Systematisieren sowohl inhaltliche Anregungen als auch Sprachvorbilder, sie bieten also *konzeptuelle und lexikalische Unterstützung* (Loehr et al., 2020) (→ KA2)
- Vorstrukturierung der Kommunikation durch konkrete Austauschaufträge und über die Folienabfolge innerhalb der Lernumgebung bietet *kommunikationsstrukturierende Unterstützung*: Wer soll wann über was sprechen, nachdem sich die Kinder mit unterschiedlichen Strategie-Vorschlägen beschäftigt haben (Fischer et al., 2013; Geiger et al., 2023)

KF2: Sprache aufbauen durch reichhaltige Sprachhandlungen und gezielte Etablierung von Sprachmitteln

Lernen von Kommunikation geht über das lokale Unterstützen der Kommunikation hinaus, denn anspruchsvolle Sprachhandlungen (wie Erläutern der allgemeinen Strategie hinter einem Rechenweg) müssen erst systematisch gelernt werden. Dazu müssen auch die notwendigen bedeutungsbezogenen Sprachmittel erst erarbeitet werden (Prediger, 2020 sowie VO3 aus Abb. 2), um die alltagssprachlichen Sprachkompetenzen der Lernenden auszubauen. Für das Schätzen von Größen ist dies insbesondere ein Vokabular zum Beschreiben von Relationen.

2.3 Digital gestützte Realisierung des Lernpfads in den *divomath*-Bausteinen zum Gewichte kennen und schätzen

In diesem Abschnitt wird aufgezeigt, wie die Designprinzipien und digitalen Designelemente zum Anregen, Unterstützen und Aufbauen von Kommunikation im Baustein *Gewichte kennen und schätzen* entlang eines strukturierten intendierten Lernpfads genutzt werden, um sukzessive Stützpunktvorstellungen und Schätzstrategien sowie die dafür notwendige Sprache aufzubauen.

Lernstufe 1: Merkbilder kennen und in der eigenen Vorstellung vernetzen

Als niederschwelliger Einstieg in das Thema Gewichte dient ein Gespräch zweier Leitfiguren über den Zusammenhang zwischen Volumen und Gewicht (Abb. 3).

Was sagt ihr dazu?



Abb. 3: Einstieg in die Einheit Gewichte kennen.

Im (durch Impulse unterstützten) Klassengespräch können die Lernenden ihr Vorwissen und ihre Ideen zur Größe Gewicht aktivieren, auch mit ersten Schätzungen zum Gewicht von Rucksäcken. Erst danach werden einige Merkbilder angeboten, die die Lernenden in der anschließenden Tandemarbeits-Phase durch verschiedene Vernetzungsaktivitäten in ihr eigenes Denken integrieren und in ihrer eigenen Lebenswelt wiederfinden sollen. Die Ergebnisse und Erkenntnisse der Lernenden aus der Tandemphase werden im Klassengespräch gesammelt und systematisiert sowie im Wissensspeicher gesichert. Sie können mit Übungsaufgaben vertieft werden.

Lernstufe 2: Merkbilder in Schätzprozessen nutzen

Das Ziel der zweiten Einheit ist, die Lernenden zu befähigen, ihr Wissen über die Merkbilder nun im Kontext des Schätzens von Gewichten zu nutzen und zu vertiefen. Zunächst werden erste freie Schätzungen elizitiert, bevor die Lernenden in Gruppenarbeit verschiedene Strategien kennenlernen, um mit Hilfe der Merkbilder Gewicht zu schätzen. Dabei erarbeiten die Kinder in der Gruppe dem Think-Pair-Share-Prinzip folgend eine Schätzstrategie, stellen diese den anderen Gruppenmitgliedern vor und besprechen Gemeinsamkeiten sowie Vor- und Nachteile der jeweiligen Strategie. Die Think-Phase wird u. a. durch Lösungsbeispiele, Sprachvorbilder mittels Leitfiguren, Visualisierung und dynamischen Realisierungen der Anwendung der Strategie sowie Formulierungshilfen unterstützt, wie teilweise in Abbildung 4 zu sehen, damit jedes Kind mit Expertise zu einer Strategie in den Austausch mit den Gruppenmitgliedern gehen kann. Der Austausch in der Gruppe

wird durch Folienfolgen moderiert und durch Gesprächsimpulse sowie Visualisierungen der Strategien unterstützt. Die Ergebnisse der Gruppenarbeiten werden daraufhin wieder im Klassengespräch gesammelt und systematisiert, bevor sie im Wissenspeicher gesichert werden.

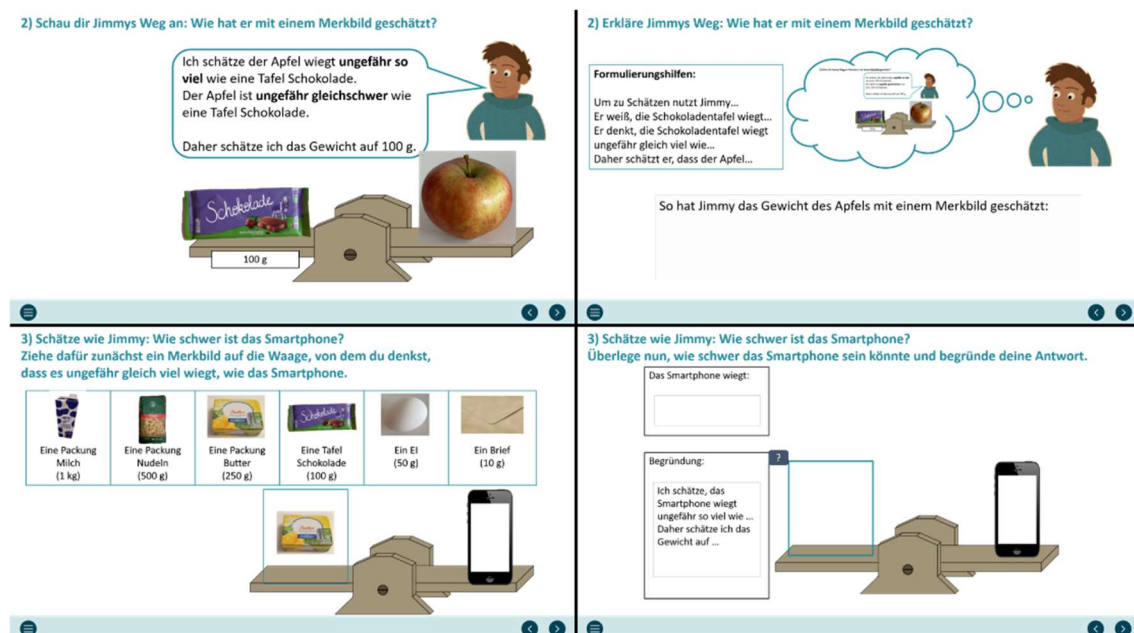


Abb. 4: Ausschnitte aus der Bearbeitung der Einheit Gewichte schätzen.

3. Design des Bausteins *Gewichtseinheiten Umwandeln*

3.1 Lernziele des Bausteins

Zentrales Lernziel dieses Bausteins ist, ein Verständnis für das Verfahren des Umwandels von Gewichtseinheiten aufzubauen (Warum ist $2 \text{ kg} = 2000 \text{ g}$?), indem an das Stellenwertverständnis (Verfeinern und Vergrößern der Einheiten) und das Multiplikationsverständnis (2 kg sind $2 \cdot 1000$ -er-Gramm-Würfel, also $2 \cdot 1000$) angeknüpft wird. Erst danach soll auch die Fertigkeit des Umrechnens eingeübt werden.

3.2 Prinzip Verstehensorientierung und seine Konkretisierung

Verständnisaufbau für Verfahren (und nicht nur für Konzepte) ist nach dem Prinzip Verstehensorientierung ein übergreifendes normatives Ziel im Mathematikunterricht (Hiebert & Carpenter, 1992; Prediger et al., 2022). Verstehensorientierung wird in *divomath* durch drei Designprinzipien umgesetzt (siehe Abb. 2).

VO1: Vom inhaltlichen Denken zum (verstehensfundierten) Verfahren in sukzessiv aufgebauten Lernpfaden

Um Fertigkeiten für das Verfahren zum Umwandeln von Gewichtseinheiten nachhaltig aufbauen zu können, ist es zunächst wichtig, ein inhaltliches Verständnis der zugrundeliegenden Konzepte (Gewicht, Gewichtseinheit) und dann ein Verständnis für das Verfahren selbst aufzubauen, bevor dann die Fertigkeit im Kalkül eingeübt wird (Glade & Prediger, 2017). Für das Rechenverfahren zum Umwandeln von

Gewichtseinheiten bedeutet das, dass die Multiplikation und Division mit Umrechnungsfaktor 1000 immer wieder an die Bedeutung von Gewichtseinheiten rückangebunden werden muss, indem zunächst die Begründung des Umwandeln im Fokus steht. Daher führt der Lernpfad innerhalb des Bausteins sukzessive über drei Einheiten zum Umrechnen von Gewichtseinheiten über das verstehensfundierte Umwandeln heran.

Für das verstehensfundierte Umwandeln von Gewichtseinheiten zentral ist die Vorstellung des Umwandeln als Verfeinern und Vergrößern (Franke & Ruwisch, 2010): Ich verfeinere das kg-Stück in 1000 Gramm-Stücke. Dabei spielt auch das Bündeln und Entbündeln eine wichtige Rolle: Während das Bündeln und Entbündeln den Lernenden bereits aus der Multiplikation und Division bekannt sein sollte (Lamon, 1996), ist beim Umwandeln von Größeneinheiten das *größenspezifische* Bündeln neu. Das bedeutet, dass beim Bündeln in Zusammenhang mit Gewichtseinheiten immer die Einheit mitgedacht werden muss: zwei 1000er in der Einheit Gramm (2000 g) beschreiben ein anderes Gewicht als zwei 1000er in Kilogramm (2000 kg). Beim Umbündeln werden auch neue Bündelbasen geschaffen (Ladel & Kortenkamp, 2014), also in eine neue Einheit umgewandelt: aus zwei 1000ern in Gramm (2000 g) werden beim Umwandeln in die nächstgrößere Einheit 2 kg, also zwei 1er in Kilogramm. Insgesamt geht es beim verstehensfundierten Umwandeln von Gewichtseinheiten also vor allem darum, die Strukturen der Gewichtseinheiten und den Zusammenhang zwischen der feinen und groben Struktur bzw. die Umstrukturierung von der einen in die andere zu verstehen (Franke & Ruwisch, 2010). Dazu zählt dann auch, Beziehungen zwischen Gewichten, insbesondere auch die Gleichwertigkeit, zu erkennen und erklären zu können.

Abbildung 8 zeigt den dafür entwickelten verstehensorientierten Lernpfad unserer *divomath*-Bausteine, der sukzessive an das verstehensfundierte Umwandeln von Gewichtseinheiten heranführt. Dieser intendierte Lernpfad liefert das gestufte Lernziel-Gerüst, aus dem sich die Struktur der Einheiten mit zentralen Stundenzielen und der Sequenzen mit Teilzielen ergeben, die in den jeweiligen Aufgaben angezielt werden. Im Folgenden wird dieses Gerüst durch zwei weitere Designprinzipien und dazu passende (teils digitale) Designelemente gefüllt.

VO2: Darstellungsvernetzung durch strukturfokussierende dynamische Visualisierungen

Die Vernetzung von materialen, bildlichen, verbalen und symbolischen Darstellungen kann den Verständnisaufbau erheblich fördern (Lesh, 1979; Kaput, 1986). Dabei ist Darstellungsvernetzung nicht nur Lernmedium, sondern zunächst auch Lerngegenstand, d.h. die Vernetzung muss erst erlernt werden, mit Fokussierung auf die jeweils relevanten Strukturen, die in die Darstellungen hineingesehen werden müssen (Lesh, 1979).

Auch für das Thema Größen ist die Vernetzung mehrerer Darstellungen und Messinstrumente zentral für den Verständnisaufbau (u. a. Franke & Ruwisch, 2010).

Beim Umwandeln von Gewichtseinheiten müssen dazu insbesondere die Strukturen des Bündelns und Verfeinerns in die Darstellungen hineingesehen werden und die Vernetzung auch explizit verbalisiert werden.

Seit vielen Jahren wird das Potential digitaler dynamischer Visualisierungen für das Erlernen von Darstellungsvernetzung betont (Kaput, 1986; Plötzner et al., 2020), allerdings auch problematisiert: Potentialen wie die gezielte Fokussierung und die Reduzierung des Cognitive Load stehen Herausforderungen wie Passivität der Lernenden und zu unbewusstes Wahrnehmen der Verknüpfung zwischen den Darstellungsformen gegenüber (zusammengefasst z. B. u. a. Wilzek, 2021). Aus konstruktiver mathematikdidaktischer Perspektive ist allerdings nicht mehr zu diskutieren, **ob** es dynamische Visualisierungen geben sollte, sondern **wie** diese (in den Unterricht) eingebunden und umgesetzt werden müssen (Wilzek, 2021).

Für die Lernumgebung zum Umwandeln von Gewichtseinheiten wurde ein dynamisches strukturfokussierendes Tool entwickelt, um Darstellungsverknüpfungsprozesse zu initiieren und damit zum Verständnisaufbau beizutragen (vgl. Abb. 6 unten). Die unterschiedlichen Bündelstrukturen (1000er in Gramm und 1er in Kilogramm) sowie die feine und grobe Struktur werden durch gegenübergestellte Würfelbausteine angelehnt an Zehnersystemblöcke/ Dienes-Material sichtbar gemacht. Das dynamische Gewichte-Tool wird mit seinen verschiedenen Funktionen sukzessive über die Bausteine hinweg erarbeitet und genutzt. Zunächst wird mit einzelnen Würfelstapeln gearbeitet und die unterschiedlichen Bündelstrukturen durch Stapeln und Zusammensetzen der Elemente erkundet, wobei sich die Bausteine immer automatisch zur nächstgrößeren „Einheit“ bündeln (10 1er-Gramm-Würfel werden zu einer 10er- Gramm-Stange). Erst danach kommen weitere Elemente wie die Balkenwaage hinzu, auf der die Würfelstapel gegenübergestellt werden. Somit werden in dem dynamischen Gewichte-Tool bewusst Darstellungen (Dienes-Material, Balkenwaage) eingesetzt und verknüpft, die auch in anderen Themengebieten relevant werden (→ DG1 und DG3 in Abb. 2).

Im Gegensatz zu einer Bereitstellung des reinen Tools kann in den *divomath*-Lernumgebungen der einzelnen Bausteine das Gewichte-Tool didaktisch gezielt in konkrete Aufgaben integriert werden. Diese initiieren verschiedene *strukturfokussierende Aktivitäten* am Gewichte-Tool, die hinsichtlich ihres Explizierungsgrads bzgl. der Strukturen entlang des Lernpfads gezielt variiert werden: Werte am Gewichte-Tool ablesen, bestimmte Gewichtsangaben selbst konstruieren (durch das Stapeln passender Elemente zu einer vorgegebenen Gewichtsangabe), das Gewichte-Tool beschreiben, das Gewichte-Tool zum Begründen der Gleichwertigkeit oder Erklären des Umwandlungsprozesses nutzen. Neben der Integration in Aufgabenserien wird das Gewichte-Tools auch als flexibles Werkzeug bereitgestellt, damit Lehrkräfte andere Einbindungen umsetzen können.

VO3: Aufbau bedeutungsbezogener Sprache durch Diskursanregung und Sprachvorbilder

Das Verbalisieren der Vorstellungen, das Erklären der Zusammenhänge zwischen den Darstellungen sowie das Explizieren der Strukturen und ihrer Beziehungen erfordern anspruchsvolle Sprachhandlungen, die vielen Lernenden schwerer fallen als das Erläutern des Rechenwegs (s. Abschnitt 2.2 und KF2). Auch in den Bausteinen zum verstehensfundierten Umwandeln von Gewichtseinheiten werden die Beteiligung an den reichhaltigen Sprachhandlungen daher gezielt unterstützt und die dafür benötigten Sprachmittel sukzessive aufgebaut.

Konkret notwendig sind dazu darstellungsspezifische *strukturfokussierende Sprachmittel*, die die Struktur in den jeweiligen Darstellungsformen explizieren (z. B. „feiner 1000er-Gramm-Würfel“) und denen, die die Beziehung zwischen den Strukturen von zwei Darstellungsformen fokussieren (z. B. „zusammenfassen zu“). Die notwendigen strukturfokussierenden Sprachmittel wurden in den ersten Designexperimenten empirisch identifiziert und in der Weiterentwicklung des Designs in die Bausteine eingebunden, indem sie explizit erarbeitet und immer wieder eingefordert werden, mit Leitfiguren als Sprachvorbildern und Satzbausteinen als Unterstützungsangebot. So wird das dynamische strukturfokussierende Gewichtes-Tool stets zusammen mit den strukturfokussierenden Sprachmittel thematisiert.

3.3 Digital gestützte Realisierung des Lernpfads in den *divomath*-Bausteinen zum Umwandeln von Gewichten

In diesem Abschnitt wird aufgezeigt, wie die Designprinzipien und digitalen Designelemente entlang eines strukturierten intendierten Lernpfads eingesetzt werden, um ein Verständnis für das Umwandeln von Gewichten sowie die dafür notwendige Sprache aufzubauen. Verdeutlicht wird dabei auch, wie die Lernstufen in den unterschiedlichen Unterrichtsphasen verknüpft werden.

Lernstufen 1-3: Größenspezifisches (Um-)bündeln, Verfeinern und Vergrößern

The screenshot displays a digital learning interface with four panels arranged in a 2x2 grid, illustrating a learning path for weight conversion.

- Top-Left Panel:**
 - Question: "Überlegt: Was könnte Emma meinen, wenn sie von groben und feinen Würfeln spricht?"
 - Visuals: A large green cube (1000g) and a smaller blue cube (100g). A character named Emma is shown with a speech bubble: "Der 1000er-Gramm-Würfel ist fein eingeteilt, weil man da noch die 1000 1er-Gramm-Würfel sieht und der 1er-Kilogramm-Würfel ist grob."
- Top-Right Panel:**
 - Question: "Ordne zu: Welcher Begriff gehört zu welchem Würfelbaustein?"
 - Visuals: A grid of boxes for labeling. Labels include "1er-Gramm-Würfel", "10er-Gramm-Würfel", "100er-Gramm-Würfel", "1000er-Gramm-Würfel", and "1er-Kilogramm-Würfel".
- Bottom-Left Panel:**
 - Question: "Begründet eure Überlegung: Welche Gegenstände sind fein und welche grob?"
 - Visuals: Images of various objects: a comb, a fence, a pile of sand, and a pile of stones.
- Bottom-Right Panel:**
 - Question: "Emma hat eine Erklärung. Was meint sie damit?"
 - Visuals: The same green and blue cubes as in the top-left panel. Emma's speech bubble says: "Ich kann den 1000er-Gramm-Würfel zu einem Würfel zusammenfassen, dann habe ich einen 1er-Kilogramm-Würfel."

Abb. 5: Ausschnitte aus der Einheit Bündeln beim Umwandeln von Gewichtseinheiten.

Eingangs wird kurz die (vermutlich aus der Grundschule bekannte) Zusammensetzung des 1000er-Würfels thematisiert, der dann mit dem 1er-Kilogramm-Würfel verglichen wird. Daran wird erarbeitet (in Abb. 5 links oben), dass beim Umwandeln von 1000 g zu 1 kg von einem 1000er zum 1er umgebündelt wird. Um die Vorstellungen und die Denksprache des „fein eingeteilten 1000er-Gramm-Würfels“ und des „grob eingeteilten 1er-Kilogramm-Würfel“ zu etablieren, wird angeknüpft an grobe und feine alltagsnahe Objekte (Abb. 5 links unten). Verknüpft werden so die Würfeldarstellung, die bedeutungsbezogenen Sprachmittel, eine größenspezifische Bündelsprache und strukturfokussierende Sprache (Abb. 5 rechts oben). Wie die Ausschnitte in Abbildung 5 zeigen, werden diese explizit erarbeitet, systematisiert und durch Leitfiguren als Sprachvorbilder vorgestellt (Abb. 5 rechts unten).

Lernstufe 4: Beziehungen zwischen Gewichten sehen und verstehen



Abb. 6: Ausschnitte aus der Einheit Beziehungen zwischen Gewichten sehen und verstehen.

Nachdem die Funktionsweise der Balkenwaage am dynamischen Gewichte-Tool erkundet und erklärt wurde, sollen die Lernenden von Gewichten an der Balkenwaage ablesen und eine symbolisch dargestellte Beziehung zwischen Gewichten mit der Balkenwaage darstellen (Abb. 6 links). In beiden Darstellungswechseln sollen die Lernenden ihre Handlung am Gewichte-Tool erläutern und explizieren, indem sie die zuvor erarbeiteten strukturfokussierenden Sprachmittel nutzen. In einer anschließenden Systematisierung werden fiktive Zuordnungen der Leitfiguren diskutiert (Abb. 6 rechts).

Lernstufe 5: Gleichwertigkeit von Gewichten begründen

In der letzten Einheit werden dann verschiedenen anspruchsvolle Begründungen für die Gleichwertigkeit am vollständigen Gewichte-Tool erarbeitet und systematisiert (Abb. 7 links). Ein besonderer Fokus wird dabei daraufgelegt, den Umwandlungsprozess unter Verwendung der strukturfokussierenden Sprachmittel am Gewichte-Tool zu begründen (Abb. 7 rechts). Abgeschlossen werden die Einheiten mit dem Eintrag in den Wissensspeicher. Zu jeder Lernstufe gibt es passende Übungsaufgaben, die zum Teil mit automatischem Feedback versehen sind.



Abb. 7: Ausschnitte aus der Einheit Gleichwertigkeit zwischen Gewichten begründen.

4. Fazit

Der Stand der empirischen Lehr-Lernforschung zu digitalen Medien stellt heraus, dass ihre Lernwirksamkeit erheblich von der unterrichtlichen Einbindung abhängt (Drijvers et al., 2016; Pinkernell et al., 2021; Scheiter, 2021). Dieser Beitrag stellt vor, wie diese unterrichtliche Einbindung in den *divomath*-Modulen systematisch designet wird: Die inhaltliche Strukturierung wird in aufeinander aufbauenden Lernpfaden über mehrere Bausteine hinweg gezielt entwickelt und ausgestaltet. Dabei werden die Designprinzipien systematisch im Dienst des Lernpfads für alle Phasen des Unterrichts integriert, um Strategie- und Verständnisaufbau zu erreichen und zu konsolidieren. Abbildung 8 fasst im Überblick zusammen, wie die Unterrichtsphasen in der Abfolge der Bausteine entlang der Lernstufen der Lernpfade ineinandergreifen, zunächst mit Fokus auf Kommunikationsförderung, dann mit Fokus auf Verständnisaufbau für Verfahren.

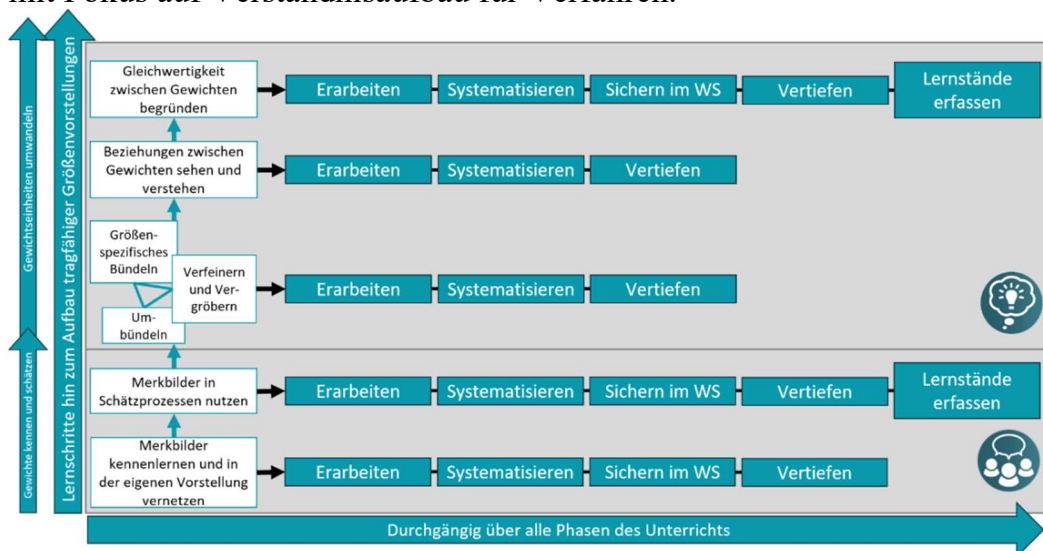


Abb. 8: Lernstufen im Lernpfad über vollständige Einheiten hinweg.

Dank. Das Projekt *divomath* unter der Leitung von Susanne Prediger und Christoph Selter wurde 2021-23 gefördert vom nordrhein-westfälischen Ministerium für Schule und Bildung. Wir danken den weiteren Mitgliedern des *divomath*-Teams für die Zusammenarbeit, insbesondere Malina Abraham und Hannah Vonstein.

Literatur:

- Abraham, M., Bielinski, S., Kissel, E., Selter, C., Vonstein, H. & Prediger, S. (2023). Designprinzipien in divomath: Digitale verstehensorientierte Lehr-Lern-Umgebungen für alle Unterrichtsphasen. In F. Dilling, D. Thurm & I. Witzke (Hrsg.), *Digitaler Mathematikunterricht in Forschung und Praxis. Tagungsband zur Vernetzungstagung 2022 in Siegen* (S. 1-10). WTM. <http://dx.doi.org/10.37626/GA9783959872041.0>
- Barnes, D. & Todd, F. (1995). *Communication and Learning Revisited. Making meaning through talk*. Heinemann. <https://doi.org/10.4324/9781003140832>
- Bright, G. W. (1976). Estimation as part of learning to measure. In D. Nelson & R. Reys (Hrsg.), *Measurement in school mathematics* (S. 87-104). National Council of Teachers of Mathematics.
- Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. In K. Sawyer (Hrsg.), *Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (S. 135-152). Cambridge University Press. doi:10.1017/CBO9780511816833.010
- Drijvers, P., Ball, L., Barzel, B., Heid, M. K., Cao, Y., & Maschietto, M. (2016). *Uses of technology in lower secondary mathematics education: A concise topical survey*. Springer Nature. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-33666-4>
- Durkin, K., Star, J.R. & Rittle-Johnson, B. (2017). Using comparison of multiple strategies in the mathematics classroom: lessons learned and next steps. *ZDM Mathematics Education*, 49, 585–597. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0853-9>
- Fischer, F., Kollar, I., Stegmann, K. & Wecker, C. (2013). Toward a script theory of guidance in computer-supported collaborative learning. *Educational Psychologist*, 48(1), 56–66. <https://doi.org/10.1080/00461520.2012.748005>
- Franke, M. & Ruwisch, S. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule* (2. Aufl.). Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2695-6>
- Glade, M., & Prediger, S. (2017). Students' individual schematization pathways—empirical reconstructions for the case of part-of-part determination for fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 94(2), 185–203. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9716-5>
- Geiger, V., Bennison, A. & Abidin, Z. (2023). Enhancing learner communication and collaboration through digital resources: Affordances, constraints, and possibilities. In B. Pepin, G. Gueudet & J. Choppin (Hrsg.), *Handbook of Digital Resources in Mathematics Education* (S. 1–27). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-95060-6>
- Götze, D. (2007). *Mathematische Gespräche unter Kindern. Zum Einfluss sozialer Interaktion von Grundschulkindern beim Lösen komplexer Aufgaben*. Franzbecker.
- Hagena, M. (2019) *Einfluss von Größenvorstellungen auf Modellierungskompetenzen*. Springer Fachmedien. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-23115-6>
- Hillmayr, D., Reinhold, F., Ziernwald, L., & Reiss, K. (2017). *Digitale Medien im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht der Sekundarstufe*. Waxmann. <https://doi.org/10.25656/01:15482>
- Hiebert, J. & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Hrsg.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 65–97). Macmillan.

- Joram, E., Gabriele, A. J., Bertheau, M., Gelman, R., Subrahmanyam, K. (2005). Children's Use of the Reference Point Strategy for Measurement Estimation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(1), 4–23. <http://dx.doi.org/10.2307/30034918>
- Kaput, J. J. (1986). *Information technology and mathematics: Opening new representational windows*. Harvard Educational Technology Center.
- Ladel, S. & Kortenkamp, U. (2014). Tätigkeitsorientiert zu einem flexiblen Verständnis von Stellenwerten. Ein Ansatz aus Sicht der Artefact-Centric Activity Theory. In S. Ladel & C. Schreiber (Hrsg.), *Von Audiopodcast bis Zahlensinn* (S. 151–175). WTM. <https://doi.org/10.37626/GA9783942197632.0>
- Lampert, M. & Cobb, P. (2003). Communication and language. In J. Kilpatrick & D. Schifter (Hrsg.) *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (S. 237–249). National Council of Teachers of Mathematics.
- Lamon, S. J. (1996). The development of unitizing: Its role in children's partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(2), 170–193. <https://doi.org/10.2307/749599>
- Lesh, R. (1979). Mathematical learning disabilities. Considerations for Identification, Diagnosis, Remediation. In R. Lesh, D. Mierkiewicz, & M. Kantowski (Hrsg.), *Applied mathematical problem solving* (S. 111–180). Ericismeac.
- Loehr, A., Rittle-Johnson, B., Durkin, K., & Star, J. R. (2020). Does calling it “Morgan's way” reduce student learning? Evaluating the effect of person-presentation during comparison and discussion of worked examples in mathematics classrooms. *Applied Cognitive Psychology*, 34(4), 825–836. <https://doi.org/10.1002/acp.3670>
- Moschkovich, J. N. (2015). Academic literacy in mathematics for English learners. *The Journal of Mathematical Behaviour*, 40(A), 43–62. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.01.005>
- Pinkernell, G., Reinhold, F., Schacht, F., & Walter, D. (2021). *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule: Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-65281-7>
- Ploetzner, R., Berney, S., & Bétrancourt, M. (2020). A review of learning demands in instructional animations: the educational effectiveness of animations unfolds if the features of change need to be learned. *Journal of Computer Assisted Learning*, 36(6), 838–860. <https://doi.org/10.1111/jcal.12476>
- Prediger, S. (2020). *Sprachbildender Mathematikunterricht*. Cornelsen.
- Prediger, S., Erath, K. & Opitz, E.M. (2019). The Language Dimension of Mathematical Difficulties. In A. Fritz, V. G. Haase & P. Räsänen (Hrsg.), *International Handbook of Mathematical Learning Difficulties*. Springer Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97148-3_27
- Prediger, S., Götze, D., Holzäpfel, L., Rösken-Winter, B., & Selter, C. (2022). Five principles for high-quality mathematics teaching: Combining normative, epistemological, empirical, and pragmatic perspectives for specifying the content of professional development. *Frontiers in Education*, 7, 1–15. <https://doi.org/10.3389/educ.2022.969212>
- Sacristán, A. I., Calder, N., Rojano, T., Santos-Trigo, M., Friedlander, A., & Meissner, H. (2010). The influence and shaping of digital technologies on the learning – and learning trajectories – of mathematical concepts. In C. Hoyles & J.-B. Langrange

- (Hrsg.), *Mathematics Education and Technology – Rethinking the Terrain* (S. 179–226). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0_9
- Scheiter, K. (2021). Lernen und Lehren mit digitalen Medien: Eine Standortbestimmung. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 24(5), 1039-1060. <https://doi.org/10.1007/s11618-021-01047-y>
- Swan, M. & Jones, O. E. (1980). Comparison of Students' Percepts of Distance, Weight, Height, Area, and Temperature. *Science Education*, 64(3), 297-305. <https://doi.org/10.1002/sce.3730640305>
- Thurm, D. & Graewert L. A. (2022). *Digitale Mathematik-Lernplattformen in Deutschland*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-37520-1>
- Wilzek, W. (2021). *Zum Potenzial Von Anschauung in der Mathematischen Hochschullehre: Eine Untersuchung Am Beispiel Interaktiver Dynamischer Visualisierungen in der Analysis*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-35361-2>

Werkzeugkompetenzen von Lehramtsstudierenden im Bereich elementarer Funktionen – Konzeption eines Tests zu den Bedien- und Auswahlkompetenzen bezüglich GeoGebra und Tabellenkalkulation

Digitale Technologien bieten für die Unterrichtsgestaltung vielfältige Möglichkeiten, aber gleichsam auch Herausforderungen für Mathematiklehrkräfte. Der vorliegende Beitrag beschreibt die Testentwicklung zur Messung der Werkzeugkompetenz von Lehramtsstudierenden, bezogen auf Tabellenkalkulation und GeoGebra im Bereich elementarer Funktionen. Darüber hinaus werden Ergebnisse des Testeinsatzes über fünf Semester von zwei Interventionsgruppen vorgestellt.

1. Einleitung

Angesichts der Forderung, dass (bspw. in Rheinland-Pfalz) Schüler:innen spätestens ab Klassenstufe 7 selbständig mit Dynamischer Geometrie-Software und einem Tabellenkalkulationsprogramm (TKP) arbeiten sollen (MBWJK, 2007), kommt Lehrkräften eine besondere Rolle bei der Integration digitaler Mathematikwerkzeuge (DMW) in den Mathematikunterricht zu (vgl. Thurm, 2020). Der didaktisch sinnvolle Einsatz von DMW hat das Potential Mathematikunterricht in vielfältiger Hinsicht zu bereichern. Die KMK-Strategie *Bildung in der digitalen Welt* (KMK, 2016) spiegelt den Fokus auf diesen spezifischen Zugang zur Mathematik vor allem durch die Kompetenz *Problemlösen und Handeln* (5.2. *Werkzeuge bedarfsgerecht einsetzen*) wider. Der Beschluss der Kultusministerkonferenz (KMK, 2022) für das Fach Mathematik zum Ersten Schulabschluss (ESA) und Mittleren Schulabschluss (MSA) verleiht dieser Forderung mit der prozessbezogenen Kompetenz *Mit Medien mathematisch arbeiten* weiteren Nachdruck. Neben der Nutzung von DMW und deren kritischer Reflexion sollen unter anderem Kompetenzen zur Erstellung eigener digitaler Medien erworben werden. Die Förderung fachlicher Kompetenzen - auch durch digitale Hilfsmittel - sowie der Erwerb digitaler Kompetenzen beim fachlichen Lernen ist demnach zu einer obligatorischen Aufgabe von Mathematiklehrkräften geworden.

Heintz et al. (2014) fordern hierzu den Aufbau von Werkzeugkompetenzen bei Schüler:innen. Daher ist notwendig, dass (angehende) Lehrkräfte diese Werkzeuge kompetent in den Unterricht integrieren können. Die erste Phase der Lehrkräftebildung kann hierzu einen wichtigen Beitrag leisten, sieht sich jedoch vor einer großen Heterogenität in Hinblick auf die Vorerfahrungen der Studierenden bspw. aus der eigenen Schulzeit oder aus bereits absolvierten Schulpraktika während des Studiums.

2. Theoretische Grundlagen

Im Folgenden werden die für den vorliegenden Beitrag zentralen Begriffe *Digitale Mathematikwerkzeuge*, *Werkzeugkompetenz* und *Funktionales Denken* vorgestellt. Ausgehend von der Problemstellung und unter Berücksichtigung der theoretischen Grundlagen, werden daraus drei Forschungsfragen abgeleitet.

2.1 Digitale Mathematikwerkzeuge

In diesem Beitrag ist der Begriff *Digitale Mathematikwerkzeuge* von zentraler Bedeutung. Angesichts der vielfältigen Begriffe, die in den letzten Jahren im Bereich DMW aufgekommen sind (vgl. Weigand & Weth, 2002, Hillmayr et al., 2017), soll im Folgenden auf die Definition von Heintz et al. (2017) zurückgegriffen werden. Dort werden die beiden Softwares TKP und GeoGebra als Beispiele digitaler Mathematikwerkzeuge aufgezählt.

„Digitale Werkzeuge sind Programme, die flexibel im Mathematikunterricht eingesetzt werden können wie Tabellenkalkulation, Dynamische Geometrie-Software und Computer-Algebra, [...].“

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, ist es durch Strategien und Beschlüsse der KMK (2016; 2022) intendiert, dass Schüler:innen, und damit auch Lehrkräfte, diese Werkzeuge kompetent im Unterricht einsetzen können.

2.2 Werkzeugkompetenz

Nach Weinert (2001, S. 27f) sind Kompetenzen „[...] kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen [...] sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten [...]“. In Anlehnung daran charakterisieren Heintz et al. (2017, S. 21) den Begriff der Werkzeugkompetenz als „[...] mit Werkzeugen kompetent Mathematik zu betreiben.“ Dabei wird die Werkzeugkompetenz in drei Subkompetenzen zur *Bedienung*, *Auswahl* und *Reflexion* derselbigen untergliedert. Heintz et al. (2014, 2016, 2017) richten ihren Blick zwar auf die Schüler:innen, da die Integration von DMW in den Mathematikunterricht maßgeblich von der Lehrkraft abhängt (Vollrath & Roth, 2012), sind die Werkzeugkompetenzen jedoch gleichsam von (angehenden) Lehrkräften zu erwerben.

2.3 Funktionales Denken

In Bezug auf die Leitidee *Strukturen und funktionaler Zusammenhang* der Bildungsstandards (KMK, 2022) gibt es viele Potentiale für einen didaktisch sinnvollen Einsatz von DMW, der das Lehren und Lernen von Funktionen unterstützen kann. So sind die Repräsentationsformen Funktionsgleichung, Graph und Wertetabelle mit DMW vergleichsweise einfach zu erstellen und daher schnell verfügbar

(Thurm, 2020). Die dynamischen Verknüpfungsmöglichkeiten der Darstellungsformen untereinander sind bedeutend für die Förderung des funktionalen Denkens (Vollrath, 1989, Heugl et al., 1996).

Weitere Vorteile stellen die Visualisierungsfunktion (Heugl, 2014) und die Möglichkeit des entdeckenden Lernens mit GeoGebra, bspw. durch das Verändern der Parameter durch Schieberegler bei Funktionsgleichungen dar.

2.4 Problemstellung und Forschungsfragen

Wie eine Erhebung unter Lehramtsstudierenden der Universität Koblenz im Rahmen dieser Studie ergab, sind die Vorerfahrungen zu DMW sehr heterogen. Abbildung 1 zeigt, dass alle befragten 126 Personen angaben, in der Schulzeit selbst einen Taschenrechner genutzt zu haben; dagegen hatten nur etwa zwei Drittel GeoGebra und nur etwa die Hälfte Erfahrungen mit TKP. Darüber hinaus bemängeln Studierende die Häufigkeit („*Leider haben wir nur sehr selten mit den Werkzeugen arbeiten dürfen.*“) und die Qualität des Einsatzes („*Ich habe nur an speziellen Beispielen das "nachgemacht", was der Lehrer einmal gezeigt hat.*“).

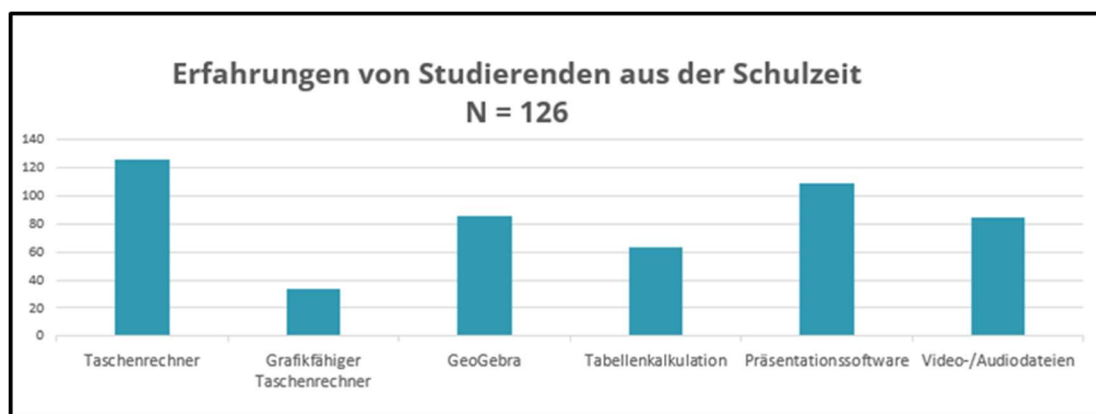


Abbildung 1: Erfahrungen der Studierenden zu DMW

In Bezug auf die Problemstellung und den theoretischen Hintergrund stellen sich nun folgende Forschungsfragen im Bereich der Bedien- und Auswahlkompetenz:

- Inwieweit beherrschen Lehramtsstudierende (GYM, RS plus & BBS) spezifische Bedienkompetenzen bezogen auf GeoGebra und TKP und welche Entwicklungen zeigen sich durch den Besuch eines entsprechenden fachdidaktischen Seminars?
- Inwieweit zeigen sich nach dem Besuch des fachdidaktischen Seminars Veränderungen bei der Auswahl der DMW GeoGebra und TKP, um Aufgaben im Bereich Funktionen zu unterstützen, die von Schüler:innen typischerweise prozedural bearbeitet werden?

- Welche Einsatzmöglichkeiten von GeoGebra und TKP nennen Lehramtsstudierende vor und nach dem Besuch des fachdidaktischen Seminars bei Aufgaben, die von Schüler:innen im Bereich Funktionen typischerweise prozedural bearbeitet werden?

3. Methodik

Im Folgenden wird nun die Methode der vorliegenden Studie (vgl. Abbildung 2) dargelegt. Im Rahmen einer curricular verankerten Lehrveranstaltung wurden die DMW GeoGebra sowie TKP behandelt. Für diese Werkzeuge wurden basale Bedienkompetenzen für den Themenbereich elementare Funktionen identifiziert. Zur Evaluation dieser Interventionen wurde ein Fragebogen zur Selbsteinschätzung zu Einstellungen zum DMW-Einsatz sowie ein Kompetenztest zur Bedienung von DMW im Pre-Post-Design genutzt. Aus Gründen des Fokus dieses Beitrages werden nachfolgend die Seminarkonzepte und der Kompetenztest genauer vorgestellt.

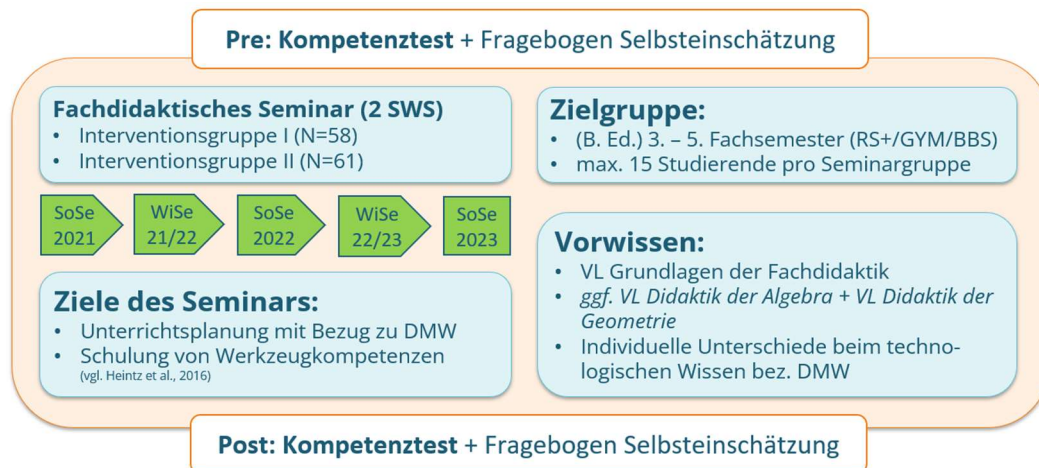


Abbildung 2: Forschungsdesign

3.1 Seminarkonzepte

Zum Aufbau von Werkzeugkompetenzen wurden zwei verschiedene fachdidaktische Seminare durchgeführt, welche sich im methodischen Vorgehen unterscheiden, die Nutzung der digitalen Mathematikwerkzeuge GeoGebra und Tabellenkalkulation jedoch beide in den Mittelpunkt stellen. Die Lehrveranstaltungen sind im Bachelor of Education für die weiterführenden Schularten (Realschule Plus, Gymnasium und Berufsbildende Schule) an der Universität Koblenz angesiedelt. Wie die oben zitierte Vorstudie zeigt, ist das Vorwissen heterogen, da vermutlich in der Schulzeit unterschiedliche Niveaus von Werkzeugkompetenzen erworben wurden. Eine Vorlesung zu Grundlagen der Fachdidaktik wurde von allen Studierenden bereits im Vorfeld gehört. Die Studierenden sollten gemäß Studienverlaufsplan im 3. bis 5. Fachsemester sein.

Primäre Ziele der fachdidaktischen Seminare (FS) sind der Erwerb von Werkzeugkompetenzen sowie von Kompetenzen zur Unterrichtsplanung und -gestaltung mit DMW. Es folgt nun eine Beschreibung der beiden Seminarkonzepte.

Das FS zur Interventionsgruppe I (vgl. Abbildung 3) ist nach einer einführenden Vermittlung von bildungspolitischen Rahmenbedingungen (KMK, RLP), TPACK und Vor- und Nachteile von DMW im Wesentlichen in drei Phasen unterteilt. In der ersten Phase arbeiten Studierende anhand eines Aufgabenkatalogs unter Berücksichtigung des TPACK-Modells (Mishra & Köhler, 2006) mit GeoGebra und einem TKP mit dem Ziel die Facetten TK, TPK und TCK zu erwerben bzw. weiterzuentwickeln. Anschließend werden in der zweiten Phase unter Anleitung des Dozenten Unterrichtsstunden konzipiert, in denen die Werkzeuge TKP und GeoGebra zum Einsatz kommen. Theoretische Grundlagen für die Arbeitsphase II sind das Vorwissen aus einem fachdidaktischen Grundlagenmodul, Fachwissen (Zuordnungen/Funktionen) und das Kompetenzmodell von COACTIV (Kunter et al., 2011). Diese konzipierten Stunden werden in der dritten Phase nach einer Hospitationsstunde in der betreffenden Klasse von den Studierenden an Kooperationschulen durchgeführt und videographiert. Anhand der Videovignetten werden die Unterrichtsstunden anschließend von den Studierenden reflektiert.



Abbildung 3: Seminarkonzept Interventionsgruppe I

In Interventionsgruppe II (vgl. Abbildung 4) erfolgt der Erwerb von Bedienkompetenzen in GeoGebra und TKP über das gesamte Semester verteilt, parallel zur Thematisierung von deren Vor- und Nachteilen. Ergänzend zu den DMW werden Learning Management Systeme (LMS), der Einsatz von Videos und auch von Audience Response Systemen behandelt und mit Blick auf die KMK-Strategie *Bildung in der digitalen Welt* beleuchtet. Hierdurch erfolgt eine Verknüpfung zur Schulpraxis und damit die Erzeugung von Relevanzbewusstsein bei den Studierenden. Als Grundlagen der Unterrichtsplanung dienen neben Bildungsstandards und Lehrplan insbesondere das Modell der gestaltungsorientierten Mediendidaktik (vgl. Kerres, 2018). Zum Ende des Semesters führen die Studierenden eine Lesson Plan Study (vgl. Cavey & Berenson, 2005, Dudley, 2014, Soukup-Altrichter et al., 2020) durch. Im Gegensatz zu Interventionsgruppe I wird der geplante Unterricht von den Studierenden nicht durchgeführt.

Als zentrale Plattform für die Seminare wird das LMS OpenOLAT genutzt. Die Seminargruppen bestehen aus maximal 15 Personen. Über den gesamten Zeitraum (04/2021 bis 07/2023) haben beide konzipierten Seminare parallel stattgefunden.



Abbildung 4: Seminarkonzept Interventionsgruppe II

3.2 Kompetenztest

Zur Untersuchung der fokussierten Werkzeugkompetenzen wurde ein dreiteiliger Kompetenztest entwickelt, der wie folgt aufgebaut ist.



Abbildung 5: Aufbau Kompetenztest

Die Teile „TKP“ und „GeoGebra“ fokussieren Bedienkompetenzen, wohingegen der dritte Teil Auswahlkompetenzen adressiert. Im Weiteren sollen nun zunächst die Teile zu TKP bzw. GeoGebra in den Mittelpunkt gestellt werden, bevor anschließend die Didaktik bezogene Aufgabe vorgestellt wird. Zu jedem der drei Teile des Kompetenztestes gibt es zwei Aufgaben (bei TKP bspw. mit T1 und T2 bezeichnet). Die Aufgaben kommen im Pre- und Post-Test gleichsam zum Einsatz, wobei die Zuteilung nach einem festen Muster erfolgt, sodass den Studierenden in Pre- und Post-Test jeweils unterschiedliche Aufgaben zugeteilt werden und alle acht möglichen Aufgaben-Kombinationen annähernd gleich häufig auftreten. Die Durchführung erfolgte im LMS OpenOLAT, sodass eine maximale Bearbeitungszeit eingestellt werden konnte. Auf diese Weise sollte erschwert werden, dass Lösungen im Internet recherchiert wurden.

Zur Erstellung der Aufgaben zur Bedienkompetenz wurde zunächst auf Grundlage des Lehrplans (MBWJK, 2007) eine Analyse der Funktionalitäten vorgenommen, die für das Arbeiten mit Funktionen als basal angenommen werden. Für TKP wurden neun Funktionalitäten als grundlegend identifiziert, die in die vier Kategorien Layout, Eingaben, Berechnungen und Graph eingeteilt wurden (vgl. Tabelle 1).

Kategorie	Funktionalität
Layout	Zentrierung Fettsatz Rahmenlinien
Eingaben	Texteingabe Zahleneingabe
Berechnungen	Zellbezug
Graph	Graph vorhanden Titel eingefügt Achsenbeschriftung

Tabelle 1: Basale Funktionalitäten von TKP

Den Studierenden wurden die notwendigen mathematischen Formeln vorgegeben, sodass die Bedienung der DMW nicht an fehlendem mathematischem Wissen scheitern konnte. Weiterhin wurde ein Layout als Screenshot vorgegeben, das jedoch von den Studierenden selbstständig umgesetzt werden sollte. Die Bearbeitung erfolgte somit ausgehend von einem leeren Tabellenblatt.

Für GeoGebra wurden 15 Funktionalitäten in acht Kategorien festgelegt (vgl. Tabelle 2). Neben dem Einfügen von Beschriftungen oder Farbänderungen sind das Steigungsdreieck und Schieberegler wichtig für das Arbeiten mit Funktionen. Ebenso sind das Einfügen von Funktionsgleichungen im Algebra-Fenster sowie von Punkten, Orthogonalen und Parallelen im Grafik-Fenster als grundlegend anzusehen. Die Bearbeitung erfolgt ebenfalls von einer leeren Datei ausgehend. Durch kleinschrittige Arbeitsanweisungen (z.B. „Beschriften Sie die Koordinatenachsen mit x und y “ oder „Erzeugen Sie den Schnittpunkt der Parabel mit der x -Achse.“) werden die Studierenden aufgefordert, die als basal identifizierten Funktionalitäten einzusetzen. Zur Auswertung wurde ein Codebook mit dichotomer Codierung erstellt.

Kategorie	Funktionalität
Achsenbeschriftung	Achsenbeschriftung
Steigungsdreieck (SD)	SD vorhanden SD selbst konstruiert SD Größe anpassen
Schieberegler manipulieren	Grenzen Schrittweite
Farbänderung (FÄ)	FÄ vorhanden
Besondere Geraden	Orthogonale vorhanden Parallele vorhanden
Funktionsgleichungen (FG)	FG eingegeben
Punkte	Punkte erzeugt korrekte Koordinaten Schnittpunkt vorhanden
Sonstiges	Beschriftung anpassen Anzeige Algebra-Fenster anpassen

Tabelle 2: Basale Funktionalitäten GeoGebra

Das dritte Element des Kompetenztests umfasst die fachdidaktischen Aufgaben D1 und D2 und adressiert somit die Auswahlkompetenzen der Studierenden. Den Studierenden wurden Aufgaben, wie sie in zahlreichen Schulbüchern der Klassenstufen 9 und 10 in den Themenbereichen *quadratische Funktionen*, *Exponential- und Logarithmusfunktionen* zu finden sind, mit einer zu erwartenden Schüler-Lösung über das LMS OpenOLAT zur Verfügung gestellt (siehe Abbildungen 6 und 7).

Gegeben seien die Funktionsgleichungen $f(x) = x^2 - x - 6$ und $g(x) = 2x - 2$. Bestimme die gemeinsamen Punkte des Graphen von f mit dem Graphen von g.	$f(x) = g(x)$ $x^2 - x - 6 = 2x - 2$ $\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$ $x_{1/2} = 1,5 \mp \sqrt{(-1,5)^2 + 4}$ $x_1 = -1$ $x_2 = 4$ $g(-1) = -4 \quad \Leftrightarrow \quad S_1(-1/-4)$ $g(4) = 6 \quad \Leftrightarrow \quad S_2(4/6)$

Abbildung 6: Schulbuchaufgabe zu D1

Bei diesen Schulbuchaufgaben ist es möglich, dass Schüler:innen ohne vorhandenes Funktionenkonzept eine Lösung erhalten durch prozedurales Vorgehen mit dem entsprechenden Kalkül. Die Schulbuchaufgabe zu D1 erfüllt dabei nachfolgende Aspekte im Bereich der Leitidee *Strukturen und funktionaler Zusammenhang*. Anhand der Funktionsgleichungen einer quadratischen und einer linearen Funktion sollen die gemeinsamen Punkte der beiden Graphen bestimmt werden. Bei D2 ist mit $3^x = 18$ eine Gleichung gegeben, die gelöst werden soll.

Löse nachfolgende Gleichung: $3^x = 18$	$3^x = 18 \quad \lg ()$ $\lg (3^x) = \lg (18) \quad T$ $x \cdot \lg (3) = \lg (18) \quad : \lg (3)$ $x = \frac{\lg (18)}{\lg (3)} = \log_3(18)$ $x \approx 2,63$

Abbildung 7: Schulbuchaufgabe zu D2

Die Aufgaben wurden so gewählt, dass durch das Fehlen der Darstellungsformen Graph und Wertetabelle didaktisches Potential für den Einsatz der DMW Tabellenkalkulation und GeoGebra entsteht. Des Weiteren war die Intention mit der Aufgabe zu D1 den Themenkreis *Zuordnungen und Funktionen* und mit der Aufgabe zu D2 den Themenkreis *Terme und Gleichungen* innerhalb der Leitidee 4: *Funktionaler Zusammenhang* (MBWJK, 2007) anzusprechen. Ebenso wurde be-

rücksichtigt, dass die Lösungen der Aufgaben verschiedenen Zahlenmengen zugeordnet werden. So sind die Koordinaten der Schnittpunkte S_1 und S_2 in der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ zu finden, während die Lösung für den Exponenten x in der zu D2 gehörenden Aufgabe eine reelle Zahl ist.

Mit den beiden nachfolgenden Items wurden die Studierenden aufgefordert sich zu den Schulbuchaufgaben zu äußern:

- (a) Beschreiben Sie, wie man diese Aufgabe mit digitalen Mathematikwerkzeugen (Tabellenkalkulation und/oder GeoGebra) unterstützen kann.
- (b) Kommentieren Sie aus fachdidaktischer Sicht den Mehrwert bzw. Vor- und Nachteile durch den Einsatz der beschriebenen digitalen Unterstützung.

Zur Beantwortung von D1 und D2 sollten die Studierenden einen Fließtext verfassen, der mittels qualitativer Inhaltsanalyse (Mayring, 2015) ausgewertet wurde. In Teil (a) wird die *Auswahl* als Teilbereich der Werkzeugkompetenzen angesprochen. Nach Heintz et al. (2016a, S.20) ist damit die Möglichkeit gemeint, „[...] je nach gegebener Problemsituation ein passendes digitales Werkzeug auszuwählen.“ Neben dem ausgewählten DMW ist in Teil (a) auch zu beantworten, wie die konkrete Unterstützung mit einem DMW gelingen kann. Für die Auswertung dieser Sub-Items wurde jeweils ein Kategoriensystem entwickelt, welches deduktive (vgl. Abbildungen 10 und 11) als auch induktive Kategorien enthält. Dabei wurden die Repräsentationsformen *Funktionsgleichung*, *Graph* und *Wertetabelle* mit basalen Bedienkompetenzen der beiden Softwares TKP und GeoGebra verknüpft. Die Frage (b) wird für diesen Beitrag nicht weiter thematisiert, soll aber der Vollständigkeit halber nicht unerwähnt bleiben.

4. Ergebnisse

Zur Untersuchung der beschriebenen Kompetenzen der Studierenden sowie deren Entwicklung durch den Besuch des Seminars, die Änderungen bei der Auswahl der DMW GeoGebra und TKP sowie die erkannten Unterstützungsmöglichkeiten durch den DMW-Einsatz, wurden die Testergebnisse der Seminarteilnehmenden von Sommersemester 2021 bis Sommersemester 2023 betrachtet. Die Ergebnisse von Teil 1 und 2 des Kompetenztests werden auf der Datenlage der Interventionsgruppe II vorgestellt, der dritte Teil mit den Daten von Interventionsgruppe I.

4.1 Bedienkompetenzen TKP und GeoGebra

Zum 1. Teil liegen 48 vollständige Datensätze vor. Bei der Auswertung der TKP-Aufgaben wird anhand der im vorherigen Abschnitt dargelegten Items untersucht, ob die Layout-Funktionen Zentrierung, Fettsatz und Rahmenlinien mindestens einmal angewendet sowie Text oder Zahlen eingegeben wurden. Hierbei wird nicht nach der Häufigkeit oder Korrektheit der Anwendung differenziert, da die Bedienkompetenz bereits bei einmaliger Ausführung vorhanden zu sein scheint. Gleiches gilt für die Nutzung von Zellbezügen, dem Vorhandensein eines Graphen sowie

dem Einfügen eines Titels und der selbst formulierten Achsenbeschriftung. So werden bspw. auch falsch formulierte Diagrammtitel bei den Bedienkompetenzen berücksichtigt. Bei allen Variablen ist eine maximale Punktzahl von 1 zu erreichen.

Kategorie	Variable	Anzahl Pre	Anzahl Post
Layout	Zentrierung	18	23
	Fettsatz	13	18
	Rahmenlinien	14	28
Eingaben	Texteingabe	45	48
	Zahleneingabe	45	48
Berechnungen	Zellbezug	34	45
Graph	Graph vorhanden	24	35
	Titel eingefügt	20	30
	Achsenbeschriftung	19	24

Tabelle 3: Häufigkeiten bzgl. Bedienkompetenz von TKP

Aus Tabelle 3 geht hervor, dass bei der Verwendung von Layout-Optionen zwar eine Steigerung im Pre-Post-Vergleich erkennbar ist, diese jedoch von den Studierenden tendenziell eher vernachlässigt wurden. So nutzen von 48 Studierenden im Pre-Test 18 Zentrierung, im Post-Test 23 und somit weniger als die Hälfte. Die Eingabe von Text und Zahlen gelingt bereits im Pre-Test nahezu allen Studierenden, sodass hier von einer intuitiven Aneignung gesprochen werden kann, da TKP in der Schulzeit nur von etwa der Hälfte der Studierenden eingesetzt wurde. Die Nutzung von Zellbezügen ist im Pre-Test mit 34 Fällen hingegen weniger oft vertreten und im Post-Test eine deutliche Steigerung auf 45 erkennbar. Diese Steigerung ist auch bei der Nutzung der Diagramm-Funktionalität erkennbar. Allerdings wird diese im Post-Test von ungefähr einem Drittel nicht genutzt.

Die bisher rein deskriptiv beschriebenen Veränderungen der TKP-Variablen bestätigen sich bei der Auswertung der t-Tests als statistisch signifikant. Wie in Tabelle 4 dargestellt, kann ein positiver Einfluss der Intervention festgestellt werden. Die Effekte im Sinne von Cohen's d sind mit knapp über 0.2 alle als klein einzustufen.

Funktionalität	t-Wert	df	p-Wert	Cohen's d
Zentrierung	-1.65	48	0.053	0.24
Fettsatz	-1.70	48	0.048	0.24
Rahmenlinien	-1.97	48	0.027	0.28
Texteingabe	-1.77	48	0.042	0.25
Zahleneingabe	-1.77	48	0.042	0.25
Zellbezug	-1.95	48	0.028	0.28
Graph vorhanden	-1.94	48	0.029	0.28
Diagrammtitel	-1.91	48	0.031	0.27
Achsenbeschriftung	-1.57	48	0.062	0.22

Tabelle 4: t-Tests zu den Variablen der TKP-Aufgaben

Zum 2. Teil liegen 50 vollständige Datensätze vor. Die Variablen zum GeoGebra-Teil des Kompetenztests wurden unter der Maßgabe betrachtet, dass das einmalige Anwenden einer Funktionalität ausreicht, um die Bedienkompetenz nachzuweisen. In Tabelle 5 sind die Ausprägungen im Pre-Post-Vergleich dargestellt. Bereits im Pre-Test konnten alle Studierenden Punkte eingeben. Die Korrektheit der Koordinaten lässt darauf schließen, dass die Anwendung sogar zielgerichtet erfolgt ist.

Kategorie	Funktionalität	Anzahl Pre	Anzahl Post
Achsenbeschriftung	Achsenbeschriftung	24	38
Steigungsdreieck (SD)	SD vorhanden	28	44
	SD selbst konstruiert	6	4
	SD Größe anpassen	15	38
Schieberegler manipulieren	Grenzen	37	45
	Schrittweite	23	35
Farbänderung (FÄ)	FÄ vorhanden	39	47
Besondere Geraden	Orthogonale vorhanden	28	42
	Parallele vorhanden	27	40
Funktionsgleichungen (FG)	FG eingegeben	48	48
Punkte	Punkte erzeugt	50	50
	korrekte Koordinaten	50	50
	Schnittpunkt vorhanden	36	45
Sonstiges	Beschriftung anpassen	18	37
	Anzeige Algebra-Fenster anpassen	30	39

Tabelle 5: Häufigkeiten bzgl. Bedienkompetenz von GeoGebra

Die Eingabe einer Funktionsgleichung gelingt ebenfalls im Pre-Test nahezu allen Studierenden. Die Anpassung von Achsenbeschriftungen (24 zu 38), sonstigen Beschriftungen (18 zu 37) oder der Anzeige im Algebra-Fenster (30 zu 39) hingegen gelingt im Pre-Test weitaus weniger Studierenden und es ist eine Steigerung zum Post-Test erkennbar. Beim Steigungsdreieck (SD) sinkt die Anzahl der selbst konstruierten SD von 6 auf 4 und die Nutzung der softwareseitigen Funktionalität steigt von 28 auf 44. Die Anpassung der Einstellungen des SD gelingt im Post-Test ebenfalls weitaus mehr Studierenden (15 zu 38). Bei der Manipulation des Schiebereglers, Farbänderungen und der Geradentypen Orthogonale und Parallele sind ähnliche Tendenzen sichtbar. Die somit sichtbaren Verbesserungen sollen nachfolgend im Rahmen eines t-Tests sowie durch die Ermittlung von Cohen's d überprüft werden. Die Ergebnisse sind in Tabelle 6 dargestellt. Bei der Eingabe einer Funktionsgleichung sowie dem Erzeugen von Punkten wurde hierauf verzichtet, da sich hier keine Veränderungen ergeben haben.

Funktionalität	t-Wert	df	p-Value	MW Diff.	Cohens d
Achsenbeschriftung	-3.69	49	< 0.001	-0.28	0.52
Steigungsdreieck (SD) vorhanden	-4.11	49	< 0.001	-0.32	0.58
SD selbst konstruiert	0.70	49	0.243	0.04	0.10
SD Größe anpassen	-6.00	49	< 0.001	-0.46	0.85
Grenzen Schieberegler	-2.06	49	0.022	-0.16	0.29
Schrittweite Schieberegler	-2.72	49	0.005	-0.24	0.38
Farbänderung vorhanden	-2.22	49	0.016	-0.16	0.31
Orthogonale vorhanden	-3.09	49	0.002	-0.28	0.44
Parallele vorhanden	-3.26	49	0.0013	-0.26	0.46
Schnittpunkt vorhanden	-2.44	49	0.0093	-0.18	0.34
Beschriftung anpassen	-4.03	49	< 0.001	-0.38	0.57
Anzeige Algebra-Fenster anpassen	-2.91	49	0.003	-0.18	0.41

Tabelle 6: t-Tests zu den Variablen der GeoGebra-Aufgaben

In nahezu allen Fällen kann ein positiver Einfluss der Intervention festgestellt werden. Einzige Ausnahme bildet das selbst konstruierte Steigungsdreieck (SD), wobei die erzielte Abnahme einen erwünschten Effekt darstellt. In den meisten Fällen kann somit wieder von einem kleinen Effekt gesprochen werden. Bei Achsenbeschriftung, SD vorhanden und Beschriftung anpassen ist sogar ein mittlerer bzw. bei SD Größe anpassen ein großer Effekt erkennbar.

Aus den 9 (TKP) bzw. 15 (GeoGebra) Funktionalitäten wurde jeweils ein Gesamtscore gebildet, um die Entwicklung der Bedienkompetenzen insgesamt darzustellen (vgl. Abbildung 6). Neben den absoluten Werten sind die prozentualen Ergebnisse sowie die Ergebnisse des dazugehörigen t-Tests dargestellt. Bei beiden Werkzeugen sind mit $d = 0.61$ (TKP) und $d = 0.92$ (GeoGebra) mittlere bis große Effekte sichtbar.

Auffällig sind die bereits im Pre-Test prozentual höheren Werte sowie eine stärkere Steigerung bei den GeoGebra-Aufgaben.

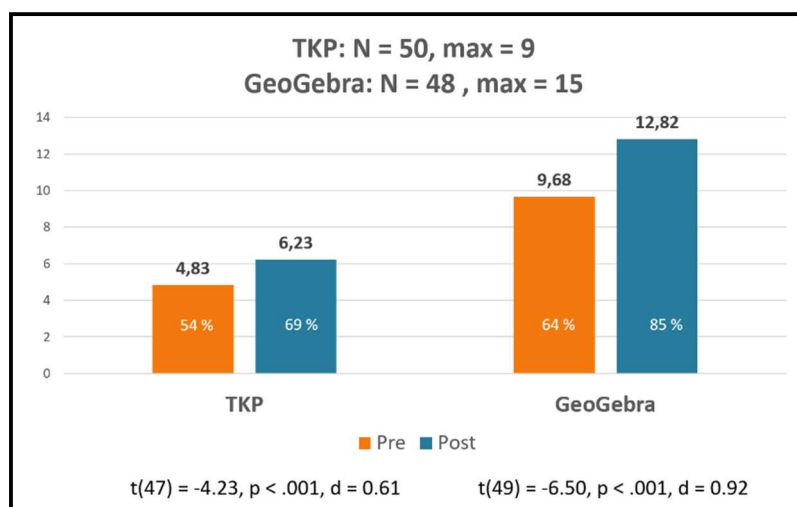


Abbildung 8: Gesamtscores – Kompetenztest Teil 1 und 2

4.2 Auswahlkompetenz TKP und GeoGebra

Nachfolgend werden nun die Ergebnisse des 3. Teils vorgestellt, für den 55 komplette Datensätze vorliegen. In den Diagrammen der Abbildungen 9 bis 11 werden die Ergebnisse der Didaktikaufgabe – Aufgabenteil (a) – deskriptiv mit absoluten Häufigkeiten dargestellt.

In Abbildung 9 ist zu entnehmen, dass in 24 (Pre) bzw. 26 Fällen (Post) GeoGebra als alleiniges Werkzeug präferiert wird. Die Verwendung eines TKP wird in Verbindung mit GeoGebra von jeweils 27 Studierenden als sinnvoll angesehen. Die ausschließliche Verwendung eines TKP ist im Pre- als auch im Post-Test marginal trotz Schulung der *Bedienkompetenzen* während des Seminarbesuchs. Während im Pre-Test 3 Studierende keine Angaben darüber machen konnten, wie man ein TKP und/oder GeoGebra sinnvoll zur Unterstützung einsetzen könnte, war dies im Post-Test erfreulicherweise nicht mehr der Fall.

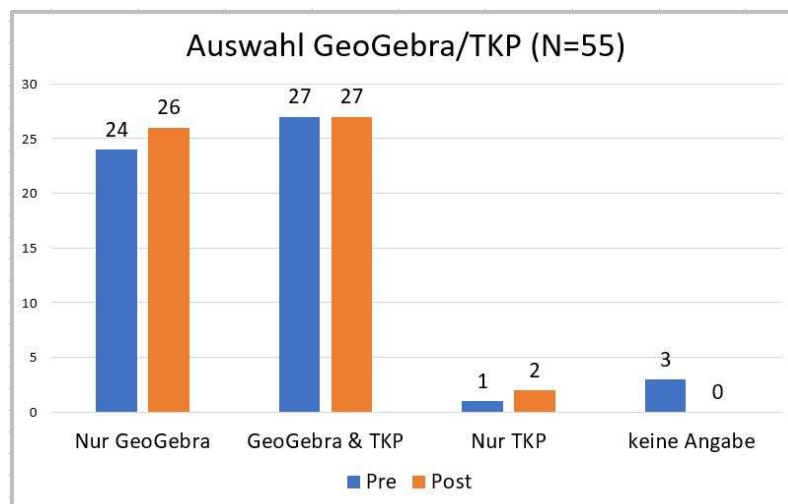


Abbildung 9: Auswahl DMW

Die Möglichkeit, sich Graphen mit GeoGebra über die Eingabe im Algebra-Fenster anzeigen zu lassen, wurde bereits im Pre-Test mit 43 relativ häufig genannt und steigerte sich zum Post-Test hin auf 53 (vgl. Abbildung 10).

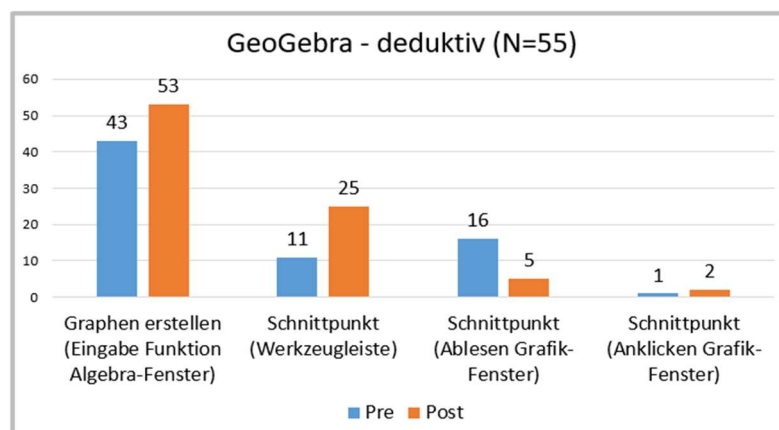


Abbildung 10: Unterstützung mit GeoGebra

Durch die Schulung der Bedienkompetenzen während des Seminars hat die Bedeutung der Werkzeugleiste zur Bestimmung eines Schnittpunktes (Pre 11/Post 25) zugenommen, während das (ungenau) Ablesen eines Schnittpunktes von 16 auf 5 Nennungen deutlich zurückging.

Im Bereich TKP (siehe Abbildung 11) kann man deutliche Zuwächse bei den vier dargestellten deduktiven Kategorien erkennen. Auch hier ist, wie bei GeoGebra, die (ungenau) Möglichkeit Schnittpunkte abzulesen nicht sehr häufig vertreten (Pre 2/Post 8), vermutlich da der Vergleich mit Wertetabellen im ganzzahligen Bereich genauer ist.

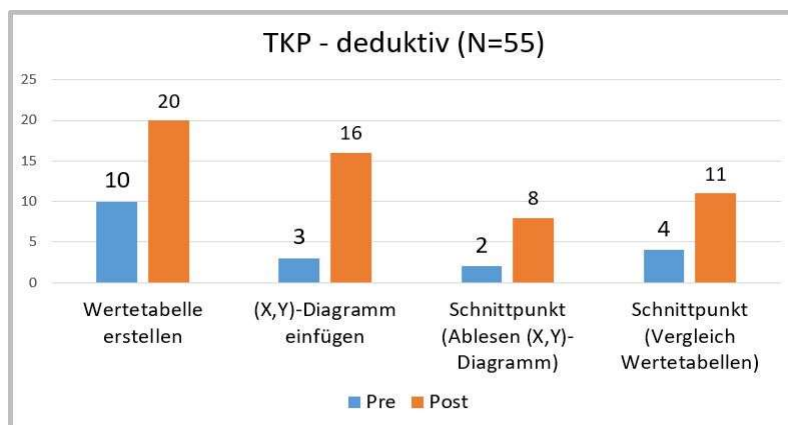


Abbildung 11: Unterstützung mit TKP

5. Zusammenfassung und Ausblick

Auf Grundlage der vorgestellten Ergebnisse lässt sich festhalten, dass durch den Besuch eines fachdidaktischen Seminars mit Fokus auf dem Erwerb von Werkzeugkompetenzen, eben diese gesteigert werden können. GeoGebra ist dabei das präferierte Werkzeug als Unterstützung von Aufgaben im Kontext elementarer Funktionen. Ein TKP wird in den meisten Fällen lediglich als Ergänzung zu GeoGebra gesehen, obwohl messbare Effekte beim Zuwachs der entsprechenden Bedienkompetenzen zu verzeichnen sind.

In beiden Seminaren ist durch die Fokussierung auf den Erwerb von Werkzeugkompetenzen ein positiver Effekt messbar. Aufgrund deren unterschiedlichen Konzeptionen lässt sich auf Basis der vorliegenden Daten jedoch nicht feststellen, ob bestimmte Elemente einen besonderen Einfluss auf den Kompetenzerwerb haben.

Da die Ausgangslage bei den untersuchten Studierenden sehr heterogen war und durch die Intervention nicht bei allen Studierenden im Post-Test alle Bedienkompetenzen nachgewiesen wurden, ist es naheliegend, dass der Einsatz von DMW Teil von mehreren Lehrveranstaltungen sein sollte und eine curriculare Verankerung im Lehramts-Studium erfolgen sollte, um mehr Lernanlässe zu gewährleisten. Langfristiges Ziel sollte es jedoch sein, dass Studierende vor Beginn des Studiums

und somit im Schulunterricht, bereits Werkzeugkompetenzen in dem Umfang erworben haben, dass in den Lehrveranstaltungen ein Fokus auf didaktische Fragestellungen gelegt werden kann.

Neben der Auslagerung des Erwerbs von Bedienkompetenzen könnte hierzu eine thematische Ausweitung von DMW bspw. in der Geometrie oder der Stochastik auf weitere Lehrveranstaltungen dienlich sein, um differenzierte Lerngelegenheiten in allen mathematischen Teilgebieten zu schaffen.

Darüber hinaus ist noch zu untersuchen welche Zusammenhänge zwischen der Selbsteinschätzung und den Ergebnissen des Kompetenztestes bei den Studierenden existieren.

Literatur:

- Cavey, L. O., & Berenson, S. B. (2005). Learning to teach high school mathematics: Patterns of growth in understanding right triangle trigonometry during lesson plan study. *The Journal of Mathematical Behavior*, 24(2), 171–190.
- Dudley, P. (2014). Lesson Study: a handbook.
- Heintz, G., Elschenbroich, H.-J., Laakmann, H., Schacht, F. & Schmidt, R. (2014). Digitale Werkzeugkompetenzen im Mathematikunterricht. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 507–510). Münster: WTM.
- Heintz, G., Körner, H., Pinkernell, G. & Schacht, F. (2016). Basis- und Werkzeugkompetenzen von Klasse 5 bis 12. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016, 50. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 07.03. bis 11.03.2016 in Heidelberg*. Münster: WTM.
- Heintz, G., Elschenbroich, H.-J., Laakmann, H., Langlotz, H., Rüsing, M., Schacht, F., Schmidt, R. & Tietz, C. (2017). *Werkzeugkompetenzen – Kompetent mit digitalen Werkzeugen Mathematik betreiben*. Neuss: Verlag K. Seeberger.
- Heugl, H. (2014). *Mathematikunterricht mit Technologie: Ein didaktisches Handbuch mit einer Vielzahl an Aufgaben*. Linz: Veritas.
- Hillmayr, D., Reinhold, F., Ziernwald, L. & Reiss, K. (2017). *Digitale Medien im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht der Sekundarstufe. Einsatzmöglichkeiten, Umsetzung und Wirksamkeit*. Münster: Waxmann.
- (KMK) Sekretariat der ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2004). *Beschlüsse der Kultusministerkonferenz. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*.
- (KMK) Strategie der Kultusministerkonferenz (2016): Bildung in der digitalen Welt.
- (KMK) Kultusministerkonferenz (2022). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA)*.
- Kerres, M. (2018). Mediendidaktik. De Gruyter.
- Kunter, M. & Baumert, J. (2006). Das Kompetenzmodell von COACTIV. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Hrsg.) (2011), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften: Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* (S. 32). Münster [u.a.]: Waxmann.

- Leuders, T. & Prediger, S. (2005): Funktioniert's? Denken in Funktionen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 47(2), 1-7.
- Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken*. Beltz.
- MBWJK (Ministerium für Bildung, Wissenschaft, Jugend und Kultur) Rheinland-Pfalz (Hrsg.) (2007). *Rahmenlehrplan Mathematik (Klassenstufen 5-9/10)*.
- Mishra, P., & Koehler, M.J. (2006). *Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge*. *Teachers College Record*, 108(6), 1017-1054.
- Rögler, P. (2014). Überzeugungen von Mathematiklehrkräften als Basis zur Entwicklung von Lehrerfortbildung zu Technologien im Unterricht. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014: Beiträge zur 48. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 10. bis 14. März 2014 in Koblenz* (Bd. 2, S. 983–986). Münster: WTM.
- Thurm, D., Klinger, M., Barzel, B. & Rögler, P. (2017). Überzeugungen zum Technologieeinsatz im Mathematikunterricht: Entwicklung eines Messinstruments für Lehramtsstudierende und Lehrkräfte. *Mathematica didactica* 40(1), 19–35.
- Thurm, D. (2020). *Digitale Werkzeuge im Mathematikunterricht integrieren. Zur Rolle von Lehrerüberzeugungen und der Wirksamkeit von Fortbildungen*. Wiesbaden: Springer Fachmedien.
- Vollrath, H.-J. & Roth, J. (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe. Mathematik Primar- und Sekundarstufe*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- Weber, C., Soukup-Altrichter, K. & Posch, P. (2020). Lesson Studies in der Lehrerbildung – Ein Überblick. In K. Soukup-Altrichter, G. Steinmair & C. Weber (Hrsg.), *Lesson Studies in der Lehrerbildung - Gemeinschaftliche Planung und Evaluation von Unterricht im Lehramtsstudium* (S. 7-45). Springer VS.
- Weigand, H.-G. & Weth, T. (2002): *Computer im Mathematikunterricht. Neue Wege zu alten Zielen*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- Weinert, F. E. (2001): Vergleichende Leistungsmessung in Schulen – Eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In: Weinert, Franz E. (Hrsg.): *Leistungsmessungen in Schulen*. Weinheim u. Basel, S. 27 f.

Frederik Dilling, Kathrin Holten, Kevin Hörnberger, Rebecca Schneider & Ingo Witzke

Universität Siegen, dilling@mathematik.uni-siegen.de

Entwicklung einer Fortbildungsstruktur zum Einsatz digitaler Medien im Mathematikunterricht – ein Werkstattbericht

Der vorliegende Werkstattbericht stellt die Fortbildungsstruktur im Projekt Digi-Math4Edu zum Einsatz digitaler Medien im Mathematikunterricht dar. Diese basiert auf zwei Säulen: Die erste Säule beinhaltet verschiedene Formate an Fortbildungsveranstaltungen von einer Fortbildungsreihe, über zentrale Fortbildungstage bis hin zu Miniworkshops an Schulen. In der zweiten Säule findet eine von Lehrer:innen durchgeführte und von Student:innen begleitete Erprobung der Medien im Unterricht statt.

1. Motivation

Der Einsatz digitaler Medien im Unterricht findet zunehmend statt und bietet vielfältige Potentiale für die Bereicherung mathematischer Lehr-Lernprozesse. Mit dem Einsatz kommen auf Lehrpersonen aber auch viele verschiedene neue Herausforderungen zu. So fordert beispielsweise die Strategie der Kultusministerkonferenz zur „Bildung in der digitalen Welt“, dass „Lehrkräfte digitale Medien in ihrem jeweiligen Fachunterricht professionell und didaktisch sinnvoll nutzen sowie gemäß dem Bildungs- und Erziehungsauftrag inhaltlich reflektieren können“ (KMK, 2016, S. 25). Die Komplexität der hiermit verbundenen Aufgaben zeigt sich in diesem Strategiepapier sehr deutlich: Insbesondere sollen Lehrende die eigene allgemeine Medienkompetenz kontinuierlich weiterentwickeln. Lehrende sollen unter anderem in der Lage sein, medienerzieherisch wirksame Konzepte zu entwickeln und anzuwenden, den adäquaten Einsatz digitaler Medien und Werkzeuge zu planen, durchzuführen und zu reflektieren und digitale Medien zur individuellen Förderung zu nutzen. Sie sollen selbst geeignete Materialien und Programme identifizieren und auswählen, die das Lernen mit und Gestalten von Medien unterstützen. Außerdem sollen sie mit Kolleg:innen und anderen Expert:innen zusammenarbeiten, sich mit Ergebnissen aktueller Forschung in diesem Bereich befassen sowie Urheberrecht, Datenschutz und Jugendschutz beachten (S. 26–28).

Um diesen Herausforderungen begegnen zu können, müssen angehende wie auch praktizierende Mathematiklehrer:innen ihre professionellen Kompetenzen im Umgang mit digitalen Medien und deren gezielten Einsatz in Lehr-Lernprozessen eigeninitiativ entwickeln bzw. weiterentwickeln. Der sogenannten dritten Phase der Lehrer:innenbildung, der Fort- und Weiterbildung von praktizierenden Lehrer:innen, kommt in diesem Bereich eine bedeutende Rolle zu. Dies liegt insbesondere an der Eigenschaft der Digitalisierung, die wie Eickelmann (2019) betont, durch

rasante Veränderungen geprägt ist. Niemand könne vorhersagen, welche Kompetenzen in ein paar Jahren gebraucht werden, sodass die Lehramtsausbildung nur den Grundstein für die spätere Kompetenzentwicklung legen könne. Insgesamt lässt sich laut Eickelmann et al. (2016) ein hoher Bedarf an Fortbildungen im Zusammenhang mit der Digitalisierung feststellen.

Der vorliegende Beitrag befasst sich am Beispiel des Fachs Mathematik mit der Frage, wie eine sinnvolle Struktur für die Fortbildung von Lehrkräften im Kontext der Digitalisierung aussehen könnte. Hierzu wird beispielhaft das Projekt Digi-Math4Edu beschrieben, in welchem zentrale Fortbildungsveranstaltungen mit einer unmittelbaren Unterstützung vor Ort in den Schulen kombiniert werden. Vor dem Hintergrund aktueller Forschungsbefunde zur Gestaltung von Lehrer:innenfortbildungen sowie konkreter empirischer Erhebungen im Projekt soll erörtert werden, inwiefern sich daraus Chancen zur Professionalisierung der Lehrer:innen ergeben. Die Beschreibungen und Erkenntnisse sind als Werkstattbericht zu verstehen, welche auf den konkreten Erfahrungen im Projekt und ersten Auswertungen erhobener Daten basieren, allerdings nicht den Anspruch einer Verallgemeinerbarkeit oder Vergleichbarkeit haben.

2. Aktuelle Forschungsbefunde zur Teilnahme von Lehrer:innen an Fortbildungen

Die Fortbildung von Lehrer:innen in Deutschland wird rechtlich durch die einzelnen Bundesländer geregelt und verantwortet. In allen Bundesländern besteht eine allgemeine gesetzliche Pflicht zur kontinuierlichen Fortbildung, wenngleich sich die konkrete Ausgestaltung dieser Regelung zum Teil deutlich unterscheidet (Kuschel et al., 2020). Häufig wird bemängelt, dass die Fortbildung von Lehrkräften im Vergleich zur universitären und unterrichtspraktischen Ausbildung eine „Nebenrollenfunktion“ habe und beispielsweise auf deutlich weniger Ressourcen zurückgreifen könne (Heinemann, 2019).

Die Teilnahme von Lehrkräften in Deutschland an Fortbildungen wird regelmäßig in den Bildungstrends des Instituts zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) erhoben – für die Fächer Mathematik und Naturwissenschaften in der Sekundarstufe I zuletzt im Jahr 2018 (Stanat et al., 2019). Dabei wurde festgestellt, dass der Mittelwert der von den 5449 untersuchten Lehrkräften besuchten Veranstaltungen in den zwei zurückliegenden Schuljahren bei 2,5 besuchten Veranstaltungen pro Lehrperson mit einer hohen Standardabweichung von 1,8 liegt. Die Teilnahmequote lag bei 83,9 %, wobei etwa die Hälfte dieser Personen lediglich an 1-2 Veranstaltungen teilgenommen haben.

Damit ist die Teilnahmequote von Lehrkräften an Fortbildungen insgesamt als gering zu bewerten. Insbesondere gibt es eine große Gruppe von Lehrkräften, die gar nicht oder nicht regelmäßig an Fortbildungen teilnimmt. Dies lässt sich auf verschiedene Barrieren zurückführen, die Richter et al. (2018) in einer quantitativen Studie untersucht haben. Demnach sorgen vor allem arbeits- bzw. schulbedingte

Aspekte, die mangelnde Qualität des Fortbildungsangebots und ein Disengagement bei den Lehrkräften für die Nichtteilnahme an Fortbildungen. Weniger relevant scheinen die Faktoren Familie und Kosten zu sein. Schultis (2019) führt die in verschiedenen Studien herausgearbeiteten Hürden der Teilnahme an Lehrkräftefortbildungen zusammen und weist diese mit Bezug auf Florian (2008) drei Gruppen von Hürden zu: veranstaltungsbedingte Hürden (z.B. unattraktives Fortbildungsangebot, mangelnde Qualität der Angebote, zu geringe Kapazitäten, zu weite Entfernungen zu den Veranstaltungsorten), schulische Barrieren (z.B. Ausfall des Unterrichts, schlechtes Gewissen gegenüber vertretenden Kolleg:innen, fehlende Würdigung von Fortbildungsbesuchen, hohe berufliche Belastung) und private Hintergründe (z.B. starke familiäre Auslastung, Betreuungsbedarf der eigenen Kinder). Neben diesen drei Gruppen stellt laut Schultis (2019) die Motivation und die Einstellung der Lehrpersonen einen wichtigen Faktor dar.

Neben klassischen Fortbildungsveranstaltungen spielen laut aktueller Forschung auch Formen des informellen Lernens eine bedeutende Rolle bei der Professionalisierung von Lehrer:innen (Rzejak et al., 2020). Diese sind bisher allerdings nur wenig untersucht, auch weil sie sich im schulischen Alltag abspielen und methodisch nur schwer zugänglich sind. Aus Sicht der Autor:innen dieses Beitrags sind solche Lernformen mit besonderen Herausforderungen verbunden, da sie meist wenig systematisch erfolgen und nicht begleitet werden, sodass die Qualität nicht gesichert werden kann. Eine ganzheitliche Fortbildungsstruktur sollte diese Form der Professionalisierung allerdings mitbedenken – gerade, wenn es um das Thema Digitalisierung geht.

In Bezug auf die Digitalisierung hat Eickelmann (2019) verschiedene Handlungsempfehlungen an die Bildungspolitik für die Entwicklung eines Fortbildungssystems formuliert. Hierin betont sie die Bedeutung der Verknüpfung von Inhalt und Methode sowie der Schaffung von adressatenorientierten und prozessbegleitenden Angeboten. Die Angebote sollten das Spannungsfeld zwischen Basiskompetenzen und Innovationen sowie die Spezifika der einzelnen Schulformen und -stufen berücksichtigen. Es sollten Strukturen der Vernetzung und Kooperation auf regionaler Ebene genutzt werden, aber auch bundesländerübergreifende Angebote entwickelt und die Akteure im Fortbildungssystem professionalisiert werden. Der Fokus sollte auf einem sukzessiven Kompetenzaufbau über die Phasen der Lehrer:innenbildung hinweg liegen. Dabei sollten auch innovative Formen der Fortbildung einbezogen, klassische Fortbildungsveranstaltungen aber nicht abgeschafft werden.

Die in diesem Beitrag vorgestellte Fortbildungsstruktur des Projekts DigiMath4Edu greift wesentliche Aspekte dieser Forderungen auf und zeigt, wie die Professionalisierung von Lehrkräften ganzheitlich gedacht werden kann.

3. Die Fortbildungsstruktur im Projekt DigiMath4Edu

Die Grundidee des Projektes DigiMath4Edu der Fachgruppe für Mathematikdidaktik der Universität Siegen ist, eine wissenschaftlich begleitete Kompetenzentwicklung von Mathematiklehrpersonen in Bezug auf den Einsatz digitaler Medien

im Unterricht anzuregen. Über einen Zeitraum von drei Jahren nahmen 15 Schulen unterschiedlicher Schulformen an dem Projekt teil. Das Projekt wurde zu großen Teilen durch das Ministerium für Kultur und Wissenschaft sowie das Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen gefördert. Zusätzliche Förderer waren zwölf regionale Unternehmen, drei Unternehmensverbände und drei Sparkassen. An den Projektschulen traten des Weiteren die Schulträger als Fördergeber für eine umfassende Ausstattung mit den im Projekt einzusetzenden digitalen Medien auf. Das Projekt wurde im Rahmen der Regionale Südwestfalen 2025 ausgezeichnet.

Die Fortbildungsstruktur in DigiMath4Edu basiert im Wesentlichen auf zwei Säulen (siehe Tabelle 1). Die erste Säule besteht aus Fortbildungsveranstaltungen, von denen im Projekt unterschiedliche Formate angeboten wurden:

1. Fortbildungsreihe mit mehreren halb- bis eintägigen Einzelveranstaltungen
2. Fortbildungstag mit mehreren zweistündigen Workshops
3. Mini-Workshops von etwa 30-60 Minuten in den Schulen

(zu i) Eine Fortbildungsreihe wurde im ersten und zweiten Projektjahr durchgeführt. In den insgesamt 24 Veranstaltungen wurden zum Beispiel das Problemlösen in der Geometrie mit GeoGebra, der Einsatz von Tablets im Mathematikunterricht der Grundschule, das Programmieren mit Scratch, die Verwendung von CAD-Software sowie 3D-Druck und die Nutzung von Augmented und Virtual Reality behandelt. Während einzelne Veranstaltungen spezifische Schulformen in den Blick genommen haben, waren andere schulformübergreifend angelegt. Ebenso wurde in bestimmten Veranstaltungen eine Unterteilung in Einsteiger und Fortgeschrittene in Bezug auf die Vorerfahrungen mit den betreffenden Medien vorgenommen. Die einzelnen Veranstaltungen fanden an unterschiedlichen Wochentagen über einen Zeitraum von mehreren Monaten statt und wurden aufgrund der damals geltenden Corona-Beschränkungen teilweise vor Ort an der Universität Siegen oder in einem Online-Format von wissenschaftlichen Mitarbeiter:innen im Projekt durchgeführt. Der Fokus der Veranstaltungen lag auf einer allgemeinen Einführung der Medien, einer fachdidaktischen Einbettung der Nutzungsszenarien, einer Hands-on Erprobung sowie dem Aufzeigen von Einsatzmöglichkeiten an Fachinhalten im Mathematikunterricht.

(zu ii) Zentrale Fortbildungstage mit verschiedenen zweistündigen Workshops wurden zu Beginn des zweiten und dritten Projektjahres sowie in der Mitte des dritten Projektjahres angeboten und fanden in Präsenz an der Universität Siegen statt. Die Fortbildungstage beinhalteten eine allgemeine Einführung durch einen Expert:innenvortrag. Anschließend konnten drei Workshops aus einem Angebot von insgesamt neun Workshops ausgewählt und besucht werden. Die Workshops haben ähnliche Themen wie die Fortbildungsreihen abgedeckt und wurden ebenfalls von wissenschaftlichen Mitarbeiter:innen durchgeführt. Im Vergleich zu den halb- bis ganztägigen Veranstaltungen konnte hier weniger Zeit für die eigene Erprobung der Medien und die fachdidaktische Einbettung aufgebracht werden.

(zu iii) Die Mini-Workshops von etwa 30 bis 60 Minuten fanden insbesondere im zweiten und dritten Projektjahr vor Ort an den Schulen statt. Sie wurden von wissenschaftlichen Mitarbeiter:innen gemeinsam mit Studierenden konzipiert und zielten insbesondere auf eine erste Hands-on Erprobung ab. Mini-Workshops wurden beispielsweise zu den Themen 3D-Druck, Augmented und Virtual Reality sowie Escape Games durchgeführt. Im Gegensatz zur Fortbildungsreihe und den Fortbildungstagen wurden die Mini-Workshops von Studierenden durchgeführt. Als Zeitfenster wurden beispielsweise Mittagspausen oder Freistunden von einzelnen Personen genutzt.

Die zweite Säule der Fortbildungsstruktur im Projekt bildet die individuelle Beratung und Begleitung bei der Planung und Umsetzung von Mathematikunterricht mit digitalen Medien vor Ort in den Schulen durch sogenannte „Unterrichtsassistent:innen für Digitalisierung“ (kurz UAs). Bei den UAs handelt es sich um ausgewählte Lehramtsstudierende höheren Semesters, die in Ergänzung zu den in ihrem Studium aufgebauten Kompetenzen, in spezifischen Veranstaltungen für ihre Tätigkeit im Projekt ausgebildet wurden und im Rahmen eines studentischen Arbeitsverhältnisses beschäftigt sind. Jede Schule wurde über ein Jahr hinweg kontinuierlich von zwei UAs unterstützt.

Die Betreuung der UAs erfolgte durch ein Team aus wissenschaftlich sowie schulpraktisch erfahrenen Mitarbeiter:innen der Fachgruppe Didaktik der Mathematik. Insbesondere über die UAs erfolgte damit ein kontinuierlicher Austausch zwischen den Lehrpersonen an den Schulen und dem Projektteam der Universität.

Fortbildungsveranstaltungen: Praktische Einführung der Medien Fachdidaktische Hintergründe Impulse für die Nutzung im Unterricht Wecken von Interesse und erste eigene Versuche	Begleitete Umsetzung: Entwicklung und Durchführung eigener Unterrichtsvorhaben Individuelle Beratung und Begleitung Langfristige Weiterentwicklung der professionellen Kompetenzen

Tabelle 1: Überblick über die zwei Säulen der Fortbildungsstruktur im Projekt DigiMath4Edu

3.1. Allgemeine Einführung – Fortbildungsveranstaltung

Um die Fortbildungsveranstaltungen im Projekt (Säule 1) an die Erwartungen der Lehrer:innen anzupassen, wurden verschiedene wissenschaftliche Erhebungen und Evaluationen durchgeführt. So wurden in einer ersten offenen Fragebogenstudie zu Beginn des Projekts die Bedarfe und Wünsche der Lehrer:innen festgehalten (siehe Dilling et al., 2022). In einer zweiten Fragebogenstudie, die im Rahmen des zentralen Fortbildungstags zu Beginn des zweiten Projektjahres durchgeführt wurde, wurden zudem durch offene Fragen spezifisch die Erwartungen an Fortbildungsveranstaltungen zum Einsatz digitaler Medien im Mathematikunterricht erhoben. Die Antworten der Teilnehmer:innen wurden mit MAXQDA kodiert und

unter verschiedenen Oberkategorien zusammengefasst. Die drei wichtigsten Oberkategorien sollen im Folgenden kurz vorgestellt werden. Die erste Oberkategorie bezieht sich auf die Qualitätskriterien für gute Fortbildungen aus Sicht der Teilnehmer:innen. Hierbei kommen sehr häufig Aussagen, welche die Praxistauglichkeit und Authentizität sowie die nachhaltige Nutzbarkeit der vorgestellten Ansätze hervorheben. Eine Lehrperson antwortete beispielsweise auf die Frage, was für sie eine gute Fortbildung ausmacht, das Folgende:

„Anwendbare Ergebnisse, die man mit nach Hause nehmen bzw. in den Unterricht nehmen kann.“

Andere Antworten heben den Aktivierungsgrad einer Veranstaltung hervor und nennen den Begriff „Hands-on“. Auch die Professionalität der durchführenden Personen wird als Qualitätskriterium genannt. Schließlich formulieren einige Teilnehmer:innen auch einen wenig spezifischen allgemeinen Qualitätsanspruch an Fortbildungen.

Die zweite Oberkategorie betrifft spezifische Qualitätsmerkmale von Fortbildungen zum Einsatz digitaler Medien im Unterricht. Wichtig ist den Teilnehmer:innen die Klärung von technischen Voraussetzungen. Außerdem wünschen sie sich, dass auf einer Veranstaltung nicht nur eines, sondern mehrere digitale Medien vorgestellt werden. In Bezug auf die Strukturierung der Veranstaltung ist den Teilnehmer:innen die Vernetzung von Theorie und Praxis besonders wichtig. Außerdem schlagen einige Personen konkretere Vorgehensweisen vor, die sich mit „Medienvorstellung – Didaktischer Hintergrund – Hands-on Erprobung – Reflexion“ zusammenfassen lassen. Beispielsweise schreibt eine Person:

„1. Einführung, 2. Präsentation von digitalen Tools und Medien, 3. Didaktische Konzepte und Methoden, 4. Praxisbeispiele und Übungen, 5. Diskussion und Austausch, 6. Zusammenfassung und Abschluss“

Die von den Teilnehmer:innen der Studie genannten Qualitätskriterien von Fortbildungen im Allgemeinen sowie mit konkretem Bezug zu digitalen Medien bieten eine gute Grundlage für die Entwicklung bzw. Weiterentwicklung der Fortbildungsveranstaltungen im Projekt DigiMath4Edu. Sie decken sich in weiten Teilen mit den in der Fortbildungsforschung bekannten Merkmalen wirksamer Fortbildungen. Beispielsweise nennen Lipowsky und Rzejak (2017) die Verschränkung von Input-, Erprobungs- und Reflexionsphase als wichtiges Merkmal. Die DZLM-Gestaltungsprinzipien sprechen unter anderem von Fallbezug und meinen hiermit das Aufgreifen der Praxiserfahrungen der Lehrpersonen (Barzel & Selter, 2015).

Die Teilnehmer:innen der Studie wurden auch gefragt, welche Maßnahmen zu einer größeren Fortbildungsteilnahme innerhalb der Lehrerkollegien führen könnten. Die Antworten auf diese Frage bilden die dritte Oberkategorie. Die Lehrer:innen nennen unter anderem die Punkte Entlastung im Schulalltag, Praxistauglichkeit und Nachhaltigkeit, Transparenz, Ortsnähe, Attraktivität der Themen und die

Vermeidung der Wahrnehmung als zusätzliche Belastung. Eine Beispiel-Antwort in den Fragebögen war die folgende:

„Vormittagsveranstaltungen :), Problemlose Unterrichtsfreistellung durch Schulleitung, Fortbildungsinhalte gewinnbringend für eigenen Unterricht“

Damit wird in dem Fragebogen im Wesentlichen der Abbau von den Hürden genannt, die Schultis (2019) aufzählt (z.B. unattraktives Fortbildungsangebot, zu weite Entfernungen zu den Veranstaltungsorten, hohe berufliche Belastung). Diese Hürden wurden bei der Planung der Fortbildungen im Projekt bewusst adressiert, indem beispielsweise ein sehr breites Programm angeboten wurde, um für jede Person attraktive Themen bereitzustellen. Die Miniworkshops wurden zudem vor Ort in den Schulen durchgeführt, um den Aufwand beispielsweise durch Entfallen der Anreise zu reduzieren.

3.2 Individuelle Umsetzung und Begleitung in den Schulen

Die Integration der digitalen Medien in den Mathematikunterricht an den Projektschulen (Säule 2) fand, wie oben bereits erläutert, unter Begleitung von speziell geschulten Studierenden, sogenannten UAs, statt. Die Zusammenarbeit der Lehrer:innen und der UAs wurde unter anderem in einer Interviewstudie am Ende des ersten Projektjahres qualitativ untersucht (Dilling, 2024). Die Kodierung von 23 Interviews mit Lehrer:innen und UAs hat zur induktiven Entwicklung von elf Kategorien geführt, welche die Aufgabenverteilung und Interaktionen in den Teams beschreiben (Tabelle 1).

Unterrichts- assistent:innen	C1:	Technische Einführung für Lehrer:innen
	C2:	Bereitstellung von Ideen zur fachspezifischen Technologienutzung
	C3:	Gestaltung von Teilen des digitalen Unterrichts
	C4:	Technische Unterstützung von Lehrer:innen und Schüler:innen im Unterricht
Lehrer:innen	C5:	Professionelle:r Austauschpartner:in
	C6:	Verantwortlich für die Vorbereitung des Unterrichts
	C7:	Durchführung der Unterrichtsstunde
	C8:	Fokus auf Unterrichtsstruktur, Methodik und Inhalte
Allgemein	C9:	Lernen zum Einsatz digitaler Medien
	C10:	Unterstützung nimmt mit der Zeit ab
	C11:	Unterstützung variiert je nach Lehrer:in

Tabelle 2: Kategorien zur Aufgabenverteilung zwischen Lehrer:innen und Unterrichtsassistent:innen

Eine der Hauptaufgaben der UAs besteht in der technischen Einführung der digitalen Medien für die Lehrer:innen (C1). Eine Unterrichtsassistentin beschrieb diesen Teil ihrer Aufgabe wie folgt:

„Wir haben den Lehrern gezeigt, wie man damit umgehen kann, was man damit machen kann. Wir haben die Funktionen analysiert, denen gezeigt, wie sie mit den einzelnen Funktionen umgehen. Beispielsweise Tinkercad-Klassen, wie man das einrichtet, wie man den Schülern die Zugänge gibt, welche Ansichten die Schüler haben.“

Neben der technischen Einführung entwickeln die UAs auch Ideen für den Einsatz digitaler Medien für das mathematische Lernen und präsentieren diese den Lehrer:innen (C2). Dieser Teil der Arbeit wurde von einer Lehrerin wie folgt beschrieben:

„Beratung nach dem Motto: ‚Was kann ich denn jetzt zu dem Thema digital machen?‘ [...] Dort haben Sie mir dann Beispiele nennen können, mich beraten, was kann ich mit dem iPad machen, was kommt bei dem Thema vielleicht sogar mit dem 3D-Drucker in Frage.“

In den Interviews wurde auch deutlich, dass die UAs gezielt recherchieren, z.B. nach geeigneten Medien und Werkzeugen zur Umsetzung bestimmter mathematischer Themen. Auf der Grundlage der generierten Ideen entwerfen sie auch Teile des digitalen Unterrichts (C3), wie es ein Lehrer aus dem Projekt beschrieben hat:

„Die haben super viele Erklärvideos erstellt für die Schüler, für uns natürlich auch. Haben Anleitungen geschrieben, mit denen die Schüler jetzt Schritt für Schritt mit GeoGebra arbeiten können. Das war wirklich sehr professionell.“

Die UAs waren des Weiteren an der Umsetzung des digitalen Unterrichts beteiligt, indem sie die Schüler:innen und die Lehrer:innen während des Unterrichts technisch unterstützten (C4). Eine UA beschreibt die Motivation hierfür folgendermaßen:

„Wenn sie sich überfordert fühlten oder sich das nicht zutrauten, haben die mich immer gefragt, ob ich mit dabei bin, ob ich helfen kann.“

Eine letzte wichtige Rolle, welche die UAs in der Zusammenarbeit mit den Lehrer:innen übernommen haben, ist die der professionellen Austauschpartner:innen (C5). Ein Lehrer erklärt hierzu Folgendes:

„Man konnte im Unterricht die Schülerinnen und Schüler auch beobachten [...] und ja die Unterrichtsassistentinnen waren ja Lehramtsstudierende relativ am Ende ihres Studiums, sodass man da auch gut Gespräche über

Didaktik, Methodik über Modellieren in Mathe, über Leistungsüberprüfung, über alles Mögliche führen konnte und das war ein fruchtbarer Austausch.“

Die Aufgaben der Lehrer:innen innerhalb der Zusammenarbeit wurden in den Interviews weniger detailliert beschrieben, was vermutlich darauf zurückzuführen ist, dass diese den normalen Aufgaben von Mathematiklehrer:innen recht nahe kommen. Vier Kategorien beziehen sich auf die Aufgaben der Lehrer:innen. In allen Interviews wurde deutlich, dass diese für die Vorbereitung des Unterrichts verantwortlich bleiben (C6) und diesen auch weitgehend selbstständig durchführen (C7). Die Unterstützung im Bereich der digitalen Technologien ermöglicht es den Lehrer:innen, sich auf die Unterrichtsstruktur sowie die methodische und mathematische Gestaltung des Unterrichts zu konzentrieren (C8). Eine letzte wesentliche Aufgabe der Lehrer:innen ist das Lernen zum Einsatz digitaler Technologien im Mathematikunterricht (C9).

In den Interviews wurden zudem einige Aussagen gemacht, welche sich auf die Zusammenarbeit bzw. die Unterstützung im Gesamten beziehen. So haben einige Personen, insbesondere UAs angegeben, dass die Unterstützung mit der Zeit abgenommen habe (C10). Während zu Beginn der Zusammenarbeit noch viele Aufgaben von den UAs durchgeführt wurden, haben die Lehrer:innen zunehmend auch selbst Ideen entwickelt und diese eigenständig umgesetzt. Dies spricht für einen gewissen Lernprozess auf Seiten der Lehrer:innen. Da die UAs mit mehr als einem/r Lehrer:in kollaboriert haben, konnten sie auch einen Vergleich zwischen den einzelnen Personen vornehmen. Dabei haben sie festgestellt, dass sich die Form der Unterstützung, also die Intensität, aber auch die Aufgaben in der Zusammenarbeit, zwischen den einzelnen Lehrer:innen teilweise deutlich unterscheidet. Dies ist vermutlich auf die unterschiedlichen Vorerfahrungen und Motivationen im Umgang mit den digitalen Medien zurückzuführen.

Insgesamt konnte die Aufgabenverteilung innerhalb der Zusammenarbeit auf der Grundlage der Interviews gut rekonstruiert werden. Die UAs haben unterstützende Aufgaben bei der Planung und Durchführung des Unterrichts. Die Lehrer:innen sind dagegen für die Unterrichtsstunde verantwortlich. Die Unterstützung durch die UAs ermöglicht es ihnen, sich auf wesentliche Elemente des Unterrichts zu konzentrieren, stetig Neues zum Einsatz digitaler Medien zu lernen und sukzessive zu übernehmen.

4. Fazit und Ausblick

Die Fortbildungsstruktur im Projekt DigiMath4Edu baut, wie oben beschrieben, auf zwei Säulen auf: Fortbildungsveranstaltungen und begleitete Umsetzung. Diese Säulen haben jeweils unterschiedliche Ziele. Die Fortbildungsveranstaltungen dienen insbesondere dazu, die digitalen Medien praktisch einzuführen, fachdidaktische Hintergründe bereitzustellen, Beispiele für die Nutzung aufzuzeigen

und schließlich Motivation für die weitere Beschäftigung hervorzurufen. Die tatsächliche Weiterentwicklung der Kompetenzen im Umgang mit den Medien soll dann in der begleiteten Umsetzung erfolgen, indem eigene Unterrichtsvorhaben entwickelt und durchgeführt werden und dabei individuell beraten wird.

Aus der Sicht der teilnehmenden Lehrer:innen im Projekt ist insbesondere die zweite Säule, also die Unterstützung durch die UAs der entscheidende Aspekt der Fortbildungsstruktur. Dies wurde in ausnahmslos jedem Abschlussinterview der drei Projektjahre betont. Prototypisch lässt sich die folgende Antwort eines Projektlehrers an einem Gymnasium auf die Frage aufführen, welche Komponente besonderen Einfluss auf seine persönliche Weiterentwicklung in Bezug auf digitale Medien im Mathematikunterricht hatte:

„Also ganz klar die Unterrichtsassistentinnen. [...] Das war wirklich der Teil von dem Projekt, den ich auch jetzt stark vermissen werde, auch wenn Sie uns zur Selbstständigkeit erzogen haben, aber das war einfach toll.“

Die Lehrer:innen waren mit der Unterstützung durch die UAs uneingeschränkt zufrieden, wobei aus den Interviews keine Aussage darüber gemacht werden kann, ob die Unterstützung tatsächlich sinnvoll war und einen positiven Einfluss auf die Mediennutzung der Lehrer:innen hatte.

Die Fortbildungsveranstaltungen wurden von den Lehrer:innen ebenfalls positiv bewertet, wobei diesen eher eine untergeordnete Rolle im Projekt zugeschrieben wurde. Betrachtet man die Anzahl der Teilnehmer:innen bei den Veranstaltungen, lässt sich dies auch bestätigen. Die Fortbildungsreihen in den ersten zwei Jahren wurden meist nur von wenigen Lehrer:innen besucht. Die in Abschnitt 3.1 angesprochenen Hürden schienen dem wahrgenommenen Nutzen zu überwiegen. Außerdem könnte es sein, dass die Lehrer:innen durch die Vielzahl der im Projekt angebotenen Lerngelegenheiten nicht mehr den Bedarf an weiteren Fortbildungen gesehen haben und ein gewisser Sättigungseffekt aufgetreten ist. Die zentralen Fortbildungstage mit mehreren kurzen Workshops und die Miniworkshops vor Ort an den Schulen haben deutlich mehr Teilnehmer:innen angesprochen. Dies könnte daran liegen, dass sich diese Formate leichter in den Schulalltag integrieren lassen. Diese auch mit dem Begriff „One-Shot“ bezeichneten Kurzveranstaltungen werden in der Fortbildungsforschung kritisch gesehen, da sie in den meisten Fällen keine Wirkung haben (Lipowsky & Rzejak, 2017). Die Kurzveranstaltungen aus diesem Beitrag sollten allerdings nicht getrennt von den anderen Komponenten der Fortbildungsstruktur, insbesondere der von den UAs begleiteten Umsetzung betrachtet werden und dienen insbesondere dem Wecken von Interessen und dem Setzen erster inhaltlicher Impulse.

Insgesamt setzt das Projekt DigiMath4Edu viele der von Eickelmann (2019) formulierten Handlungsempfehlungen für die Entwicklung eines Fortbildungssystems um, indem sowohl klassische Formate als auch innovative Formen der Fortbildung und Vernetzung eingeflossen sind. Die zweigeteilte Fortbildungsstruktur

des Projekts DigiMath4Edu hat sich als gewinnbringend erwiesen. Dies zeigen unsere eigenen Erfahrungen sowie die Reflexionen der beteiligten Mathematiklehrer:innen und der Unterrichtsassistent:innen. Die Kombination der beiden Säulen wurde als sich sinnvoll ergänzend wahrgenommen:

„Also im Prinzip hatten wir ja durch die Fortbildungen so einen Wechsel drin. Ich würde sagen, die Unterrichtsassistentinnen die haben immer so tagesaktuell reagiert und auf die konkreten Bedürfnisse der Lehrer sind die dann eingegangen, bei denen sie mit waren. Und die Fortbildungen, die wir zum Beispiel hier gemacht haben, die war ja schon so ein bisschen allgemeiner, oder auch Fortbildungen, die ich dann online mitgemacht habe, ja. Von daher fand ich so von dem Mix ist das in Ordnung.“

Wichtig ist abschließend zu betonen, dass es sich bei diesem Beitrag um einen Erfahrungsbericht aus dem Projekt DigiMath4Edu handelt, der nicht den Anspruch einer Übertragbarkeit oder Verallgemeinerbarkeit hat. In weiteren systematischen qualitativen und quantitativen Studien wurde das Projekt wissenschaftlich beleuchtet.

Literatur:

- Barzel, B. & Selter, C. (2015). Die DZLM-Gestaltungsprinzipien für Fortbildungen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 36, 259-284.
- Dilling, F., Hörnberger, K., Reifenrath, M., Schneider, R., Vogler, A. & Witzke, I. (2022). Das Forschungs- und Entwicklungsprojekt DigiMath4Edu – Digitale Transformation im Bildungsbereich am Beispiel des Mathematikunterrichts. In F. Dilling, F. Pielsticker & I. Witzke (Hrsg.), *Neue Perspektiven auf mathematische Lehr-Lern-Prozesse mit digitalen Medien* (S. 73–84). Springer Spektrum.
- Dilling, F. (2024). Kollaboration von Lehrer:innen und Student:innen beim Einsatz digitaler Medien im Mathematikunterricht. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2024*.
- Eickelmann, B. (2019). Lehrerfortbildung im Kontext der digitalen Transformation. In W. Böttcher, U. Heinemann, C. Kubina & B. Priebe (Hrsg.), *Steuerung und Qualitätsentwicklung im Fortbildungssystem. Probleme und Befunde – Standardbildung und Lösungsansätze* (S. 208–228). Klett Kallmeyer.
- Eickelmann, B., Lorenz, R. & Endberg, M. (2016). Die eingeschätzte Relevanz der Phasen der Lehrerausbildung hinsichtlich der Vermittlung didaktischer und methodischer Kompetenzen von Lehrpersonen für den schulischen Einsatz digitaler Medien in Deutschland und im Bundesländervergleich. In W. Bos, R. Lorenz, M. Endberg, B. Eickelmann, R. Kammerl & S. Welling (Hrsg.), *Schule digital – der Länderindikator 2016. Kompetenzen von Lehrpersonen der Sekundarstufe I im Umgang mit digitalen Medien im Bundesländervergleich* (S. 149–182). Waxmann.
- Florian, A. (2008). *Blended Learning in der Lehrerfortbildung. Evaluation eines online-gestützten, teambasierten und arbeitsbegleitenden Lehrerfortbildungsangebots im deutsch-sprachigen Raum*. Dissertation an der Universität Augsburg. Download:

https://opus.bibliothek.uni-augs-burg.de/opus4/frontdoor/deliver/index/docId/1170/file/Dissertation_Alexander_Florian.pdf

- Heinemann, U. (2019). Lehrkräftebildung – insbesondere Fort- und Weiterbildung. In W. Böttcher, U. Heinemann, C. Kubina & B. Priebe (Hrsg.), *Steuerung und Qualitätsentwicklung im Fortbildungssystem. Probleme und Befunde – Standardbildung und Lösungsansätze* (S. 26–54). Klett Kallmeyer.
- KMK (Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland) (2016). *Bildung in der digitalen Welt. Strategie der Kultusministerkonferenz. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 08.12.2017.* https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2016/2016_12_08-Bildung-in-der-digitalen-Welt.pdf
- Kuschel, J., Richter, D. & Lazarides, R. (2020). Wie relevant ist die gesetzliche Fortbildungsverpflichtung für Lehrkräfte? Eine empirische Untersuchung zur Fortbildungsteilnahme in verschiedenen deutschen Bundesländern. *Zeitschrift für Bildungsforschung*, 10, 211–229.
- Lipowsky, F. & Rzejak, D. (2017). Fortbildungen für Lehrkräfte wirksam gestalten – Erfolgsversprechende Wege und Konzepte aus Sicht der empirischen Bildungsforschung. *Bildung und Erziehung*, 70(4), 379–399.
- Richter, E., Richter, D. & Marx, A. (2018). Was hindert Lehrkräfte an Fortbildungen teilzunehmen? Eine empirische Untersuchung der Teilnahmebarrieren von Lehrkräften der Sekundarstufe I in Deutschland. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 21, 1021–1043.
- Rzejak, D., Lipowsky, F. & Bleck, V. (2020). Synopse bedeutsamer Merkmale von Lehrkräftefortbildungen. Wirkungsebenen und konzeptionelle Aspekte. *Journal für LehrerInnenbildung*, 4/20, 18–30.
- Schultis, T. (2019). *Wirksamkeit einer Fortbildung für Mathematiklehrkräfte der Sek. I. Eine empirische Studie zur Förderung fachdidaktischen Wissens am Beispiel des Produktiven Übens.* Dissertation an der Pädagogischen Hochschule Freiburg. Download: https://phfr.bsz-bw.de/frontdoor/deliver/index/docId/791/file/dissertation__thomas_schultis_pdfa1b.pdf
- Stanat, P., Schipolowski, S., Mahler, N., Weirich, S. & Henschel, S. (Hrsg.) (2019). *IQB-Bildungstrend 2018. Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen am Ende der Sekundarstufe I im zweiten Ländervergleich.* Waxmann.

Frederik Dilling & Marc Herrmann

Universität Siegen

frederik.dilling@uni-siegen.de, marc.herrmann@uni-siegen.de

Digitale Medien in aktuellen Mathematikschulbüchern – Erste Ergebnisse einer Untersuchung in den Jahrgangsstufen 5-9

Schulbücher gelten häufig als eine Art Leitmedium im Unterricht, welche die behandelten Themen und genutzten Herangehensweisen maßgeblich mitbestimmen. Aus diesem Grund ist auch zu vermuten, dass die Möglichkeiten zur Nutzung digitaler Medien im Mathematikunterricht ebenfalls durch die verwendeten Schulbücher beeinflusst werden. In der in diesem Artikel dargestellten Untersuchung werden daher die Verweise auf digitale Medien in Mathematikschulbüchern der Jahrgangsstufen 5-9 betrachtet. Erste Ergebnisse zeigen insgesamt wenige Verweise auf digitale Medien und deutliche Unterschiede in den Verweisen zwischen verschiedenen Medien und in den verschiedenen Jahrgangsstufen.

1. Einleitung

Digitale Medien und ihr sinnvoller Einsatz im Mathematikunterricht sind seit einigen Jahren ein Thema hoher Relevanz und Gegenstand aktueller Forschung. Durch die Beschlüsse der Kultusministerkonferenz in ihrer Strategie *Bildung in der digitalen Welt* (KMK, 2016) und ihre Umsetzung in den Bildungsstandards der Fächer (KMK, 2022) wird die Kompetenz zum Umgang mit digitalen Medien sowohl übergeordnet als auch für die einzelnen prozessbezogenen Kompetenzen im Bereich der Mathematik gefordert. Das Schulbuch als ein zentrales Unterrichtsmedium dient der Übersetzung der abstrakten Vorgaben der Kernlehrpläne in die schulische Realität (Valverde et al., 2002). Dabei hat das Schulbuch einen Einfluss auf die Auswahl der Themen und ihre Reihenfolge, die Aufbereitung des Materials und die pädagogischen Unterrichtsstrategien (Johansson, 2006). Es ist daher anzunehmen, dass unterschiedliche Schulbücher auch für den Einsatz digitaler Medien unterschiedliche Möglichkeiten bieten und deren Nutzung im Unterricht beeinflussen. Aus diesem Grund wird in diesem Beitrag eine Studie vorgestellt, welche in aktuellen Mathematikschulbüchern der Sekundarstufe I die expliziten Verweise auf digitale Medien untersucht.

In einer ersten Vorstudie wurden aktuelle Bücher der Jahrgangsstufe 7 untersucht, um einen ersten Überblick zu erhalten und Hypothesen zu bilden (Herrmann & Dilling, 2023). Es wurden hierbei vier Schulbücher für Gymnasien und Gesamtschulen, sowie ein Schulbuch für Haupt-, Real- und Gesamtschulen untersucht. Insgesamt wurden nur wenige Verweise auf digitale Medien gefunden, wobei sich zwischen den Schulbüchern, Arten der digitalen Medien und mathematischen Themengebieten deutliche Unterschiede zeigten. Auf Basis dieser Daten wurden in einer weiteren Studie auch die Verbindungen zu prozessbezogenen Kompetenzen

untersucht. Es zeigte sich hierbei unter anderem, dass digitale Medien hauptsächlich in Aufgaben der Anforderungsbereiche 1 und 2 adressiert werden (Dilling, Herrmann & Timm, 2023).

2. Theoretischer Hintergrund

Zur Erfassung der Verweise auf digitale Medien soll für diese Studie genutzt werden, dass die meisten Mathematikschulbücher eine feste Struktur aufweisen, welche auch zwischen mehreren Büchern vergleichbar und quantifizierbar ist. Auf Basis dieser Struktur als Beschreibungsrahmen sollen die Bücher in möglichst kleine Analyseeinheiten unterteilt werden, welche dann für jede Seite der Bücher erfasst werden können. Werden für diese Analyseeinheiten dann jeweils die Verweise auf digitale Medien untersucht, entstehen quantitative Daten, welche Vergleiche zwischen den verschiedenen Büchern erlauben.

Einen solchen Beschreibungsrahmen bietet Rezat (2009), welcher vorhandene Arbeiten zur Struktur von Mathematikschulbüchern zusammenfasst und auf Basis deutscher Mathematikschulbücher einen Beschreibungsrahmen für deren Struktur entwickelt. In seiner Arbeit unterscheidet dieser zwischen der *Makro*-, *Meso*- und *Mikroebene* der Struktur der Bücher, wobei er für jede Strukturebene verschiedene *Strukturelemente* identifiziert, die für diese charakteristisch sind. Die Makroebene behandelt die gesamte Systematik der Schulbuchreihen, wobei für einzelne Bücher bspw. das Inhaltsverzeichnis, die Kapitel oder das Stichwortverzeichnis zu den Strukturelementen gehören. Auf der Mesoebene wird die Struktur einzelner Kapitel betrachtet, sodass Einführungsseiten, Lerneinheiten und Themenseiten hier Strukturelemente darstellen. Für diese Arbeit zentral ist die letzte Ebene, die Mikroebene, welche die Struktur einzelner Lerneinheiten betrachtet. Die Strukturelemente dieser Ebene sind die gesuchten kleinsten Analyseeinheiten, da es sich hier um einzelne Übungsaufgaben, Lehrtexte, etc. handelt, welche vor dem Hintergrund des Forschungsanliegens in diesem Artikel nicht weiter in kleinere Einheiten zerlegt werden können.

Rezat (2009) identifiziert eine breite Anzahl von Strukturelementen (vgl. S. 99), welche weder disjunkte Kategorien bilden noch in mehreren der Bücher vorkommen müssen, da sein Ziel ein möglichst umfassender Beschreibungsrahmen ist. Für diese Studie ist aber eine Vergleichbarkeit der Bücher notwendig und eine quantitative Erfassung der Elemente vorgesehen, weshalb die Strukturelemente angepasst werden müssen. Aus den elf ursprünglichen Strukturelementen werden daher die fünf Strukturelemente *Aufgaben*, *Lehrtexte*, *Kernwissen*, *Musterbeispiele* und *Wiederholungsaufgaben* gebildet, wobei diese größtenteils durch die Zusammenfassung der Elemente nach Rezat (2009) entstehen.

3. Methodik

Das Ziel dieser Studie ist die Strukturierung und Quantifizierung des vorliegenden Textmaterials auf Basis fester Kategoriensysteme. Aus diesem Grund wurde als Methodik die Qualitative Inhaltsanalyse nach Mayring (2022) ausgewählt. Für

diese Forschungsmethode ist ein fester Ablaufplan charakteristisch, welcher für diese Studie aus den Schritten *Festlegung des Materials*, *Formale Charakteristika des Materials*, *Präzisierung der Fragestellung*, *Bestimmung der Analysetechnik*, *Festlegung des Kodierleitfadens* und *Kodierung und Auswertung* besteht. Als Material dieser Untersuchung wurden fünf Schulbuchreihen der Sekundarstufe I ausgewählt, von denen zum Zeitpunkt dieser Untersuchung die Bücher der Jahrgangsstufen 5 bis 9 erschienen sind. Diese sind:

- [EM] Elemente der Mathematik
- [FM] Fundamente der Mathematik
- [SE] Sekundo
- [LS] Lambacher Schweizer
- [NW] Mathematik Neue Wege

Aufgrund fehlender Daten zur Verbreitung der Schulbücher konnte keine Auswahl auf Basis der meistgenutzten Bücher erfolgen. Stattdessen wurden jene Bücher ausgewählt, welche in Schulen genutzt werden, die auch in anderen Kooperationsprojekten mit dem Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik an der Universität Siegen zusammenarbeiten. Bezogen auf die formalen Charakteristika des Materials muss festgehalten werden, dass die Bücher im Schnitt zwischen 200 und 300 Seiten lang sind und 5-10 Kapitel aufweisen. Die Bücher sind von einer großen Anzahl von Autor*innen verfasst worden und im Zeitraum 2018-2023 erschienen.

Aus der grundlegenden Motivation dieser Studie lassen sich mithilfe des theoretischen Hintergrundes nun bezogen auf dieses Material detaillierte Fragestellungen formulieren, welche untersucht werden sollen. Auf struktureller Ebene ist von Interesse, inwieweit die auf der Untersuchung von Rezat (2009) aufbauenden Strukturelemente für die vorliegenden Bücher als Beschreibungsrahmen geeignet sind. Auf Basis des Beschreibungsrahmens ist von Interesse, in welchen absoluten Anzahlen die einzelnen Strukturelemente auftreten und wie diese angeordnet sind. Eine genaue Erfassung der absoluten Zahlen zur Struktur der Bücher erlaubt es auch, einige Fragen zum Auftreten digitaler Medien in diesen Strukturen zu stellen. Hier ist von Interesse, in welcher Anzahl, welche Arten von digitalen Medien in welchen Strukturelementen genutzt werden. Es sollte möglichst genau für alle Strukturelemente aufgenommen werden, in welchem Strukturelement auf welches digitale Medium verwiesen wird, sodass die Nutzung der Medien nach verschiedenen Kriterien (z.B. Typ des Strukturelements, Art des digitalen Mediums, Jahrgangsstufe, Schulbuchreihe, etc.) ausgewertet werden kann.

Die zuvor formulierten Fragestellungen und Ziele dieser Studie legen die *Strukturierung* als Analysetechnik nach Mayring (2022) nahe. Das Ziel dieser ist es, mithilfe eines festgelegten Kategoriensystems eine gewisse Struktur eines Materials herauszufiltern, indem die Bestandteile, welche durch die Kategorien angesprochen werden, aus dem Material extrahiert werden (Mayring 2022, S. 96). Da in dieser Studie mehrere Strukturebenen untersucht werden, gibt es für diese jeweils

eigene Strukturelemente und Kodierleitfäden. Dies trifft zusätzlich auch auf die digitalen Medien zu, welche in einem eigenen Schritt kodiert werden. Da in diesem Artikel nur die Ergebnisse der Mikrostruktur betrachtet werden, werden auch nur die Kategoriensysteme für die Mikrostruktur und die digitalen Medien betrachtet.

Struktu-relement	Typographisch	Sprachlich	Inhaltlich	Didaktisch
Aufgabe	Meist nummerierte Texte, welche den Lernenden eine Aufgabenstellung geben, die diese bearbeiten sollen.		Die Inhalte des aktuellen Kapitels werden in Form einer Aufgabe für die Lernenden aufbereitet.	Aktivitäten, welche die Lernenden durchführen können. Aufgaben, welche nicht als Wiederholungsaufgaben klassifiziert werden und welche nicht in die Kategorie Musterbeispiel fallen.
Lehrtext	Text, auch inklusive Grafiken, welcher farblich hervorgehoben oder abgegrenzt sein kann, aber nicht muss.	Meist dem Lernstand angepasste Sprache, die wenig komprimiert und verdichtet ist.	Erklärungen zu einem mathematischen Gegenstand, Verfahren, übergeordneten Zusammenhängen, etc. innerhalb der Lektion.	
Kernwissen	Besonders hervorgehobene, abgegrenzte Kästen, welche mit dem Titel „Basiswissen“, „Kernwissen“, etc. versehen sind.	Prägnante zusammenfassende Darstellung	Die zentralen Inhalte des Abschnitts werden thematisiert.	Die zentralen Inhalte des Kapitels werden für die Lernenden kurz und prägnant dargestellt.
Wiederholungsaufgabe	Meist als „Aufgaben zur Wiederholung“ gekennzeichnet durch Markierungen an der Aufgabe oder übergeordnet.		Der Inhalt entspricht nicht dem Inhalt des aktuellen Kapitels, sondern wurde bereits in der Vergangenheit thematisiert.	Es handelt sich um eine Aktivität, welche die Lernenden selbst durchführen können. Es sollen bereits bekannte Inhalt wiederholt werden.
Musterbeispiel	Farbliche Hervorhebung oder Markierung durch entsprechende Titel wie „Aufgabe mit Lösung“, „Musterbeispiel“, etc.		Es wird ein Beispiel für einen mathematischen Gegenstand, ein Verfahren, etc. gegeben. Es kann sich auch um eine Aufgabe handeln, welche mit Lösung vorliegt.	

Tabelle 1: Strukturelemente der Mikroebene und ihre Merkmale

Das Kategoriensystem für die Strukturelemente der Mikroebene ist in Tabelle 1 dargestellt. Für jedes der Strukturelemente sind typographische, sprachliche, inhaltliche und didaktische Merkmale (oder ein Teil dieser) angegeben, welche das jeweilige Strukturelement charakterisieren. Mithilfe dieser Merkmale können bei einer Kodierung nun die verschiedenen Strukturelemente voneinander unterschieden werden, sodass es möglich ist, für jede Seite der Bücher alle Strukturelemente auf dieser zu identifizieren und zu zählen. So können für jede Seite die Anzahlen

aller Strukturelemente erfasst werden, was Aussagen über die Struktur der Bücher ermöglicht. Es ist zwar klar, worin sich die verschiedenen Strukturelemente unterscheiden, allerdings wird bspw. bei längeren Lehrtexten oder größeren Blöcken von Aufgaben nicht klar, ob es sich jeweils um eines oder mehrere Strukturelemente dieses Typs handelt. Aus diesem Grund werden explizite Kodierregeln angegeben, welche die Zählung der Strukturelemente festlegen. Diese sind im Anhang dieses Artikels angefügt.

Zur Untersuchung der Verweise auf digitale Medien ist ebenfalls ein Kategoriensystem erforderlich. Allerdings muss zuerst definiert werden, was ein Verweis auf digitale Medien ist und was nicht. Dass eine Aufgabe, in welcher zum Beispiel auf ein DGS zur Lösung explizit verwiesen wird, unter diese Kategorie fällt, erscheint offensichtlich, doch wie ist es mit einer Aufgabe, welche zwar digitale Medien als inhaltlichen Kontext hat, allerdings vollständig ohne solche gelöst werden soll? Wie ist es mit Aufgaben, welche mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge bearbeitet werden könnten, dies aber nicht explizit angegeben ist und diese auch analog lösbar sind? Für diese Studie sind die Anlässe zur *tatsächlichen* Benutzung digitaler Medien von Interesse, in welcher diese nicht nur den Kontext bilden. Daher werden Verweise auf digitale Medien im Sinne dieser Studie als alle Strukturelemente definiert, welche im Text der Aufgabe (Typ 1), durch eine besondere Hervorhebung (Typ 2) oder in den Zusatzinformationen in einer Randspalte (Typ 3) die Nutzung eines oder mehrerer digitaler Medien für die Bearbeitung der Aufgabe erwähnen. Die verschiedenen Typen der Kennzeichnung werden in dieser Studie ebenfalls für jedes Strukturelement erhoben, da sie eine Aussage über die Sichtbarkeit der digitalen Medien möglich machen.

Ein übergeordnetes Kategoriensystem, welches alle diese Aspekte enthält, ist in Tabelle 2 angegeben. In diesem werden die Kategorien *Strukturelement*, *Art des digitalen Mediums* und *Kennzeichnung* mit ihren möglichen Ausprägungen und deren Definitionen dargestellt. Mithilfe dieses zweiten Kategoriensystems liegen alle für die Kodierung notwendigen Kategorien vor. Mithilfe der Kategoriensysteme und Kodierregeln wurden die Bücher der Jahrgangsstufen 5-9 von mehreren Personen kodiert. Es wurde darauf geachtet, dass die verschiedenen Jahrgangsstufen und Schulbuchreihen jeweils gleichmäßig auf mehrere Personen verteilt wurden. Außerdem wurden die kodierenden Personen im Vorhinein ausgiebig im Umgang mit dem Kategoriensystem geschult. Die kodierten Daten wurden in einer Datenbank zusammengeführt und nach verschiedenen Merkmalen ausgewertet. Einige der Ergebnisse dieser Auswertung werden im nächsten Abschnitt dargestellt.

Kategorie	Ausprägungen	Definition
Strukturelement	Makrostruktur	Siehe Kategoriensystem bei Rezat (2009, S. 94).
	Mesostruktur	Siehe Kategoriensystem bei Rezat (2009, S. 96).
	Mikrostruktur	Siehe Tabelle 1
Art des digitalen Mediums	CAS, DGS, FP, GTR, RE, TAB, TR, Sonstiges	Aus dem Verweis ist zu entnehmen, auf welche(s) der digitalen Medien in diesem Strukturelement verwiesen wird.
Kennzeichnung	Gekennzeichnet	Der Verweis auf ein digitales Medium ist durch ein besonderes Symbol am Strukturelement oder durch Angabe des Strukturelementes einer übergeordneten Strukturebene gekennzeichnet.
	Anmerkung	Das Element ist nicht direkt gekennzeichnet (s.o.), die Anmerkungen in der Randspalte verweisen jedoch auf ein digitales Medium.
	Nicht gekennzeichnet	Das Element ist weder gekennzeichnet noch wird in der Anmerkung auf ein digitales Medium verwiesen. Erst im Text des Elements findet ein Verweis auf ein digitales Medium statt.

Tabelle 2: Kategoriensystem für die Verweise auf digitale Medien

4. Ergebnisse

Für die Darstellung der Ergebnisse muss sich, aufgrund der großen Menge verfügbarer Daten und des begrenzten Umfangs dieses Artikels, auf einige ausgewählte Aspekte zur Mikrostruktur der Bücher beschränkt werden. Es werden nachfolgend die absoluten Zahlen der Strukturelemente pro Jahrgangsstufe und pro Typ von Strukturelement aufgeschlüsselt, um einen grundlegenden Überblick über die Struktur der Bücher zu erhalten. Für diese Daten werden im Vergleich die Anzahlen von Strukturelementen mit digitalen Medien dargestellt, sodass auch ein Überblick über das Vorkommen digitaler Medien gegeben ist. Zuletzt wird ein Detailaspekt der Verweise auf digitale Medien betrachtet, indem die Typen der verwendeten digitalen Medien unterschieden werden.

Jahrgangsstufe	Aufgaben	Kernwissen	Lehrtexte	Wiederholungsaufgaben	Musterbeispiele	Gesamt
5	5192	344	181	407	454	6578
6	4886	314	151	418	460	6229
7	4167	369	131	417	394	5478
8	3730	301	121	359	348	4859
9	3762	290	195	398	328	4973
Gesamt	21737	1618	779	1999	1984	28117

Tabelle 3: Anzahlen der Strukturelemente pro Jahrgangsstufe

Die Anzahlen der Strukturelemente pro Jahrgangsstufe und pro Strukturelement sind in Tabelle 3 dargestellt. Betrachten wir zunächst die summierten Zahlen, so fällt auf, dass die Aufgaben mit 21737 Elementen dieses Typs den größten Anteil (77%) an allen Strukturelementen ausmachen. Die Elemente Kernwissen, Wiederholungsaufgaben und Musterbeispiele weisen ähnliche Anteile mit ca. 6-7 Prozent auf, während die Lehrtexte mit weniger als 3 Prozent weniger als halb so oft vorkommen. Mit Ausnahme kleinerer Abweichungen von wenigen Prozentpunkten lassen sich diese Anteile auch in den verschiedenen Jahrgangsstufen so beobachten. Bezogen auf die gesamten Anzahlen der Elemente lässt sich feststellen, dass die Gesamtzahlen der Strukturelemente von Jgst. 5 zu 8 kontinuierlich abnehmen, sodass die Gesamtzahl der Elemente in Jgst. 8 um 26% geringer als in Jgst. 5 ist. Die Anzahl der Elemente in Jgst. 8 verändert sich zur Jgst. 9 nur unwesentlich.

Für die einzelnen Typen von Strukturelementen lässt sich diese Entwicklung nur teilweise nachweisen. Für die Aufgaben ist die Entwicklung ähnlich zu den gesamten Strukturelementen, was aufgrund des hohen Anteils der Aufgaben an allen Strukturelementen wenig überraschend ist. Für die Lehrtexte stellt sich der Verlauf bis zur Jgst. 8 ähnlich dar, allerdings bleibt dies in Jgst. 9 nicht konstant, sondern die Anzahl übersteigt sogar jene in Jgst. 5. Für die Musterbeispiele sind sehr ähn-

liche Werte in den Jahrgangsstufen 5 und 6 gegeben, nach welchen eine kontinuierliche Verringerung bis zur Jgst. 9 auftritt. Für die Wiederholungsaufgaben und Kernwissen lässt sich keine klare Entwicklung feststellen.

Jahrgangsstufe	Aufgabe		Kernwissen		Lehrtexte		Wiederholungsaufgaben		Musterbeispiele		Gesamt	
	Digital	Anteil	Digital	Anteil	Digital	Anteil	Digital	Anteil	Digital	Anteil	Digital	Anteil
5	66	1,3%	0	0,0%	13	7,2%	0	0,0%	1	0,2%	80	1,2%
6	91	1,9%	4	1,3%	7	4,6%	0	0,0%	16	3,5%	118	1,9%
7	184	4,4%	3	0,8%	7	5,3%	0	0,0%	20	5,1%	214	3,9%
8	169	4,5%	4	1,3%	13	10,7%	0	0,0%	6	1,7%	192	4,0%
9	173	4,6%	2	0,7%	22	11,3%	4	1,0%	4	1,2%	205	4,1%
Gesamt	683	3,1%	13	0,8%	62	8,0%	4	0,2%	47	2,4%	809	2,9%

Tabelle 4: Absolute Zahlen und Anteile der Strukturelemente mit Verweisen auf digitale Medien an den gesamten Anzahlen dieser Strukturelemente in der jeweiligen Jahrgangsstufe

Die Anzahlen der Strukturelemente mit Verweisen auf digitale Medien und die relativen Anteile an den gesamten Strukturelementen in der jeweiligen Jahrgangsstufe sind für die verschiedenen Strukturelemente und die Jahrgangsstufen in Tabelle 4 dargestellt. Bezogen auf die gesamten Strukturelemente lässt sich feststellen, dass mit 809 Elementen nur rund 3 Prozent aller 28117 Strukturelemente Verweise auf digitale Medien enthalten. Die Entwicklung über die Jahrgangsstufen zeigt eine leichte Zunahme von Jgst. 5 zu 6 (1,2% zu 1,9%) und eine Verdopplung zu Jgst. 7. Der Anteil bleibt für die Jahrgangsstufen 8 und 9 auf einem ähnlichen Niveau (4%). Eine Unterscheidung der verschiedenen Typen von Strukturelementen zeigt, dass diese Entwicklung über die Jahrgangsstufen nur bei den Aufgaben ebenfalls so beobachtet werden kann, während für die anderen Strukturelemente solche Zusammenhänge nicht vorliegen. Dies hängt unter anderem damit zusammen, dass die Anteile der Verweise auf digitale Medien sich für die Strukturelemente insgesamt stark unterscheiden.

So kommen Verweise auf digitale Medien in den Kernwissen und Wiederholungsaufgaben fast gar nicht vor (in einigen Jahrgangsstufen existieren dahingehend tatsächlich keine Elemente mit Verweisen auf digitale Medien), während sie in den Lehrtexten mit 8 Prozent mehr als doppelt so stark vertreten sind wie im Durchschnitt aller Strukturelemente. Musterbeispiele weisen einen ähnlichen Anteil an Verweisen auf digitale Medien auf, wie der Durchschnitt aller Elemente, allerdings weichen die Anteile in den einzelnen Jahrgangsstufen deutlich von diesem ab. Generell muss für alle Strukturelemente außer den Aufgaben festgehalten werden, dass die geringen absoluten Zahlen eine Vergleichbarkeit und Aussagen über etwaige Entwicklungen erschweren.

Jahrgangsstufe	DGS	CAS	RE	TAB	TR	FP	GTR	Sonstiges	Gesamt
5	27	0	22	18	3	0	0	12	82
6	54	0	7	54	4	0	0	0	119
7	63	3	12	86	47	7	0	3	221
8	62	16	7	59	16	34	14	2	210
9	81	13	19	23	42	42	10	1	231
Gesamt	287	32	67	240	112	83	24	18	863

Tabelle 5: Anzahlen der Strukturelemente mit Verweisen auf digitale Medien, aufgeschlüsselt nach der Art des digitalen Mediums und den Jahrgangsstufen.

Eine Übersicht über die Arten der digitalen Medien ist in Tabelle 5 dargestellt. Es wird hierbei auf den ersten Blick deutlich, dass sich die Anzahlen in der rechten Spalte „Gesamt“ von den Anzahlen in der vorherigen Tabelle unterscheiden. Dies lässt sich dadurch erklären, dass für ein einzelnes Strukturelement nicht immer auch genau auf ein digitales Medium verwiesen wird. Einige Elemente verweisen auf mehrere digitale Medien oder lassen mehrere Auswahlmöglichkeiten, welches digitale Medium verwendet wird. In diesen Fällen werden einem Strukturelement mehrere digitale Medien zugeordnet, sodass die Gesamtzahlen hier größer ausfallen als in der vorherigen Tabelle. Vergleicht man die 863 Elemente in dieser Mehrfachkodierung mit den 809 Elementen zuvor, so fällt auf, dass nur ein kleiner Teil der Elemente auf mehrere digitale Medien verweist. Von den 809 Elementen verweisen 48 (ca. 6%) auf mehr als ein digitales Medium, davon 43 auf genau zwei und 5 auf genau drei digitale Medien.

Vergleichen wir insgesamt die Anteile der digitalen Medien an den gesamten Verweisen, so fällt auf, dass Dynamische Geometriesoftware (DGS) und Tabellenkalkulationssoftware (TAB) die wichtigsten Medien mit Anteilen von 33 und 28 Prozent sind. Eine mittlere Häufigkeit weisen Taschenrechner (TR) (13%), Funktionsplotter (FP) (10%) und Internetrecherchen (RE) (8%) auf, während Computeralgebrasysteme (CAS) (4%), Grafikfähige Taschenrechner (GTR) (3%) und sonstige digitalen Medien (Sonstige) (2%) nur sehr geringe Anteile haben. CAS, GTR und FP sind aufgrund ihrer Anwendungsfelder erst ab Jgst. 8 relevant (bzw. mit wenigen Strukturelementen ab Jgst. 7), vorher treten daher keine oder kaum Elemente mit Verweisen auf diese auf. Für den TR lässt sich dies ab Jgst. 7 ebenfalls beobachten. DGS ist das einzige Medium, bei welchem die Entwicklung über die Jahrgangsstufen hinweg etwa der Gesamtentwicklung entspricht.

5. Erstes Fazit und Ausblick

Zusammenfassen ist auf struktureller Ebene festzustellen, dass sich die Anzahl der Strukturelemente über die Jahrgangsstufen hinweg verringert, bis sie ein ähnliches Niveau in den Jahrgangsstufen 8 und 9 erreicht. Zieht man in Betracht, dass sich keine vergleichbare Entwicklung der Länge der Bücher

zeigt, so führt dies zum Ergebnis, dass die einzelnen Strukturelemente ausführlicher werden müssen. Eine Verlängerung dieser einzelnen Strukturelemente erscheint aufgrund der höheren Menge an Textaufgaben sowie der Erläuterung und Darstellung komplexerer Sachverhalte in den höheren Jahrgangsstufen plausibel. Bezogen auf die Verteilung der Strukturelemente lässt sich festhalten, dass die Aufgaben mit 75-80 Prozent den größten Teil ausmachen, während die anderen Elemente jeweils ähnliche Anteile aufweisen.

Bezüglich der Verweise auf digitale Medien lässt sich insgesamt ein eher geringer Anteil von nur 3 Prozent festhalten. Weiterhin wird durch eine Betrachtung der Typen von Strukturelementen deutlich, dass digitale Medien in Lehrtexten wesentlich häufiger vorkommen, während sie in Kernwissen und Wiederholungsaufgaben fast gar nicht vorkommen. Zieht man die didaktischen Funktionen dieser Strukturelemente in Betracht, so werden Kernwissen genutzt, um die zentralen (mathematischen) Inhalte zu vermitteln und für die Lernenden zusammengefasst darzustellen. Wiederholungsaufgaben ermöglichen es den Lernenden, die wichtigsten Inhalte und Aufgabenformate vergangener Themenfelder zu wiederholen. Lehrtexte werden in einem Teil der Bücher verwendet, um die Inhalte der Kernwissen zu erklären, während sie in einem anderen dazu genutzt werden zusätzliche Informationen in Form von Exkursen darzustellen. Aufgrund dieser Nutzung der Strukturelemente lässt sich die Hypothese formulieren, dass digitale Medien in aktuellen Mathematikschulbüchern eher als ein Randthema gesehen werden. Diese Hypothese lässt sich anhand des geringen Anteils der Verweise auf digitale Medien allgemein und anhand des noch geringeren Vorkommens innerhalb der Kernwissen und Wiederholungsaufgaben begründen. Digitale Medien treten in Lehrtexten, also zu großen Teilen in Exkursen und ergänzenden Themen, vermehrt auf, während sie innerhalb der Strukturelemente, welche die Kernthemen beinhalten, fast nicht auftreten.

Zuletzt lässt sich bezogen auf die verschiedenen digitalen Medien festhalten, dass Tabellenkalkulationen und Dynamische Geometrie Systeme die relevantesten Medien darstellen. Inwieweit sich die Ergebnisse auch für die Gesamtmenge aller Bücher (inklusive der Bücher der Jgst. 10) bestätigen, wird nach deren Erscheinen in weiteren geplanten Veröffentlichungen dargestellt werden. Darüber hinaus werden Unterschiede zwischen den einzelnen Schulbuchreihen betrachtet, also inwieweit verschiedene Schulbücher durch die Verweise auf digitale Medien unterschiedliche Zugänge bieten. Auch inwieweit Lehrkräfte auf die Möglichkeiten zur Nutzung digitaler Medien durch farbliche Kennzeichnungen, Symbole oder andere Hervorhebungen hingewiesen werden und wo hier Unterschiede zwischen den Schulbuchreihen, Jahrgangsstufen und Typen von digitalen Medien bestehen, kann aus Gründen des Umfangs dieses Artikels erst in zukünftigen Veröffentlichungen diskutiert werden. Weitere solcher Aspekte, die hier nicht diskutiert werden können, sind Unterschiede zwischen den mathematischen Themengebieten,

also ob digitale Medien in gleichem Maße in Kapiteln zur Stochastik oder Geometrie eingesetzt werden, oder ob hier (erwartungsgemäß) unterschiedliche Medien verschieden stark vorkommen.

Literatur:

- Dilling, F., Herrmann, M. & Timm, D. (2023). Argumentieren, Problemlösen & Co – Welche prozessbezogenen Kompetenzen werden durch den Einsatz digitaler Medien angesprochen? Ergebnisse einer Schulbuchanalyse zur 7. Jahrgangsstufe. *GDM-Mitteilungen*, 114, 12–18.
- Herrmann, M. & Dilling, F. (2023). Ist die Nutzung digitaler Medien themenspezifisch? – Ergebnisse einer Schulbuchuntersuchung. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2022*, 837–840.
- Johansson, M. (2006). The mathematics textbook: From artefact to instrument. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 3-4, 43–64.
- KMK (2016). *Bildung in der digitalen Welt. Strategie der Kultusministerkonferenz. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 08.12.2017*. KMK.
- KMK (2022). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik. Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA)*. KMK.
- Mayring, P. (2022). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken*. Beltz.
- Rezat, S. (2009). *Das Mathematikbuch als Instrument des Schülers. Eine Studie zur Schulbuchnutzung in den Sekundarstufen*. Vieweg + Teubner.
- Valverde, G.A., Bianchi, L.J., Wolfe, R.G., Schmidt, W.H. & Houang, R.T. (2002). *According to the Book – Using TIMSS to Investigate the Translation of Policy into Practice through the World of Textbooks*. Kluwer

Anhang:

Betroffene Strukturele- mente

Kodierregel

Lehrtext

Da Lehrtexte in den meisten Fällen nicht nummeriert sind und in Teilen aus mehreren Abschnitten bestehen, sollen sie wie folgt gezählt werden: Besteht der Text nur aus einem Abschnitt, so handelt es sich um einen Lehrtext. Bei mehreren Abschnitten oder der Einbindung von Abbildungen wird die Gesamtheit dieser als ein einzelner Lehrtext gezählt, sofern sich inhaltlich ein sinnvolles, übergeordnetes Thema für alle Abschnitte finden lässt. Selbst wenn ein Kernwissen oder anderes Strukturelement den Lehrtext zu diesem einzelnen Thema unterbricht, wird es als ein einzelnes Element gezählt. Eine Aufteilung in mehrere Lehrtexte findet nur dann statt, wenn die Lehrtexte in ihren Inhalten hinreichend deutliche Unterschiede aufweisen, was bspw. durch verschiedene Überschriften der Texte kenntlich gemacht sein könnte.

Lerneinheiten- übergreifende Zusammenfas- sung: Kernwis- sen, Musterbei- spiele

Für die lerneinheitenübergreifenden Zusammenfassungen am Ende der Kapitel gilt: Die möglichen Kernwissen und Musterbeispiele innerhalb dieser Einheit werden als genau ein einzelnes Kernwissen gezählt für die gesamte(n) Seite(n).

Aufgaben, Wie- derholungsauf- gaben, Muster- beispiele

Liegt durch das Buch eine Nummerierung oder Zählung der Strukturelemente vor, so wird diese übernommen. Liegt keine Zählung vor, so werden Aufgaben, Wiederholungsaufgaben oder Musterbeispiele wie oben für Lehrtexte beschrieben zu möglichst großen Aufgaben mit Teilaufgaben zusammengefasst und nur die Gesamtaufgaben gezählt.

Kegelschnitte erkunden - genetisch, ganzheitlich, dynamisch, anschaulich

Kegelschnitte sind ein enorm reichhaltiges Thema, aber dennoch weitgehend aus dem Kanon der Schulmathematik verschwunden. Hier wird mit dem digitalen Werkzeug GeoGebra 3D ein ganzheitlicher und genetischer Weg vorgeschlagen, zum einen die vielfältigen Aspekte zu verbinden und zum anderen mit Hilfe der Prinzipien systematische Variation und dynamische Visualisierung zumindest in Ansätzen spiralig unterrichtbar zu machen.

1. Warum Kegelschnitte im Unterricht?

Kegelschnitte - lange eins der großen Themen der Mathematik und des Mathematikunterrichts - sind heute aber ziemlich in Vergessenheit geraten. Wie konnte es dazu kommen? Zum einen ist seit vielen Jahrzehnten ein genereller Rückgang der Geometrie im Allgemeinen und speziell der Raumgeometrie zu konstatieren. Zum anderen ist die klassische Behandlung der Kegelschnitte mit einem erheblichen algebraischen und konstruktiven Aufwand verbunden.

Heute haben wir eine neue Situation durch dynamische Raumgeometrie-Software. Wir können die ursprüngliche stereometrische Vorstellung von Schnitten durch einen Kegel wiederbeleben und dynamisch visualisieren und dabei gleichzeitig viel von der algebraischen und konstruktiven Komplexität reduzieren.

Der hier vorgestellte Ansatz (siehe Elschenbroich 2023, S. 144) ist

- **genetisch**, weil er der Namensgebung folgt und mit dem ebenen Schnitt eines Kegels beginnt (Kegel-Schnitt),
- **ganzheitlich**, weil er wo immer möglich eine für alle Kegelschnitte gemeinsame Sichtweise statt isolierter Behandlung verfolgt,
- **dynamisch**, weil er konsequent mit der dynamischen Raumgeometrie-Software GeoGebra 3D als digitalem Werkzeug arbeitet und die Problemstellungen (meist mit Schiebereglern) systematisch variiert,
- **anschaulich**, weil er ‚an Stelle der Formeln vielmehr anschauliche Figuren bringt‘ (Hilbert & Cohn-Vossen, Vorwort).

Dabei wird auf folgende schulrelevante Ansätze fokussiert (siehe Lietzmann 1969):

1. **stereometrisch**: Kegel-Schnitte und Dandelinsche Kugeln
2. **planimetrisch**: Abstände und Ortslinien
3. **analytisch**: Gleichungen und parametrische Funktionen.

In diesem Beitrag steht der stereometrische Aspekt im Vordergrund, zur ausführlichen Behandlung aller drei Aspekte siehe Elschenbroich 2023. Natürlich gibt es noch weitere bedeutsame Aspekte, die ein ganzes Buch füllen können, siehe Schupp 2000.

Schupp hatte eine „sich anbahnende schulische Renaissance der Kegelschnitte“ durch den Einsatz von Software (DGS Euklid DynaGeo, CAS Derive, Funktionenplotter und eigene Turbo Pascal Programme) vorhergesagt und erhoffte eine „Regeometrisierung der Schulgeometrie“ (die bislang so nicht eingetreten ist) (Schupp 2000, Vorwort). Er strebte dabei „eine möglichst intensive Verschränkung der vielfältigen Erzeugungs-, Untersuchungs- und Repräsentationsmethoden“ an und möchte „auch die Sekundarstufe I in diese Entwicklung einbeziehen“ (Schupp 2000, Vorwort), was heutzutage mit dynamischen Lernumgebungen überzeugend realisiert werden kann.

2. Dynamische Raumgeometrie-Software

Das Genre der dynamischen Geometrie-Software (DGS) ist mittlerweile durch dynamische 3D-DGS wie GeoGebra 3D und Cabri 3D ergänzt worden, mit denen virtuelle 3D-Objekte erzeugt und manipuliert werden können. Die hier gezeigten Beispiele sind mit GeoGebra 3D mit Einsatz von Schiebereglern erstellt worden und stehen auf www.geogebra.org zur Verfügung. Sie könnten aber auch mit Cabri 3D und direkter Variation von Punkten konstruiert werden.

3. Modelle und Veranschaulichungen

Für Kegelschnitte gibt es klassisch Modelle aus Holz oder Gips oder modern und schön bunt aus Acryl. Dabei sollte man immer die Frage berücksichtigen: Geben die Modelle eine adäquate Veranschaulichung oder transportieren sie Fehlvorstellungen? Letzteres muss leider durchgehend bejaht werden!

- Bei den massiven Modellen aus Holz oder Gips erhalten wir *Schnittflächen*, keine Kurven.
- Auch bei den heute im Lehrmittel-Handel erhältlichen Modellen sind (damit man was erkennen kann) in einen hohlen Kegel aus durchsichtigem Acryl farbige *Flächen* für Kreis/ Ellipse und ansatzweise für Parabel und Hyperbel eingefügt.
- Bei all diesen Modellen und auch bei Grafiken im Internet (https://en.wikipedia.org/wiki/Conic_section) sind die jeweiligen Kegelschnitte beliebig und insbesondere unsystematisch angeordnet.

Mathematisch korrekt müsste ein *hohler Doppelkegel* von einer Ebene geschnitten werden, das Schnittobjekt ist dann eine *Kurve*. Das kollidiert leider mit dem Verständnis von Kreis und Ellipse in der Sekundarstufe I, die eher als Flächen mit Umfang und Inhalt denn als Kurven mit einer Gleichung verstanden werden.

Eine korrekte und systematische Veranschaulichung ist aber mit 3D-DGS möglich. Hier wird ein Punkt E auf einem hohlen Doppelkegel festgelegt, der im Zugmodus verändert werden kann. Der Öffnungswinkel α des Kegels und der Neigungswinkel β der Schnittebene können dabei an Schieberegler systematisch variiert werden, siehe Abbildung 1a, b.

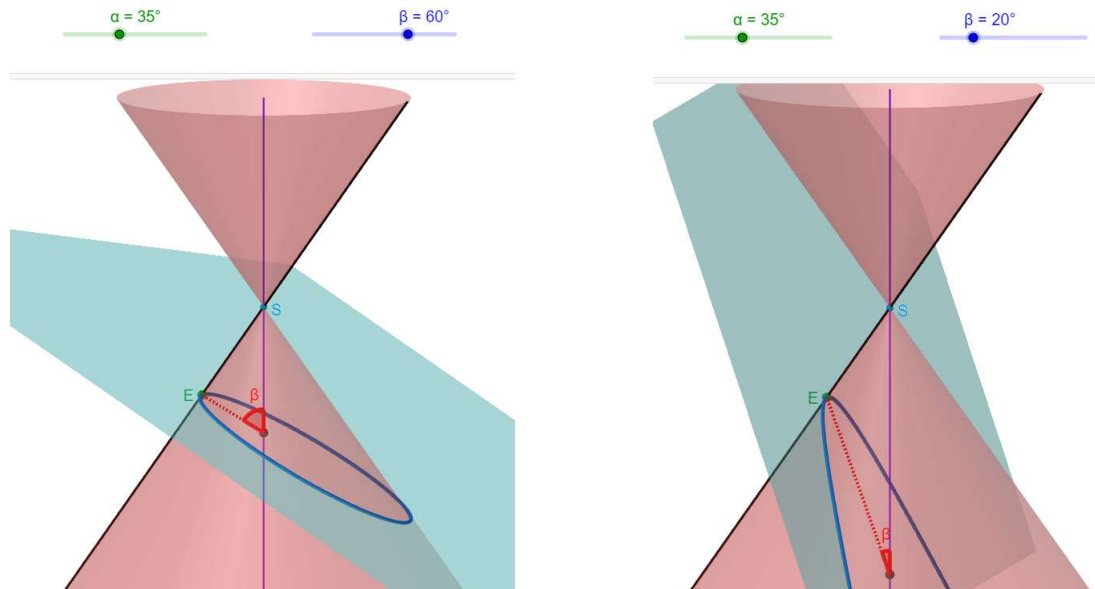


Abbildung 1a, b: Ellipse und Hyperbel als Kegelschnitt. Erstellt mit GeoGebra (<http://www.geogebra.org>).

Mit GeoGebra 3D kann dann aus Konstruktionen auch eine Serie von 3D-Drucken (mit einem endlichen hohlen Kegel) erstellt werden (wobei man aus technischen Gründen zur Stabilität eine gewisse Wandstärke sicherstellen muss), siehe Abbildung 2.



Abbildung 2: Parabel als Kegelschnitt, 3D-Druck Rudolf Hrach.

4. Dandelinsche Kugeln

Der belgische Ingenieur G. P. Dandelin (1794 – 1847) führte dann bei der stereometrischen Betrachtungsweise die nach ihm benannten Dandelinschen Kugeln ein (Schupp 2000, S. 16f):

- Bei einer Ellipse gibt es zwei Kugeln, die den Hohlkegel und die Schnittebene berühren.
- Bei einer Parabel gibt es eine solche Kugel.
- Bei einer Hyperbel gibt es wieder zwei Kugeln, die aber in unterschiedlichen Teilen des Doppelkegels liegen.

Warum es bei der Parabel nur eine Dandelinsche-Kugel gibt, wird in der dynamischen Variation einsichtig. Je näher β (zunächst größer als α) durch Verändern des Schiebereglers an α kommt, desto weiter ‚rutscht‘ die zweite Kugel ‚nach unten‘. Liegt die Schnittebene schließlich parallel zur Mantellinie, gibt es als Grenzfall keine zweite Kugel. Wird dann β kleiner als α , so ‚wandert‘ die zweite Kugel in den oberen Halbkegel und ‚rutscht dann von oben‘ allmählich wieder in den sichtbaren Bereich.

Zu den Dandelinschen Kugeln gibt es auch wieder Anschauungsmodelle, in der Regel für Ellipsen ausgeführt. Die modernen Modelle aus Acryl sind optisch sehr ansprechend, aber erklären nichts. Ein historisches Modell der Fa. Stoll aus der Sammlung der SLUB Dresden verdeutlicht dagegen den Zusammenhang von Berührebene, Brennpunkten und Leitlinien, siehe Abbildung 3.



Abbildung 3: Elliptischer Kegelschnitt mit Dandelinschen Kugeln. Mit freundlicher Abdruck-Genehmigung von Prof. Lordick (TU Dresden), Bildrechte Lutz Liebert.

Bei gegebenem α und festgehaltenem Punkt E erhalten wir durch systematische Variation von β eine ganzheitliche Sicht:

- $90^\circ \geq \beta > \alpha$: Es gibt *zwei* Kugeln, *zwei* Brennpunkte und *zwei* Leitlinien. Alle liegen im gleichen Teil des (Doppel-)Kegels. Der Kegelschnitt ist eine Ellipse (im Sonderfall $\beta = 90^\circ$ ein Kreis).
- $\beta = \alpha$: Es gibt *eine* Kugel, *einen* Brennpunkt und *eine* Leitlinie. Die Schnittkurve ist nicht mehr geschlossen, der Kegelschnitt ist eine Parabel.
- $\beta < \alpha$: Es gibt *zwei* Kugeln, *zwei* Brennpunkte *und* *zwei* Leitlinien. Sie liegen in unterschiedlichen Teilen des (Doppel-) Kegels. Der Kegelschnitt ist eine Hyperbel. (Hilbert & Cohn-Vossen, S. 8)

Die numerische Exzentrizität ε ist eine wesentliche Kenngröße der Kegelschnitte, sie ist ein Maß für die Abweichung von der Kreisgestalt. *Geometrisch* ergibt sie sich auch aus den Winkeln α und β (Schupp 2000, S. 9), $\varepsilon = \frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)}$:

- $\varepsilon = 0$: Der Kegelschnitt ist ein Kreis.
- $0 < \varepsilon < 1$: Der Kegelschnitt ist eine Ellipse.
- $\varepsilon = 1$: Der Kegelschnitt ist eine Parabel.
- $1 < \varepsilon$: Der Kegelschnitt ist eine Hyperbel.

5. Abstandseigenschaften

Die typischen Abstandseigenschaften kann man aus den Dandelinschen Kugeln *herleiten* (siehe z.B. Schupp 2000, S. 16 – 31). Mit dynamischen Lernumgebungen können diese Eigenschaften aber auch von Schülerinnen & Schülern *entdeckt* werden. Damit kommen wir zur *planimetrischen* Betrachtungsweise.

Für Ellipse und Hyperbel gibt es zwei Brennpunkte. Der Abstand eines Punktes P auf dem Kegelschnitt zum Brennpunkt F_1 sei d_1 , zum Brennpunkt F_2 sei d_2 .

- Bei einer Ellipse ist dann die Summe $d_1 + d_2$ konstant.
- Bei einer Hyperbel ist dann die Differenz $d_1 - d_2$ konstant.

Bei einer Parabel gibt es nur einen Brennpunkt. Der Abstand eines Punktes P auf der Parabel zum Brennpunkt F sei d_F , der Abstand zur Leitlinie L sei d_L .

- Bei einer Parabel ist $d_F = d_L$.

Ausgerechnet der Spezialfall der Parabel eröffnet nun eine Verallgemeinerung, einen ganzheitlichen Ansatz mit Hilfe der numerischen Exzentrizität ε . Dazu nehmen wir jeweils den Abstand d_F von P zum Brennpunkt und den Abstand d_L zur zugehörigen Leitlinie und betrachten das Abstandsverhältnis.

- Der Abstand eines Punktes P zum Brennpunkt geteilt durch den Abstand zur Leitlinie ist konstant und gleich der numerischen Exzentrizität $\varepsilon = \frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)} = \frac{d_F}{d_L}$ (Hilbert & Cohn-Vossen 1996, S. 25).

6. Ortslinien

Aus diesen Abstandseigenschaften ergeben sich direkt Ortslinien-Konstruktionen. Diese Ortslinien sind dann zweigeteilt, ein Ast wird vom Punkt P erzeugt und der zweite vom symmetrischen Punkt P_2 .

Für Ellipse und Hyperbel kann der Abstand d_1 variiert werden kann. Bei gegebener Exzentrizität ε ergibt sich dann daraus der Wert für d_2 . Zur Konstruktion einer Ellipse (auch als Gärtnerkonstruktion bekannt) siehe Abbildung 4.

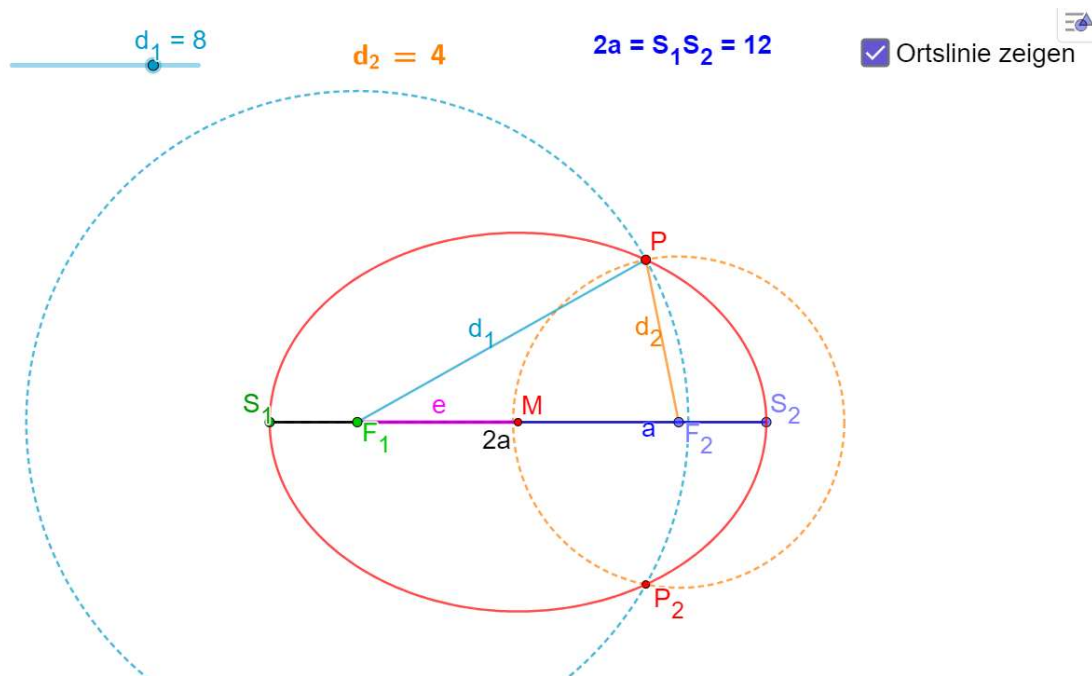


Abbildung 4: Ellipse als Ortslinie. Erstellt mit GeoGebra (<http://www.geogebra.org>).

Einer Parabel als Ortslinie erhält man als Schnittpunkt eines Kreises um den Brennpunkt F mit dem Radius d mit einer Parallelen zur Leitlinie im Abstand d, siehe Abbildung 5.

Der Spezialfall der Parabel-Konstruktion kann wieder mit Hilfe der numerischen Exzentrizität ε zu einer allgemeinen Ortslinienkonstruktion für alle Kegelschnitte verallgemeinert werden. Der Kreisradius ist $d_F = \varepsilon \cdot d_L$, siehe Abbildung 6.

Es gibt auch weitere Möglichkeiten zur Ortslinien-Konstruktionen mit Leitkreisen. Dies wird hier nicht vertieft (siehe dafür z.B. Lietzmann 1949, S. 15f).

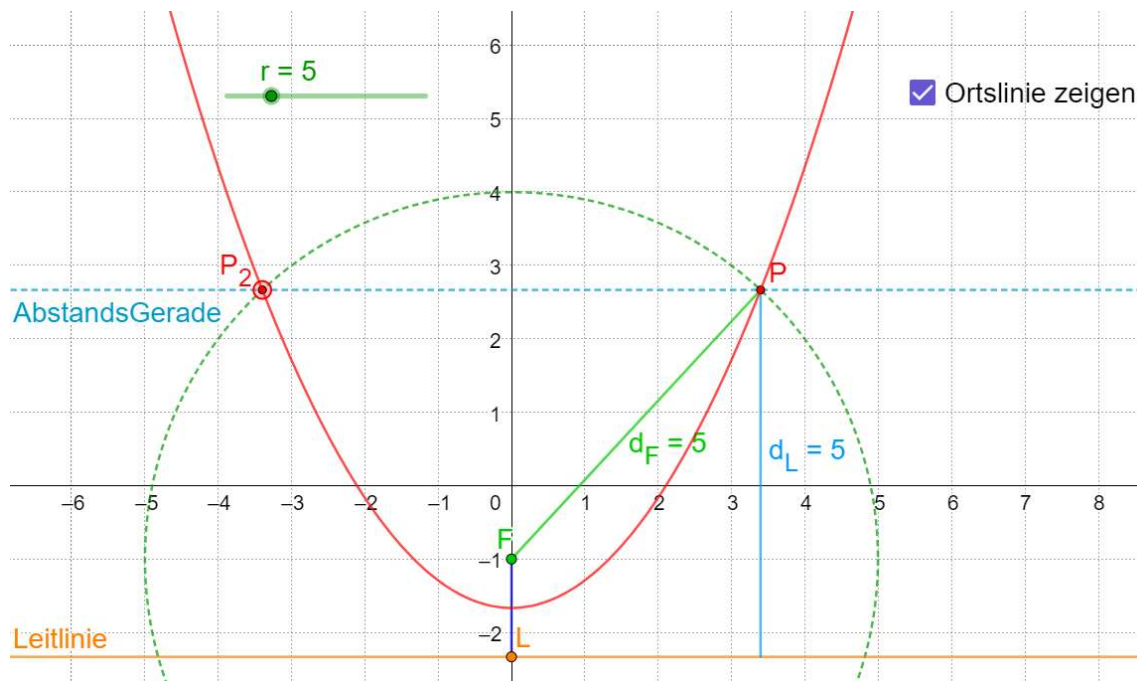


Abbildung 5: Parabel als Ortslinie, mit der y-Achse als Symmetrieachse. Erstellt mit GeoGebra (<http://www.geogebra.org>).

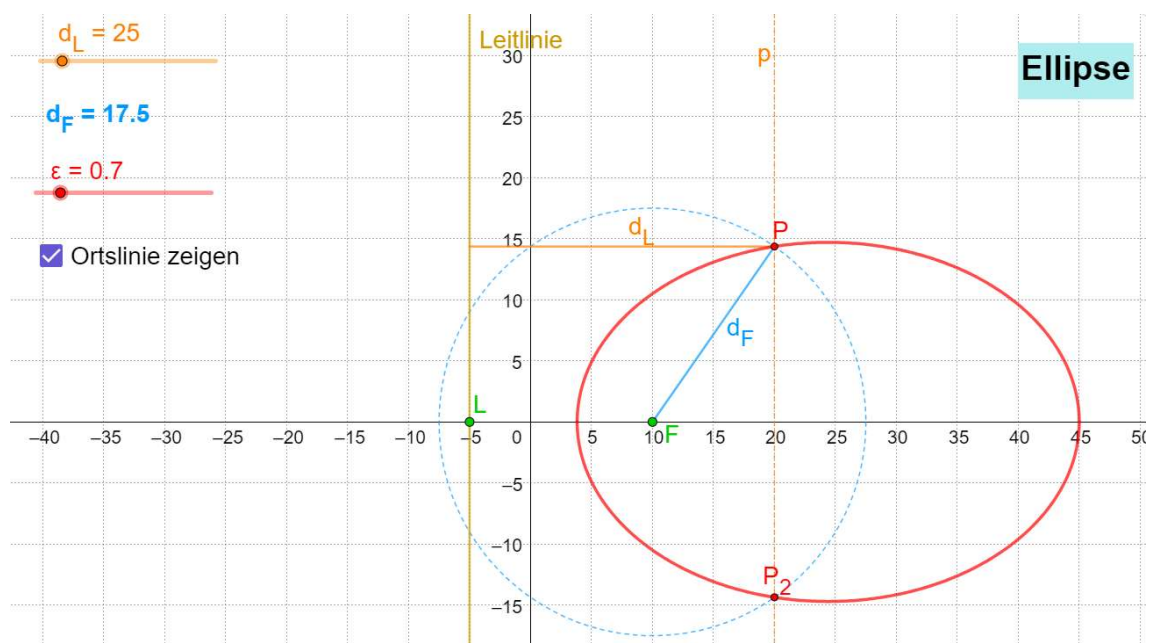


Abbildung 6: Allgemeine Ortslinien-Konstruktion am Beispiel einer Ellipse. Erstellt mit GeoGebra (<http://www.geogebra.org>).

7. Implizite Gleichungen

Die bisherigen Überlegungen waren stereometrisch oder planimetrisch, also geometrischer Natur. Bei der Suche nach einer Repräsentation durch Gleichungen

kommen wir zum analytischen Aspekt. Implizite Gleichungen können aus den Abstandseigenschaften gewonnen werden (siehe z.B. Lietzmann 1949, S. 51f). Wie bei den Abstandseigenschaften können aber nun Schülerinnen & Schüler diese mit Hilfe dynamischer Lernumgebungen entdecken. Dazu wird die Einführung eines kartesischen Koordinatensystems unumgänglich. Wir betrachten nur die Fälle, wo der ‚Mittelpunkt‘ einer Ellipse (bzw. Hyperbel) im Ursprung des Koordinatensystems liegt. Für die Parabel gibt es naheliegenderweise keine Mittelpunktform, sondern eine Scheitelpunktform.

- Eine Ellipse ist durch die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ beschrieben. a und b sind dabei die Halbachsen der Ellipse, die Abstände der Scheitelpunkte vom Ursprung des Koordinatensystems.
- Eine Hyperbel ist durch die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ beschrieben. a ist wieder der Abstand der Scheitelpunkte vom Ursprung des Koordinatensystems. b ist etwas schwieriger zu verstehen und zu finden, dazu braucht man die Asymptoten der Hyperbel: b erhalten wir, wenn wir im Scheitelpunkt die Senkrechte zur x -Achse errichten und mit der Asymptoten schneiden (siehe Abbildung 7).

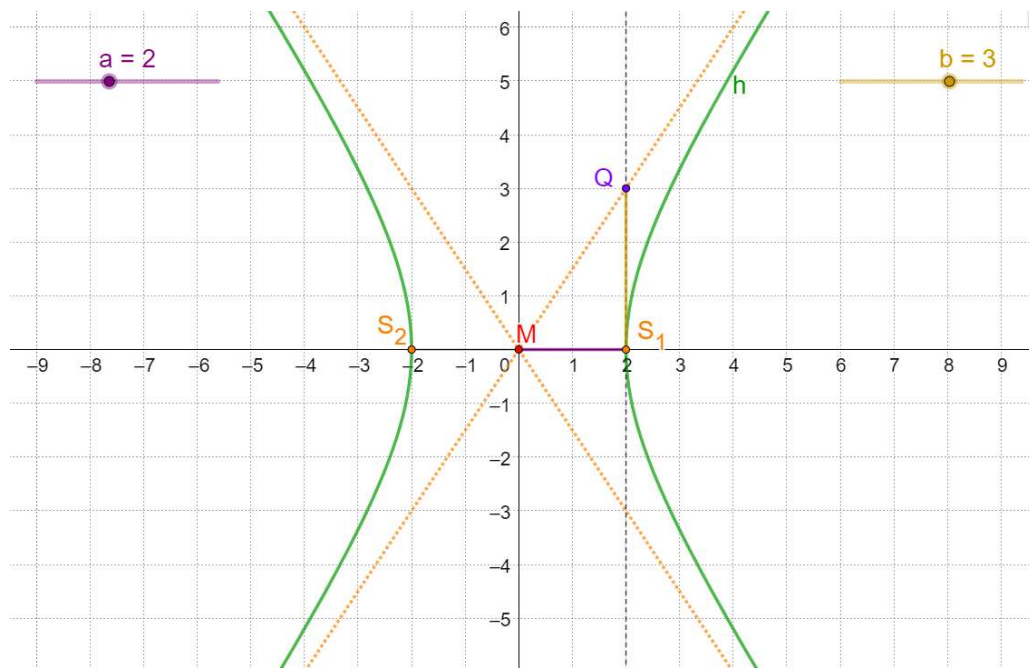


Abbildung 7: Mittelpunktgleichung einer Hyperbel. Erstellt mit GeoGebra (<http://www.geogebra.org>).

- Durch die Gleichung $y^2 = 2px$ wird eine Parabel beschrieben, hier liegt der Scheitelpunkt im Ursprung des Koordinatensystems. Dabei ist p der y -Wert der Parabel im Brennpunkt, der Wert $2p$ wird dann auch als Sperrung der Parabel bezeichnet (siehe Abbildung 8).

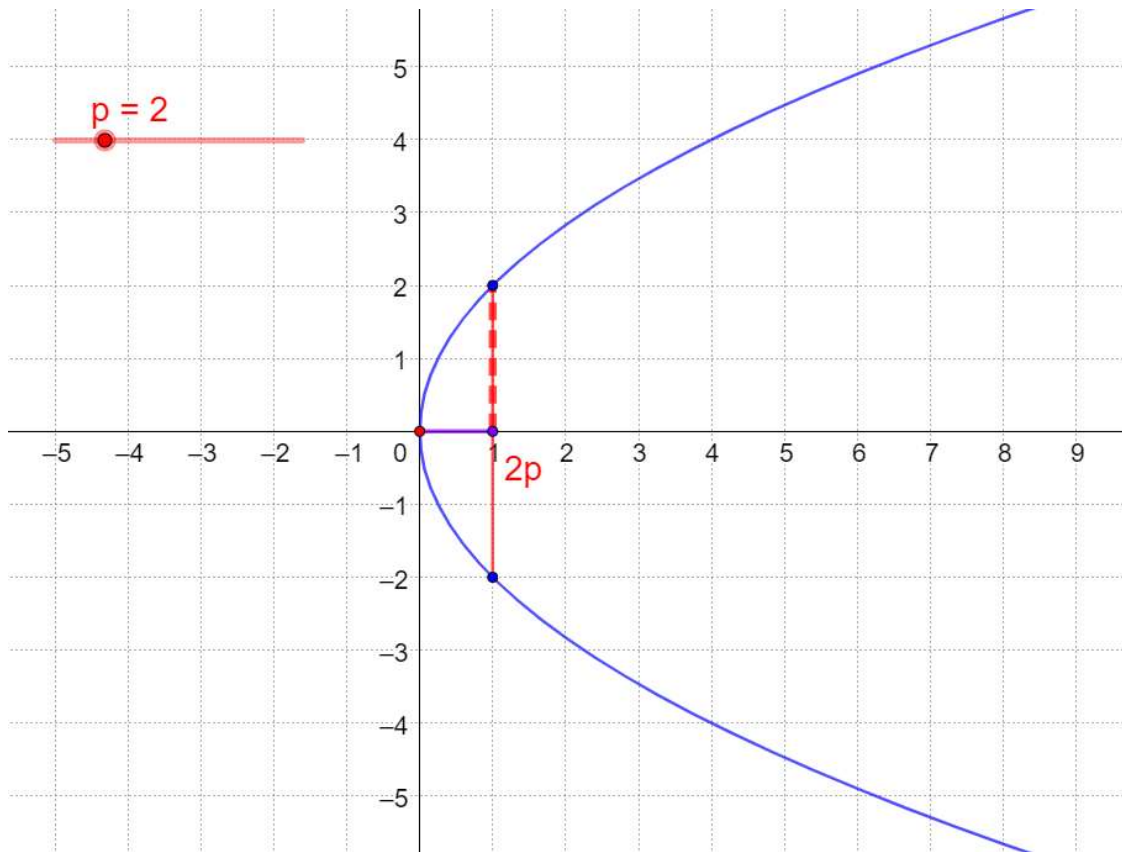


Abbildung 8: Scheitelpunktgleichung einer Parabel. Erstellt mit GeoGebra (<http://www.geogebra.org>).

Wiederum kann man den Spezialfall der Parabel mit Hilfe der numerischen Exzentrizität ε zu einer einheitlichen und ganzheitlichen Formel verallgemeinern:

- Die allgemeine Scheitelgleichung eines Kegelschnitts lautet:

$$y^2 = 2px + (\varepsilon^2 - 1)x^2.$$

Hier sieht man insbesondere, dass die Parabel als Grenzlinie zwischen Ellipsen und Hyperbeln verstanden werden kann.

8. Parametrische Kurven

Ein zweiter analytischer Ansatz sind parametrische Kurven. Zumindest beim Kreis zählt dies durchaus zum Schulstoff, für die Ellipse ist es leicht einsehbar:

- Kreis: $(r \cdot \cos(t), r \cdot \sin(t))$,
- Ellipse: $(a \cdot \cos(t), b \cdot \sin(t))$.

Die Parametrisierungen für Hyperbel und Parabel sind nicht mehr schulüblich:

- Hyperbel: $(a \cdot \cosh(t), b \cdot \sinh(t))$,
- $(\frac{2p}{t^2}, \frac{2p}{t})$.

Hier kann ebenfalls der Ansatz für die Parabel mit Hilfe der numerischen Exzentrizität ε zu einer einheitlichen Formel für alle Kegelschnitte erweitert werden:

$$\left(\frac{2p}{t^2 - \varepsilon^2 + 1}, \frac{2pt}{t^2 - \varepsilon^2 + 1}\right).$$

9. Parametrische Kurven

Kegelschnitte haben eine so große praktische Bedeutung, dass kaum verständlich ist, dass sie fast völlig aus der Schule verschwunden sind:

- Die Planetenbahnen sind nur mit Hilfe von Kegelschnitten zu verstehen und vorherzusagen.
- Parabeln sind Querschnitte von Parabolantennen und Radioteleskopen.
- Das olympische Feuer wird mit Hilfe eines Parabolspiegels entfacht.
- Moderne Stahlbrücken basieren auf Parabeln.
- Der Wasserstrahl eines Springbrunnens verläuft bei schräger Austrittsdüse parabelförmig.
- Nierensteinzertrümmerer nutzen den zweiten Brennpunkt einer elliptischen Wanne.
- Kühltürme von Kraftwerken haben Hyperboloid-Form.

10. Didaktisches und Schulisches

Klassischerweise erforderte die Behandlung von Kegelschnitten großen zeichnerischen und algebraischen Aufwand. Hier wird stattdessen mit umfangreichem Einsatz von 3D-DGS ein anschaulicher und genetischer Kursgang mit ganzheitlichen Sichtweisen präsentiert, der die langwierigen und fehleranfälligen geometrischen und algebraischen Hürden im Umgang mit Kegelschnitten durch den konsequenten Einsatz dynamischer Lernumgebungen vermeidet bzw. umgeht und dazu die Möglichkeiten der mächtigen Tools von 3D-DGS nutzt. *Dynamische Visualisierung* und *systematische Variation* als wesentliche Prinzipien beim Einsatz digitaler Werkzeuge (Elschenbroich & Dutkowski 2023, S. 403) werden durchgängig genutzt. Dabei werden fundamentale Gedanken der Meraner Reform umgesetzt, nämlich „den Lehrgang mehr als bisher dem natürlichen Gange der geistigen Entwicklung anzupassen“ und „die Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens“ (Gutzmer 1908, S. 104) und es soll dabei die „fortwährende Betrachtung der Änderungen gepflegt werden, die die ganze Sachlage durch Größen- und Längenänderungen im einzelnen erleidet“ (Gutzmer 1908, S. 113),

In einer Situation, wo dieses reichhaltige und wichtige Thema mittelfristig kaum ausreichend Platz in den Lehrplänen und Bildungsstandards finden wird, ist dies vorwiegend ein Angebot, Kegelschnitte schon ab der Sekundarstufe I in Projektwochen, Kursarbeiten und Referaten niedrigschwellig zugänglich zu machen und spiralig aufzubauen. Dies können wir hier mit 3D-DGS und dynamischen Lernumgebungen erreichen.

Literatur:

- Elschenbroich, Hans-Jürgen (2023): Kegelschnitte mit GeoGebra 3D erkunden – genetisch, ganzheitlich, dynamisch, anschaulich. In: Filler, A., Lambert, A. & von der Bank, C. (2023): Freude an Geometrie – Zum Gedenken an Hans Schupp. Springer Spektrum. S. 143 – 172
- Elschenbroich, Hans-Jürgen (2021): Kegelschnitte dynamisch erkunden. GeoGebra Book. <https://www.geogebra.org/m/mmpd8yeq>
- Elschenbroich, Hans-Jürgen & Dutkowski, Wilfried (2023): ‚Erfolgreicher Mathematikunterricht mit dem Computer‘ vor 25 Jahren und heute.
In: MNU journal 5/2023. Verlag Seeberger. S. S. 401 – 406.
- Gutzmer, August (1908): Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin.
- Hilbert, David & Cohn-Vossen, Stephan (1996): Anschauliche Geometrie. Springer
- Lietzmann, Walter (1949): Elementare Kegelschnittlehre. Dümmler.
- Schupp, Hans (2000): Kegelschnitte. Franzbecker

Link GeoGebra Book

www.geogebra.org/m/mmpd8yeq



Corinna Hankeln^a, Ulf Kroehne^b, Sebastian Groß^{a,c}, Lea Voss^a & Susanne Prediger^{a,c}

^a Technische Universität Dortmund,

^b DIPF Leibniz-Institut für Bildungsforschung und Bildungsinformation, Frankfurt,

^c IPN Leibniz-Institut für Pädagogik der Naturwissenschaften / Mathematik, Berlin,

corinna.hankeln@math.tu-dortmund.de

User-Experience-Design und Instruktionen für Lernende und Lehrkräfte in digitalen formativen Assessments

Immer wenn Lernende digitale Tests bearbeiten, muss sichergestellt werden, dass die eigentlichen Diagnosen nicht von Bedienproblemen verdeckt werden. Auch müssen Lehrkräfte digitale Assessments durchführen und auswerten können. Der Beitrag beleuchtet unter Einbezug theoretischer Ansätze zum Cognitive Load als auch Prinzipien des UX Designs, ein Konzept, wie im Online-Check (Mathe sicher können) bei Lernenden und Lehrkräften die Bedienprobleme reduziert werden.

1. Motivation

Dass die Entwicklung von Aufgaben zu Diagnose- oder Testzwecken ein zyklischer Prozess ist (Mislevy et al., 2012), bei dem verschiedene Kriterien guter Testaufgaben zunehmend besser berücksichtigt werden können (Moosbrugger & Kelava, 2020), ist hinlänglich aus Jahrzehnten der Forschung im Bereich der Testentwicklungen bekannt. Bei der Erstellung eines computerbasierten Assessments digitalen Auslieferungsformats kommen zu diesen Überlegungen weitere Design-Entscheidungen hinzu, die sich auf die konkrete Gestaltung der Aufgabenformate und deren Präsentation beziehen (Schmidt et al., 2020). Weitere Design-Entscheidungen sind notwendig aufgrund der deutlich erweiterten Möglichkeiten, die computerbasierte Assessments gegenüber papierbasiertem Assessment mit sich bringen. Design-Mängel im Umgang mit den erweiterten Möglichkeiten können ungewollte Hürden erzeugen, die eine reliable Diagnose verhindern könnten (Bearman et al., 2020). Der vorliegende Beitrag zeigt auf, wie allgemeine Prinzipien aus den Theorien der Human-Computer Interaction (Rogers, 2012) mit fachdidaktischen Überlegungen sowohl zu den Diagnosen als auch den spezifischen Bedürfnissen einer Lehrkraft verbunden werden können. Ausgangspunkt sind dabei die sogenannten Online-Checks¹ des Diagnose- und Förderprogramms *Mathe sicher können* (im Überblick Prediger, 2023), bei denen die zu verschiedenen Fördereinheiten gehörigen Kurzdiagnosen (Selter et al., 2014) digitalisiert verwendet werden.

¹ <https://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/online-check>

2. Theoretische Überlegungen

Entscheidungen über das Design von Aufgaben, deren medial-technische sowie didaktische Ausgestaltung, und auch über die Form der Aufbereitung von Ergebnissen, müssen auch bei Papier-Aufgaben getroffen werden. Dies betrifft unter anderem die optische Gestaltung von Aufgaben, deren Anzahl und Abfolge der Präsentation und manchmal auch die Integration von Hilfestellungen. Dabei hat sich die Cognitive-Load-Theorie (Sweller et al., 2011) bereits vielfach bewährt, um unterschiedliche Arten der kognitiven Belastung zu identifizieren. Ausgangsannahme der Theorie ist, dass ein Individuum nur über eine begrenzte Menge an kognitiven Ressourcen verfügt, um Informationen zu verarbeiten (Mayer & Moreno, 2003; Paas et al., 2003). Dabei werden drei Arten von kognitiver Belastung unterschieden: (1) *Intrinsic Cognitive Load*, d. h. kognitive Belastungen durch das aktive Verarbeiten oder Halten von verbalen oder visuellen Informationen im Arbeitsgedächtnis; (2) *Extraneous Cognitive Load*, d.h. zusätzliche kognitive Belastungen durch Elemente, die nicht essentiell für das Lernen sind, aber dennoch verarbeitet werden müssen und (3) *Germane Cognitive Load*, d.h. die kognitive Belastung, die durch die Konstruktion neuer Schemata im Langzeitgedächtnis entsteht und die damit für effektives Lernen sorgt (Paas et al., 2003). Ein mangelhaftes Design von Aufgaben kann zu einer deutlichen Erhöhung des Extraneous Cognitive Loads führen und damit Ressourcen zur Verarbeitung des erwünschten Germane Cognitive Loads blockieren (Schmidt et al., 2020).

Wenn zur Beantwortung einer Frage zusätzlich Überlegungen angestellt werden müssen, wie die gefundene Antwort abgegeben werden kann, so stellen diese Überlegungen einen Extraneous Cognitive Load dar. Sollen Lernende beispielsweise eine Multiplikation in einem digitalen Tool als Würfelbild darstellen (**Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.**), so müssen diese neben den inhaltlichen Überlegungen, welche Würfel sie legen wollen, auch darüber nachdenken, wie sie die Würfel in dem digitalen Format überhaupt anordnen können.

Kann ich Multiplikations-Aufgaben zu Situationen finden und umgekehrt?

1 Multiplikation und Würfelbilder

b) Lege ein Würfelbild, das zu der Aufgabe $2 \cdot 6 = 12$ passt.
Du kannst die Würfel mehrfach nutzen, wenn du möchtest.

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

•

Lernende müssen sich also erschließen, ob sie die Würfelabbildungen anklicken müssen, sie per Drag-and-Drop bewegen müssen und wie sie mögliche Fehler korrigieren können. Brauchen diese Überlegungen zu viele kognitive Ressourcen, können Lernende ihre inhaltlichen Fähigkeiten nicht in vollem Maße zeigen. Im schlimmsten Fall wird die Diagnose von inhaltlichen Fähigkeiten ganz von Bedien-Schwierigkeiten verdeckt. Fragen der User-Experience (Moser, 2012) spielen also eine prominente Rolle bei der Gestaltung einer digitalen Diagnose. Da zur Klärung solcher Fragen eine gründliche Analyse der Anforderung einer Aufgabe, möglichst aller Bearbeitungsarten und der Möglichkeiten der Unterstützung erforderlich ist, zählt auch das User-Experience-Design mit in den fachdidaktischen Aufgabenbereich (Minichiello et al., 2018). Die Aufgabe aus

Abbildung 1 beispielweise entspricht der Digitalisierung einer Aufgabe, bei der die Lernenden in ein leeres Feld die entsprechenden Würfel zeichnen sollten. Da dieses Zeichnen, insbesondere bei der Bedienung mit einer Maus, relativ zeitaufwändig ist, wurde für die digitale Version ein Drag-and-Drop-Format genutzt, bei dem die Würfel auf dafür vorgesehene Felder abgelegt und auch wieder entfernt werden können. Dazu muss den Nutzenden möglichst schnell klarwerden, wie sie den gewünschten Endzustand herstellen können. Die Würfel an sich und die leeren Felder haben an sich schon eine relativ hohe Affordanz (Gibson, 1986) und laden zum Interagieren ein. Zusätzlich werden die möglichen Interaktionen, sowohl das Hinzufügen als auch das Entfernen von Würfeln, in einem Piktogramm mit hinterlegtem Video sowie einer spezifischen Instruktion, also einem Tutorial zum Ausprobieren des Formats, erläutert. Fachdidaktisch wichtiger und anders als in der Papier-Version ist allerdings, wie viele leere Felder angeboten werden. Es ist offensichtlich, dass die korrekten Lösungen, zwei 6er-Würfel genauso wie sechs 2er-Würfel, möglich sein müssen. Allerdings darf die Anzahl der freien Felder auch nicht die korrekte Anzahl an Würfeln bereits suggerieren. Daher wurden letztlich 12 Felder angeboten, so dass auch eine Um-Interpretation der 1er-Würfel und damit die Erstellung eines Punktefelds möglich wäre (Abbildung 2).

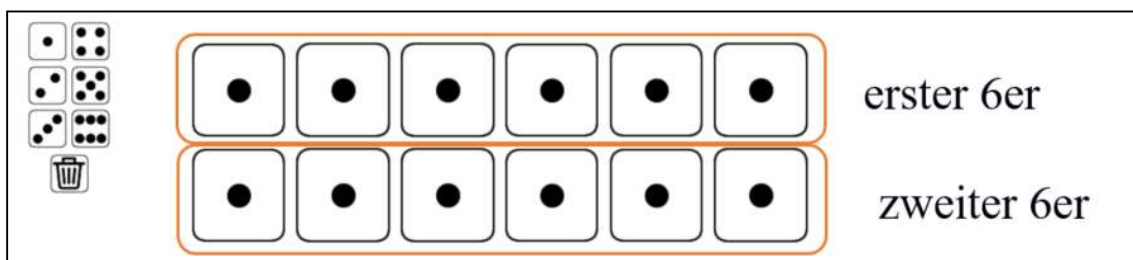


Abbildung 2: Mögliche Lernenden-Antwort: Uminterpretation der 1er-Würfel als Punkte im Punktefeld

Dass eine solche Antizipation der nicht konformen Antworten nicht immer rein aus theoretischer Perspektive gelingt, zeigen die Antworten von Lernenden in einer der Pilotstudien mit der Aufgabe aus Abbildung 2. Dort wurden zum einen zwei 6er und dann nach einer Lücke ein 2er und ein 6er gelegt (vgl. Abbildung 3 links) und somit entgegen der Aufforderung mehr als eine Aufgabe gelegt. Auf den ersten Blick unverständlich ist hingegen die Würfelreihe 2,1,6,6,1,2, die von

einigen Lernenden gelegt wurde (vgl. Abbildung 3 rechts). Diese Antwort ergibt jedoch Sinn, wenn der 1er und der zweite 6er-Würfel als Entsprechung der Rechenzeichen gedeutet werden, da so aus der Zahlenfolge eine Entsprechung der sichtbaren Zahlen in der Rechenaufgabe entsteht. Diese Antwort zeigt, dass die Anzahl der leeren Felder passend ist, da sie so das Legen einer solchen Antwort überhaupt erst ermöglicht ohne Zeilenumbruch. Es fällt weiterhin auf, dass auch so kleine Entscheidungen, wie dass der 6er-Würfel horizontal statt um 90 Grad gedreht abgebildet ist, Auswirkungen auf die entstehenden Antworten haben kann. An dieser Stelle wurde sich nach den Erprobungen bewusst dazu entschieden, diese Ausrichtung beizubehalten und die mögliche Fehlantwort mit in die Auswertung aufzunehmen.

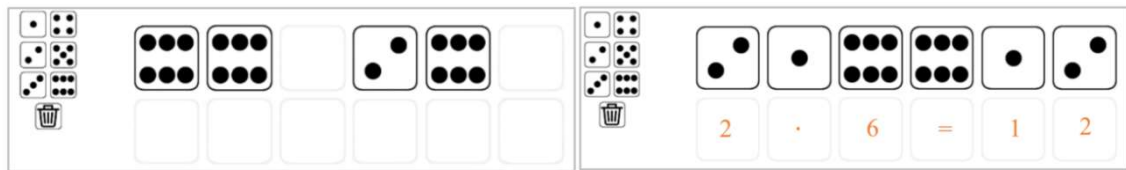


Abbildung 3: Nichterwartungskonforme Lernenden-Antworten zu der Würfelaufgabe: Links: Mehr als eine Aufgabe gelegt; Rechts: Rechenaufgabe inkl. Rechenzeichen mit Würfeln gelegt.

Die bisherigen Überlegungen haben sich vor allem auf die Gestaltung der Diagnose-Aufgaben im digitalen Format und damit auf die Lernenden-Perspektive bezogen. Doch auch auf Seiten der Lehrkräfte, die digitale Assessments vorbereiten, in der Praxis umsetzen und auswerten, sind Bedienungsherausforderungen zu reduzieren. Somit stellen sich ebenfalls Fragen des User-Experience-Designs im Hinblick auf die Lehrkräfte und deren Nutzungsweisen eines entsprechenden digitalen Tools mit ihren Lernenden.

Ein Forschungsbereich, der sich damit beschäftigt, zu verstehen, wie die Interaktion zwischen Technologie und den Nutzenden abläuft, ist die Human-Computer-Interaction (Rogers, 2012). In diesem Forschungsgebiet werden Interaktionen aus verschiedenen Perspektiven betrachtet, eine davon ist der Bereich der User-Experience (UX). Dabei beschreibt UX “a person’s perceptions and responses that result from the use or anticipated use of a product, system, or service” (International Organization for Standardization [ISO], 2010, Terms and Definitions section, para 2.15). Damit konzentriert sich die UX auf die Nutzenden, ihre Motivationen, Fähigkeiten und Bedürfnisse. Eine gute UX zeichnet sich dadurch aus, dass die Ziele der Anwendung mit den Wahrnehmungen und Reaktionen der Nutzenden in Einklang stehen (Moser, 2012). Mit anderen Worten sollen gute UX-Entscheidungen zur Erreichung des Ziels beitragen, dass die Nutzenden, in unserem Fall die Lehrkräfte, einen Mehrwert in der digitalen Umsetzung des formativen Assessments sehen. Dieser Mehrwert lässt sich (Morville, 2005) zufolge in sieben Facetten unterteilen (s. Abbildung 4).



Abbildung 4. Das Honeycomb-Modell der User Experience (UX) nach Morville (2005)

Dieses Modell ist nicht auf eine spezifische Software beschränkt, sondern beschreibt allgemeine Anforderungen. Daher ist es auch an dieser Stelle nötig, die Kriterien entsprechend den Anforderungen der Zielgruppe, nämlich den Lehrkräften zu spezifizieren. Wie eine solche Spezifikation auch aus fachdidaktischer Perspektive aussehen kann, wird im Folgenden anhand des Online-Checks des Diagnose- und Förderprogramms Mathe sicher können (MSK) illustriert.

3. Optimierung der User-Experience im MSK-Online-Check

Das Diagnose- und Förderprogramm Mathe sicher können (MSK) wird seit 2010 in intensiven Design-Research- und Wirksamkeits-Studien entwickelt, empirisch erprobt und für Lernende und Lehrkräfte sukzessive weiterentwickelt (Prediger, 2023). Entstanden ist Diagnose- und Fördermaterial zur Erarbeitung oder Aufarbeitung von mathematischen Basiskompetenzen in den Jahrgängen 3-7 (Selter et al., 2014), bei dem zu 45 Förderbausteinen (zu Natürlichen Zahlen, Brüche, Dezimalzahlen und Sachrechnen) jeweils ein Set an Diagnose-Aufgaben ermöglicht, vor Beginn oder während der Förderung festzustellen, welches Potential die Lernenden in den verschiedenen Lernbereichen mitbringen und wie die Förderung je nach individuellen Schwierigkeiten akzentuiert werden sollte (Prediger, 2023).

Im MSK–Online-Check werden diese Sets an Diagnose-Aufgaben als digitale Kurztests zugänglich gemacht. Die Digitalisierung verfolgt dabei mehrere Ziele:

- (1) Reduktion des Korrekturaufwands für Lehrkräfte, indem geschlossene und halboffene Aufgaben automatisch durch das System bewertet werden;
- (2) Erhöhung der Informativität für Lehrkräfte, indem die gegebenen Antworten automatisch auf Systematiken hin untersucht und entsprechende Auswertungen ausgegeben werden;
- (3) Optimierung der Aussagekraft der Diagnostik der Kompetenzen durch Einsatz interaktiver Elemente sowie Auswertung der Prozess-Daten;
- (4) Erkenntnisgewinn auf der Forschungsseite durch Analyse sowohl der Lernenden-Daten als auch der Aktivitäten der Lehrkräfte.

Die Auslieferung des MSK–Online-Checks gliedert sich in zwei Ebenen: Zum einen gibt es die Umgebung *alea.schule*, in der sich Lehrkräfte anmelden, die Online-Checks für ihre Lerngruppen vorbereiten und im Anschluss an die Durchführung die Antworten der Lernenden auf offene Aufgaben analysieren. Die Bearbeitung der Diagnose-Aufgaben durch die Lernenden hingegen erfolgt im Browser auf der Website *www.alea.schule*. Die dort präsentierten Aufgaben wurden mit dem CBA ItemBuilder (Kroehne, 2023) erstellt.

Auf beiden Ebenen spielt das Design der Umgebungen eine entscheidende Rolle, wenn auch mit unterschiedlicher Zielsetzung. Bei der Gestaltung der diagnostischen Aufgaben ist dafür Sorge zu tragen, dass mathematische Kompetenzen und Schwierigkeiten auch wirklich sichtbar werden und nicht nur Probleme der Bedienung der unterschiedlichen Elemente erfasst werden. Auf Seiten der Lehrkräfte spielt die intuitive Bedienbarkeit insbesondere für die Akzeptanz, die affektive Haltung und das Engagement eine Rolle, welche als Voraussetzung für eine möglichst ausführliche Auseinandersetzung mit den zentralen Diagnose-Aspekten angesehen werden kann.

Im Folgenden werden die im MSK–Online-Check angewandten Design-Entscheidungen für beide Ebenen illustriert und diskutiert.

3.1. Gestaltung der Diagnose-Aufgaben und der Instruktionen für Lernende

Die Diagnose-Aufgaben der MSK–Online-Checks nutzen eine Vielzahl an Aufgabenformaten. Neben Multiple- oder Single-Choice-Formaten sowie ganz offenen Eingabefeldern gibt es auch verschiedene interaktive Elemente, bei denen etwas gezeichnet werden soll, und zwar mit freier Stifteingabe oder als digital gestütztes Einzeichnen, z. B. von Bögen am Zahlenstrahl. Hinzu kommen Mischformen, bei denen Bilder gezeichnet und beschriftet werden sollen sowie Drag-and-Drop-Formate, wie z.B. zum Legen von Würfelbildern. Bei Sachaufgaben sind auch Aufgaben zur Längenmessung mit einem digitalen Lineal integriert, das korrekt angelegt werden soll. Dabei können die Online-Checks sowohl mit Tastatur und Maus, als auch per Touch-Eingabe bearbeitet werden. Es stellt sich also die Frage, wie Bedienungshilfen so gegeben werden können, dass sie (a) treffsicher und trotzdem prägnant die Bedienung erklären, (b) allgemein genug sind, dass sie für unterschiedliche Implementationssituationen zutreffen, (c) dass sie keine inhaltlichen Hilfen geben, (d) auf den individuellen Unterstützungsbedarf der Bedienenden angepasst sind und (e) eine Überprüfung ihrer Passung ermöglichen.

Dabei ist aus mathematikdidaktischer Sicht besonders zu beachten, dass an manchen Stellen Schwierigkeiten bei einer bestimmten Aufgabe nicht automatisch auf fehlendes Wissen über die Eingabemechanismen zurückzuführen sind: Da viele Aufgaben in den MSK–Online-Checks Vorstellungen an verschiedenen Darstellungen (wie etwa den Würfelbildern oder dem Zahlenstrahl) adressieren, ist darauf zu achten, dass inhaltliche Schwierigkeiten der Kinder sichtbar bleiben. Es sollen nur die Fälle vermieden werden, in denen die Lernenden eine Aufgabe auf Papier

lösen könnten, ihnen aber die Eingabe im Digitalen nicht gelingt. Gleichzeitig sollen die Formate so schnell verständlich sein oder zumindest so unterstützt werden, dass der Extraneous Cognitive Load reduziert wird.

Äußere Rahmung durch Instruktionen

Eine erste Design-Entscheidung zur Reduktion des Extraneous Cognitive Load (Mayer & Moreno, 2003; Sweller et al., 2011) bezog sich auf die Vorab-Entlastung durch Instruktions-Aufgaben die in die Nutzung der Bedienelemente vor dem Start des Tests einführen: Durch die Vielzahl der unterschiedlichen Antwortformate erschien eine Aufteilung in regelmäßig benötigte Bedienformate und spezifische Anforderungen eines Bausteins sinnvoll. Die Lernenden werden nach dem Anmelden auf der Diagnose-Website gefragt, ob sie schon einmal einen Online-Check bearbeitet haben. Verneinen sie diese Frage, so werden ihnen zunächst allgemeine Instruktionen angezeigt (vgl. Abbildung 5). Dabei handelt es sich um Beispielaufgaben, bei denen die Lernenden häufig benötigte und eigentlich selbsterklärende Eingabeformate, wie Eingabefelder (mit oder ohne Rechenzeichen) und Multiple-/Single-Choice Formate, ausprobieren können. Insbesondere werden sie an diesen Stellen auch auf weitere Unterstützungsangebote innerhalb der Aufgaben, wie Piktogramme und Instruktionsvideos, hingewiesen. Zusätzlich zu den allgemeinen Instruktionen beim Erstkontakt mit dem MSK–Online-Check, gibt es für jeden Baustein auch spezifische Instruktionen, bei denen besondere Eingabeformate des jeweiligen Bausteins ausprobiert werden können, etwa den Bruchstreifen bei Bausteinen zum Bruchverständnis oder das Lineal bei Bausteinen zu Längen. Diese Items zum Ausprobieren der Bausteine nehmen nur wenig Zeit in Anspruch, sollen aber Fragen zur Bedienung frühzeitig klären lassen, bevor die eigentliche Diagnose beginnt.

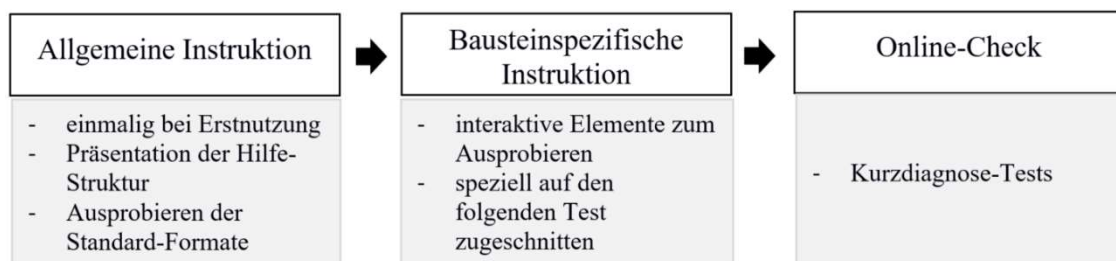


Abbildung 5: Ablauf der Instruktionen bis zur Durchführung eines Online-Checks

Für das Design dieser Instruktionsaufgaben wurde darauf geachtet, dass die Lernenden sich rein auf die Bedienung konzentrieren können. Sie müssen also keine inhaltliche Aufgabe lösen, sondern lediglich eine vorgegebene Lösung korrekt eingeben. Bei sehr komplexen Formaten, wie den Rechenkästchen zur Notation von (halb-)schriftlichen Rechnungen, werden dabei auch Kontrolllösungen angeboten. Zentrales Ziel dieser Instruktionen ist, dass die Bedienung für alle Lernende möglichst unabhängig von der Vertrautheit mit der Computerumsetzung ist (Kröhne & Martens, 2011).

Instruktionen und Bedienhilfen innerhalb einer Diagnose-Aufgabe

Neben diesen Instruktionen, die der eigentlichen Bearbeitung vorgeschaltet sind, gibt es auch Hilfen, die während der Bearbeitung sichtbar bzw. abrufbar sind. So gibt es ein wiederkehrendes Symbol mit blauen Zahnrädern, in dem ein oder mehrere Piktogramme mit einem kurzen Schlagwort zur Bedienung zu sehen sind (vgl.

Abbildung 1, rechts oben). Wenn dieser kurze Hinweis noch nicht ausreicht, so kann das Piktogramm auch angeklickt werden, dann illustriert ein kurzes (aus organisatorischen Gründen tonlos) Video die Bedienung. An dieser Stelle wurde bewusst ein Video und nicht erneut eine interaktive Beispielaufgabe gewählt, da die Instruktion an dieser Stelle die Lernenden möglichst wenig aus dem Fluss der Aufgabenbearbeitung bringen sollte. Gleichzeitig darf das Video aber keine inhaltliche Hilfe darstellen, um die Aussagekraft der Diagnosen nicht zu verfälschen, daher wurden dort oft Ausschnitte der bausteinspezifischen Instruktion gewählt. Eine besondere Schwierigkeit bei dieser Analyse ist dabei, dass den schulpraktischen Bedingungen, bei denen sowohl Tablet als auch Notebooks oder Stand-PCs zum Einsatz kommen können, allesamt Rechnung getragen werden soll. Die Instruktion muss also passend zu der gewählten Eingabe-Art präsentiert werden, daher reagieren die instruierenden Piktogramme teilweise interaktiv auf die Lernenden-Auswahl des Eingabe-Modus. Für die inhaltliche Gestaltung der Hilfen selbst spielt die fachdidaktische Analyse erneut eine entscheidende Rolle. Zur Erstellung einer Instruktion muss geklärt werden, wie Lernende vorgehen könnten, welche Fragen sich bei der Bearbeitung der Aufgaben ergeben können und wie Instruktionen keine Rechenstrategien vorwegnehmen. Die Komponente des Rechenkästchens (ABB) beispielsweise wird in vielen Aufgaben zum verständigen Rechnen eingesetzt. Insbesondere ermöglicht diese Komponente auch im Tippen-Modus die Eingabe von kleinen Zahlen, um Überträge von den Zahlen der Aufgabe abzugrenzen. Diese Eingabe-Art ist den Lernenden allerdings zunächst unvertraut und wird in der bausteinspezifischen Instruktion (vgl. Abbildung 5) dadurch geübt, dass eine vorgegebene Additionsaufgabe einfach in die Komponente abgeschrieben werden soll. Diese Übung wird auch illustrierend genutzt in dem Video, welches im Piktogramm zum Rechenkästchen (vgl. Abbildung 6 ganz links) genutzt wird. Für die Instruktion wurde die Design-Entscheidung getroffen, die einzelnen Komponenten im Zusammenhang mit dem Bearbeitungsprozess einer konkreten Aufgabe zu illustrieren und nicht jede Funktion für sich allein gestellt. Insbesondere bei den Überträgen bestünde sonst das Risiko, dass Lernende den Sinn dieser Art der Zahlen im Zusammenhang mit einer Aufgabe nicht verstehen. Es wurde für die Instruktion eine einfache Addition gewählt, die die Bedienweise illustriert. Dieses Video wird auch in Aufgaben der Multiplikation, Division und Subtraktion verwendet, wo teilweise die Notationen noch eine größere Vielfalt aufweisen und eine spezifische Instruktion nicht ohne Lenkung zu einem bestimmten Verfahren hin möglich wäre. Kurz gefasst wird also die Bedienweise aufgabenbezogen und nicht „button-spezifisch“ illustriert, aber die Aufgabe an sich ist losgelöst von der Diagnose-Aufgabe, um keine Prozessschritte vorwegzunehmen.



Abbildung 6: Ausschnitte des Instruktionsvideos zum Tippen im Rechenkästchen: Auf die Text-einblendung folgt stets ein Videoausschnitt, in dem der jeweilige Schritt vorgemacht wird

Um die kognitive Belastung der Lernenden durch ständig wechselnde Eingabe-Formate zu reduzieren, wird im Online-Check weiterhin versucht, möglichst oft die gleichen Komponenten wiederzuverwenden, wenn auch in unterschiedlichen Situationen. So wird das Rechenkästchen aus **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.** auch in Aufgaben eingesetzt, bei denen die Trennung der Eingabeformen nicht thematisiert wird, sondern beispielsweise eine beschriftete Skizze erstellt werden soll. In diesem Fall sollen beide Eingabe-Arten unabhängig vom genutzten Gerät verwendet werden. Dementsprechend wird an dieser Stelle auch ein alternatives Video verwendet, welches den kombinierten Gebrauch illustriert. Damit wird das erneute Kennenlernen einer weiteren Komponente überflüssig, und es bleiben mehr Kapazitäten frei für die inhaltliche Beschäftigung.

Weiterhin wird an einigen Stellen auch durch das System eingeschränkt, welche Zeichen Lernende überhaupt eintragen dürfen. Bei Aufgaben, deren Antwort rein numerisch ist, ist beispielsweise das Eintragen von Buchstaben nicht möglich. Bei dem Versuch der Eingabe erscheint kein Zeichen, stattdessen wird das grüne Fragezeichen (s. Abbildung 7Abbildung 4) rot. Der Klick auf das Fragezeichen bzw. das Ausrufezeichen erläutert, welche Zeichen erlaubt sind einzugeben. Auf diese Art wird die Fehleranfälligkeit der automatischen Auswertung deutlich reduziert. Allerdings ist bei diesen Beschränkungen darauf zu achten, dadurch keine inhaltlichen Fehler zu verdecken, dass also die zu erwartenden inhaltlichen Fehler auch tatsächlich eingetragen werden können.



Abbildung 7: Eingabekontrolle bei einer Aufgabe zum Ablesen einer Zahl aus einer Stellenwerttafel: Grün: Status bei Eingabebeginn bzw. bei regelkonformer Eingabe; rot: Status bei Regelverstoß durch Eingabe eines unerlaubten Zeichens

Im Gegensatz zu den Diagnose-Aufgaben auf Papier, bei denen alle Aufgaben auf einer DIN A4 Seite abgedruckt sind, wird bei den Online-Checks meist nur eine Teilaufgabe angezeigt. Auf diese Art sind maximal drei verschiedene Eingabeformate gleichzeitig zu sehen, davon maximal eine „besondere“ Eingabeform. Auf diese Weise soll die Aufmerksamkeit der Lernenden jeweils vorrangig auf die gerade zu bearbeitende Aufgabe gelenkt werden, ohne zu sehr abzulenken. Möchte eine Testperson die angezeigte Seite durch den Klick auf den „Weiter“-Button verlassen, so wird ihr in einem Pop-Up-Fenster angezeigt, welche Aufgaben sie bearbeitet bzw. nicht bearbeitet hat. An dieser Stelle kann die Person zur Aufgabe zurückkehren und etwaige übersehene Aufgaben ergänzen. Geht sie jedoch weiter, ist ein erneutes Zurückgehen nicht möglich. Durch dieses Feedback zu fehlenden Antworten soll die Anzahl versehentlich fehlender Werte reduziert werden auf die Fälle, in denen Lernende einzelne Fragen nicht beantworten wollten oder konnten.

Kann ich Divisions-Aufgaben zu Situationen finden und umgekehrt?

1 Mit Division gerecht verteilen

Drei Kinder teilen sich 12 Bonbons.
Jedes Kind bekommt gleich viele.
Wie viele Bonbons bekommt jedes Kind?

a) Schreibe **eine** passende Geteilt-Aufgabe auf:

b) Zeichne ein passendes Bild:

Erkläre dein Bild:

Weiter

So geht's:

Rechenzeichen anklicken

So geht's:

Anklicken und Bewegen
Anklicken und Bewegen
Zeichnen
Alles löschen

Weiter zur nächsten Aufgabe?

Bitte prüfe nochmal, ob du eine Aufgabe vergessen hast.

1 a) Bearbeitet
1 b) Nicht bearbeitet

Mit „Zurück“ kannst du deine Eingabe ändern.
Mit „Weiter“ kommst du zur nächsten Aufgabe.

Zurück Weiter

Abbildung 8: Beispiel einer Aufgaben-Seite im Online-Check: Maximal drei verschiedene Eingabeformate befinden sich auf einer Seite, unterstützt durch Piktogramme. Bei Klick auf "Weiter" öffnet sich ein Dialog-Feld, in dem der Bearbeitungsstatus angezeigt wird.

3.2. Gestaltung der Lehrkräfte-Oberfläche

Bei dem Design der Oberfläche für die Lehrkräfte wurden besonders Prinzipien des User-Experience-Designs berücksichtigt, mit dem Ziel, die Oberfläche möglichst gut an die Bedürfnisse der Lehrkräfte anzupassen. Im Folgenden wird erläutert, wie das Design den sieben Prinzipien des User-Design Honeycomb (Abbildung 4; Morville, 2005) Rechnung trägt.

Prinzip 1: Nützlich (useful)

Das Ziel des MSK–Online-Checks besteht in der Verkürzung der benötigten Korrekturzeit bei gleichzeitiger Erhöhung der Informativität. Dazu wurden die Aufgaben, wo immer es möglich war, so gestaltet, dass eine automatische Kodierung erfolgen kann. Die Lehrkräfte haben in *alea.schule* aber die Möglichkeit, die automatische Kodierung zu überschreiben, sollten sie nicht damit einverstanden sein. Diese Option macht deutlich, dass der Online-Check als ein diagnostisches Werkzeug der autonom agierenden Lehrkräfte angesehen werden kann, welches Hinweise auf die zentralen Aspekte gibt und so die fachdidaktischen Kompetenzen der Lehrkräfte unterstützen kann, die Entscheidungshoheit über die Wertung von Aufgaben aber stets bei den Lehrkräften liegt.

Die automatische Korrektur ist analytisch bei einer Vielzahl von Aufgaben möglich, bei weiteren Antwortformaten erfolgt die Sammlung von Trainingsdaten zur Vorbereitung künftiger Korrekturvorschläge auf Grundlage von maschinellem Lernen, um Lehrkräfte auch bei der Bewertung offener Antworten zu unterstützen.

Ein weiterer großer Nutzen liegt in den automatisch generierten Zusammenfassungen, die die Lehrkraft abrufen kann. Diese resümieren die Antworten der Lernenden entweder aufgabenweise (Wie wurde die jeweilige Aufgabe innerhalb der gesamten Lerngruppe beantwortet? Welche Fehlertypen traten wie häufig in dieser Aufgabe auf?) oder lernendenweise (Wie hat die Testperson über alle Aufgaben des Bausteins hinweg geantwortet? Welche Fehlertypen treten bei ihr gehäuft auf?). Diese beiden Zusammenfassungen werden außerdem in den Förderbezogenen Zusammenfassungen aggregiert und es werden konkrete Hinweise zu den nächsten Lernzielen, deren Akzentuierung und Gestaltung sowie den passenden Förderaufgaben gegeben (Groß & Prediger, 2023). Insbesondere die enge Verknüpfung mit dem Fördermaterial stellt einen großen Nutzen für die Lehrkräfte dar. Diese mit dem Fördermaterial verknüpften Zusammenfassungen stehen den Lehrkräften dabei unmittelbar nach Durchführung eines Online-Checks zur Verfügung und werden aussagekräftiger, je mehr der offenen Aufgaben in einer Erhebung eine Lehrkraft bereits korrigiert hat. Eine Wartezeit auf die Ergebnisse, wie sie beispielsweise bei den Lernstandserhebungen üblich sind, entfällt daher.

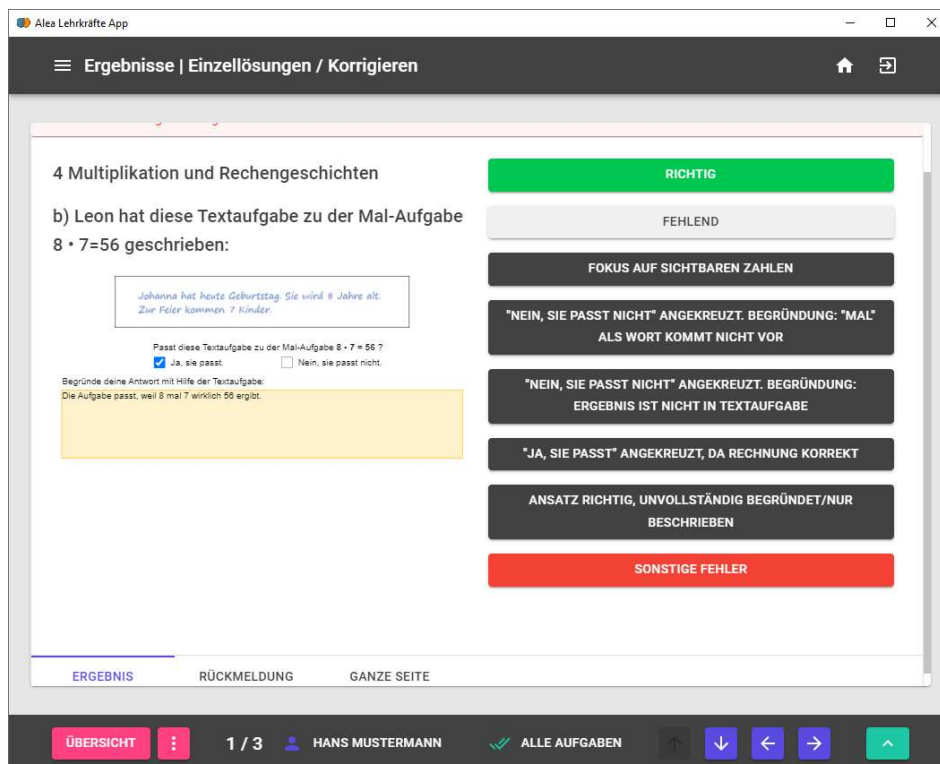


Abbildung 9: Kodier-Ansicht für Lehrkräfte in der alea.schule-Plattform

Prinzip 2: Nutzbar (useable)

Ziel der Gestaltung ist es, dass die Lehrkräfte mit möglichst wenig Aufwand zu einem nutzbaren Feedback auf Einzel- und Gruppenebene gelangen. Eine besondere Herausforderung stellt das Bewerten der offenen Aufgaben dar, die aus fachdidaktischer Sicht nicht vollständig durch geschlossene Formate ersetzt werden sollten. Zur Bewertung müssen Lehrkräfte selbst ihr fachdidaktisches Wissen aktivieren und die Fehler der Lernenden in eine passende Kategorie einordnen (vgl. Abbildung 9). Der MSK-Online-Check unterstützt diese Bewertung durch Vorschlag möglicher Auswertungskategorien, die nicht nur zwischen korrekter und inkorrekt Lösung unterscheiden, sondern auch die Fehlerursachen in den Blick nehmen. In Nutzungsexperimenten wird derzeit erprobt, wie diese Unterstützung der Bewertung am treffsichersten gestaltet werden kann.

Prinzip 3: Attraktiv (attractive)

Der MSK-Online-Check ist eng mit dem bereits weit verbreiteten *Mathe sicher können*-Materialien verknüpft. Für Lehrkräfte wird besonders die enge Verzahnung der Diagnose und der Förderung hervorgehoben. Insbesondere die schnelle Verfügbarkeit der zueinander exakt passenden Materialien sowohl für Diagnose als auch die Förderung machen den MSK-Online-Check interessant. Eine automatische digitale Förderung dagegen, die sich viele Lehrkräfte auch wünschen, ist für die Zielgruppe und die angestrebten Kompetenzen nicht realistisch realisierbar, auch wenn ein solches Versprechen die Attraktivität erhöhen könnte. In Zukunft

ist auch eine Anbindung an Fortbildungsbausteine zu den Inhalten der MSK–Online-Checks und den Hintergründen der Förderansätze geplant.

Prinzip 4: Wertvoll (valuable)

Die Anwendung ist für Lehrkräfte kostenlos in Bezug auf finanzielle Kosten, wenn das Bundesland die Hosting-Kosten der Plattform übernimmt. Sie müssen allerdings in der Version ohne Lernmanagement-System im Vergleich zu den Papier-Diagnosen mehr Zeit in die Vorbereitung investieren, da sie (einmalig) die Lernenden in das System eintragen müssen und Zugangscodes für die Anmeldung der Lernenden bei einem Online-Check generieren müssen. Danach ist dann die für die Korrektur benötigte Zeit reduziert und es entstehen Übersichten, die in der Komplexität kaum jemand von Hand erstellen würde. Damit liefert der Online-Check durchaus einen Wert für die Lehrkräfte. Um die zeitlichen Investitionen beim Anlegen der Lerngruppen weiter zu reduzieren, wird überdies an Anbindungen an bestehende Lernmanagement-Systeme gearbeitet.

Prinzip 5: Auffindbar (findable)

Im Hinblick auf die Navigation in *alea.schule* wurde eine möglichst intuitive Oberfläche gewählt, die in vier Hauptkacheln die Bereiche *Klassen/Fördergruppen*, *Standortbestimmungen*, *Ergebnisse* und *Fördermaterial* gegliedert ist (Abbildung 10). Da sich diese Abschnitte in eben dieser Reihenfolge beim Durchführen eines Online-Checks folgen, müssen Lehrkräfte nicht immer über das Hauptmenü navigieren, sondern können auch mit integrierten Weiter-Tasten zu den nächsten Schritten gelangen.

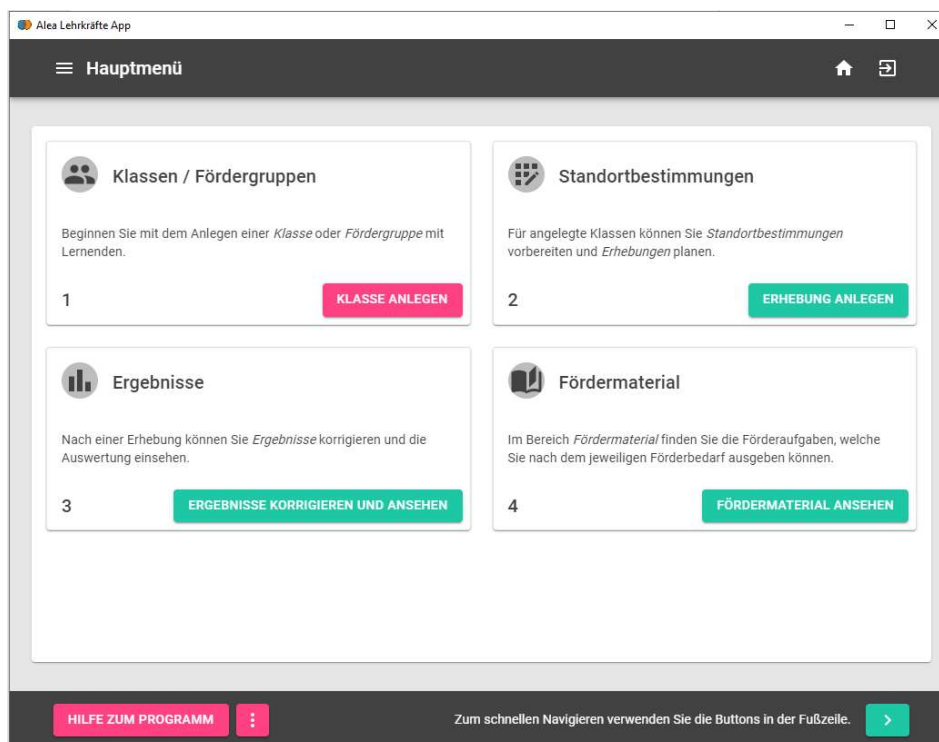


Abbildung 10 Hauptmenü der alea.schule-Lehrkräfte Plattform

Prinzip 6: Glaubwürdig (credible)

Besonderes Augenmerk wird auf die Nachvollziehbarkeit der letztlich getroffenen Förderempfehlungen gelegt. Zu jeder Einzelaufgabe können Lehrkräfte eine Rückmeldung zu dem beobachteten Fehler, der daraus abgeleiteten Diagnose sowie der passenden Förderempfehlung abrufen (Groß & Prediger, 2023). Diese Empfehlungen werden anschließend vom System übersichtlich aggregiert.

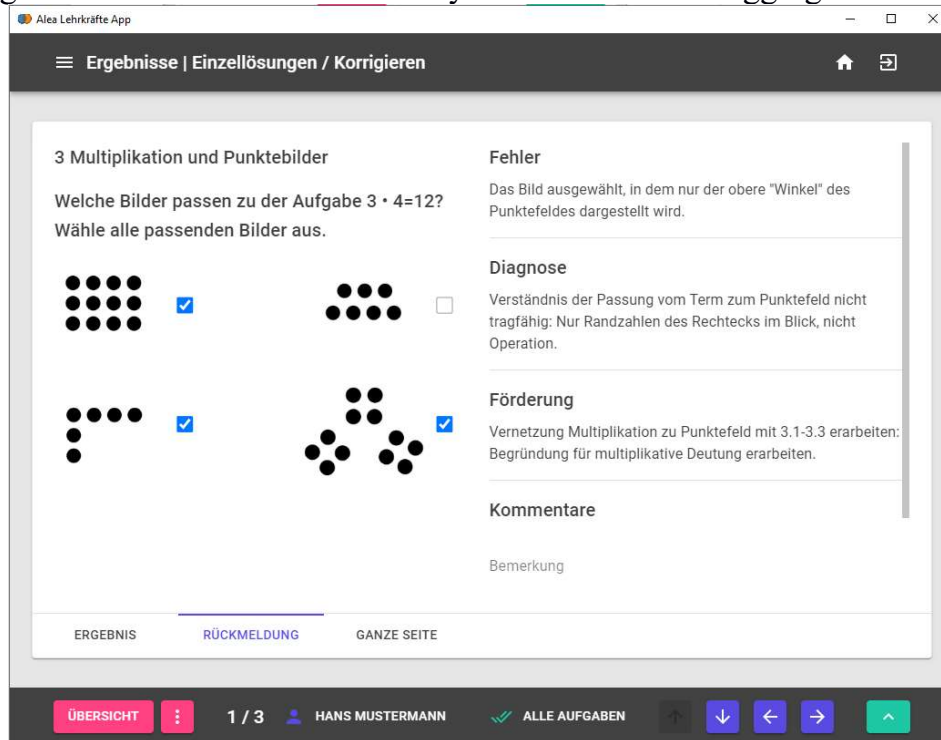


Abbildung 11 Rückmeldung einzelner Fehler durch die alea.schule-Lehrkräfte-Plattform

Prinzip 7: Zugänglich (accessible)

Beim Einsatz der MSK–Online-Checks in der Klasse wurde darauf geachtet, dass die Bearbeitung auf möglichst vielen verschiedenen Endgeräten funktioniert. Die *alea.schule*-Anwendung ist derzeit noch windows-basiert. Eine Ausweitung sowie ein Wechsel auf eine browserbasierte und in Lernmanagementsysteme integrierte Version sind derzeit in Arbeit.

4. Ausblick auf laufende Evaluationen des UX-Designs

4.1. Auf Ebene der Diagnose-Aufgaben

Die Aufgabengestaltung inklusive der UX-Entscheidungen wurden in mehreren Zyklen entwickelt und deren Evaluation dauert derzeit noch an. Die konkrete Ausgestaltung der Instruktionen sowie der Bedienhinweise wurden in qualitativen Cognitive Lab-Studien mit Think-aloud-Methoden mit den unterschiedlichen Eingabeformaten iterativ ausgearbeitet. Derzeit findet eine Evaluation der angebotenen Hilfestellungen statt auf Basis der Log-Daten der Lernenden bei der Bearbeitung. Dabei wird z.B. Folgendes untersucht: (1) Wurden Hilfen aufgerufen, wenn

ja welche und wie oft? (2) Gibt es häufige Löschvorgänge, die sich auf Unsicherheiten bei der Bedienung zurückführen lassen? (etwa weil erkennbar ist, dass immer wieder versucht wurde, die gleiche Lösung einzugeben) (3) Wurden die Instruktionssitems bearbeitet? und (4) Führt die Bearbeitung der Instruktionssitems erkennbar zu einer besseren oder schnelleren Bearbeitung der Aufgaben?

4.2. Auf Ebene der Lehrkräfte-Anwendung

Auf Ebene der Lehrkräfte kann das Nutzungsverhalten in einer größeren Stichprobe ebenfalls durch die Analyse der Log-Daten erfolgen. Dabei kann mit Hilfe dieser Daten beispielsweise rekonstruiert werden, in welcher Reihenfolge die Lehrkräfte durch die Anwendung navigieren (ob sie zum Beispiel eher aufgabenweise oder eher personenweise die Online-Checks korrigieren), ob sie die angebotenen Zusammenfassungen abrufen und ob sie Aufgaben oder Lernenden-Lösungen exportieren zur weiteren Verwendung im Unterricht.

Zuvor wurden qualitativ auszuwertende Nutzungsexperimente durchgeführt (Groß & Prediger, 2023), bei denen diese bei der Auswertung der Online-Checks begleitet wurden, um ihre Gedanken und Reaktionen bei der diagnosegeleiteten Förderplanung sowohl auf die inhaltlichen Rückmeldungen als auch auf das UX-Design zu erfassen. Diese Daten werden in der größeren Stichprobe zusätzlich durch eine Fragebogen-Studie im Anschluss an die Durchführung eines MSK–Online-Checks ergänzt.

5. Diskussion und Fazit

Insgesamt zeigt sich, dass mit der Digitalisierung von Aufgaben und der Bereitstellung von neuen Tools auch neue Entscheidungsfelder wie das UX-Design ergeben, die wegen ihrer unmittelbaren Auswirkungen auf die inhaltlichen Aspekte, nicht losgelöst von den fachdidaktischen Überlegungen getroffen werden sollten. Dies hat das Beispiel der Würfel-Aufgabe eindrücklich gezeigt, dass selbst kleine Entscheidungen, wie die Ausrichtung eines Würfels direkte Auswirkungen auf die Nutzung durch die Lernenden haben kann. Auch das Design von Hilfestellungen erfordert dabei die gesamte Bandbreite der möglichen Lösungsverfahren zu antizipieren, um die Vielfalt der Lösungsansätze alle unterstützen zu können, insbesondere ohne zu einem bestimmten Verfahren hinzulenken. Auf der Seite der Lehrkraft muss in die Entwicklung einer Oberfläche zur Vorbereitung und Auswertung eines Assessments fachdidaktisches Wissen sowohl über die schulpraktischen Bedingungen des Einsatzes als auch über die vorauszusetzenden Kenntnisse der Lehrkräfte bei der Bewertung offener Aufgaben einfließen. Dabei ist eine Entwicklung im engen Austausch mit der Schulpraxis von großer Bedeutung, um Berichte der User Experience zu erhalten und Weiterentwicklungspotentiale zu bemerken. Beispielsweise zeigen erste Anmerkungen der Lehrkräfte, dass die schulische Strukturierung von Durchführung der Diagnosen im Klassenverbund aber Förderung in Kleingruppen eine Export-Funktion der Ergebnisse und Lernziele wünschenswert machen, damit beispielsweise eine Förderlehrkraft mit den Diagnosen und Empfehlungen, die die Fachlehrkraft erhalten hat, weiterarbeiten kann.

Die Überlegungen zum MSK–Online-Check haben gezeigt, dass allgemeine Theorien, wie die UX Design Prinzipien durchaus eine Orientierung und Strukturierung bei der Konzeption eines digitalen Tools bieten können. Allerdings müssen diese Theorien im engen Austausch mit der empirischen Erprobung und dem so gewonnenen Wissen über die tatsächliche Wahrnehmung des Tools durch die jeweilige Zielgruppe mit fachdidaktischen Spezifizierungen gezielt ausgestaltet werden. Da der MSK–Online-Check primär auf die Diagnose des Verständnisses der Lernenden abzielt und nicht auf das unmittelbare Weiterlernen, muss besonders darauf geachtet werden, dass die gegebenen Bedienhilfen weder inhaltliche Aspekte vorwegnehmen, noch das Offenbaren bestimmter Fehlkonzepte verhindern. Weiterhin nimmt der Online-Check eine doppelte Perspektive ein, da sowohl die Lernenden als auch die Lehrkräfte in einer digitalen Umgebung arbeiten. Die laufende Evaluation wird zeigen, inwiefern die oben präsentierten Aspekte genutzt werden beziehungsweise der langfristigen Etablierung des Tools zuträglich sind.

Literatur:

- Bearman, M., Boud, D., & Ajjawi, R. (2020). New Directions for Assessment in a Digital World. In M. Bearman, P. Dawson, R. Ajjawi, J. Tai, & D. Boud (Hrsg.), *Re-imagining University Assessment in a Digital World* (S. 7–18). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-41956-1_2
- Gibson, J. J. (1986). *The Ecological Approach to Visual Perception*. Psychology Press.
- Groß, S., & Prediger, S. (2023). *Digitale Unterstützung für Lehrkräfte beim Aufarbeiten von Verstehensgrundlagen: Mathe-sicher-können-Online-Check*. <https://doi.org/10.17877/DE290R-23627>
- Kroehne, U. (2023). *Open Computer-based Assessment with the CBA ItemBuilder*. <https://kroehne.github.io/CBAItemBuilderBook/Open-Assessments-with-CBA-ItemBuilder.pdf>
- Kröhne, U., & Martens, T. (2011). 11 Computer-based competence tests in the national educational panel study: The challenge of mode effects. *Zeitschrift Für Erziehungswissenschaft*, 14(2), 169–186. <https://doi.org/10.1007/s11618-011-0185-4>
- Mayer, R. E., & Moreno, R. (2003). Nine Ways to Reduce Cognitive Load in Multimedia Learning. *Educational Journalist*, 38, 43–52. https://doi.org/10.1207/S15326985EP3801_6
- Minichiello, A., Hood, J. R., & Harkness, D. S. (2018). Bringing User Experience Design to Bear on STEM Education: A Narrative Literature Review. *Journal for STEM Education Research*, 1(1), 7–33. <https://doi.org/10.1007/s41979-018-0005-3>
- Mislevy, R. J., Behrens, J. T., Dicerbo, K. E., & Levy, R. (2012). Design and Discovery in Educational Assessment: Evidence-Centered Design, Psychometrics, and Educational Data Mining. *Journal of Educational Data Mining*, 4(1), Article 1. <https://doi.org/10.5281/zenodo.3554641>
- Moosbrugger, H., & Kelava, A. (Hrsg.). (2020). *Testtheorie und Fragebogenkonstruktion*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-61532-4>

- Morville, P. (2005). Experience design unplugged. *ACM SIGGRAPH 2005 Web Program on - SIGGRAPH '05*, 10. <https://doi.org/10.1145/1187335.1187347>
- Moser, C. (2012). *User Experience Design: Mit erlebniszentrierter Softwareentwicklung zu Produkten, die begeistern*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-13363-3>
- Paas, F., Renkl, A., & Sweller, J. (2003). Cognitive Load Theory and Instructional Design: Recent Developments. *Educational Psychologist*, 38(1), Article 1.
- Prediger, S. (2023). Implementation von Förderkonzepten zum Aufarbeiten von Verstehensgrundlagen: Strategien und Bedingungen aus Mathe sicher können. *mathematica didactica*, 46. <https://doi.org/10.18716/ojs/md/2023.1672>
- Rogers, Y. (2012). *HCI Theory: Classical, Modern, and Contemporary*. Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-02197-8>
- Schmidt, M., Earnshaw, Y., Tawfik, A., & Jahnke, I. (2020). *Methods of User Centered Design and Evaluation for Learning Designers*. <https://www.semanticscholar.org/paper/Methods-of-User-Centered-Design-and-Evaluation-for-Schmidt-Earnshaw/037cdfaa364b4757d31370b4e6e2bd0d37967742>
- Selter, C., Prediger, S., Nührenbörger, M., & Hußmann, S. (Eds.). (2014). *Mathe sicher können – Natürliche Zahlen. Förderbausteine und Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen*. Cornelsen. Online frei verfügbar unter <http://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/nz>.
- Sweller, J., Ayres, P., & Kalyuga, S. (2011). *Cognitive Load Theory*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-8126-4>

Mit LEGO-Robotern durch die Schulzeit – Ein Einblick in die Verbindung von Mathematik und Informatik, mit möglichen Beispielen für den Alltagsunterricht

Lehrer:innen sind immer auf der Suche nach alltagsrelevanten Beispielen für den Mathematikunterricht. Dieser Beitrag soll einen Einblick in die Möglichkeiten geben, die man durch den Einsatz von LEGO-Robotern für einen empirisch-orientierten Mathematikunterricht (Pielsticker, 2020) erhält. Die Einsatzmöglichkeiten erstrecken sich von der Grundschule bis zum Abitur und zeigen fächerübergreifende Elemente hinsichtlich Mathematik und Informatik auf.

1. Einleitung

„Das Ergebnis habe ich schon, jetzt brauche ich nur noch den Weg, der zu ihm führt.“

(Carl Friedrich Gauß, 1777-1855)

Vielmals wird Kritik an schulmathematischen Aufgabenstellungen geübt, dass sie nur aus einer Art Schemarechnung bestehen (Hahn & Prediger, 2004). Lernende erhalten eine Vorgehensweise – gar einen Algorithmus – von der Lehrkraft, den sie bei Übungsaufgaben stets abarbeiten sollen. Verändern sich dabei Kleinigkeiten, sind die Aufgaben für manche Schüler:innen nicht mehr lösbar, da sie an diesem einen Schema festhalten, was aber durch kleinste Veränderungen nicht mehr anwendbar zu sein scheint.

„Algorithmen sind eine fundamentale Idee der Mathematik“

(Oldenburg, 2011, S. 1)

Einige leistungsstarke Schüler:innen in Mathematik kritisieren die fehlende Forderung in der Schule und beklagen, dass Lösungsmengen nur noch auf Basis bereits dargebotener Formeln und bestimmter Schemata zu finden sind (Jainta & Andrews, 2020). Büchter und Leuders (2016) sprechen in diesem Zusammenhang das Merkmal der Authentizität im Rahmen von guten Mathematikaufgaben an. Solche Aufgaben sollen zu mathematischen Tätigkeiten anregen und weniger Aufgaben in Pseudokontexte einbetten, die vom Verfahren immer gleich ablaufen. Der Kern der eigentlichen Mathematik wird von den oben beschriebenen Schüler:innen anders gefasst. Für sie beginnt Mathematik dann, wenn Lösungen auf Basis aufgekommener Probleme gefunden werden müssen (Jainta & Andrews, 2020). Das Einstudieren sowie die dann folgende Anwendung einer Algorithmik sollte vermieden werden (Klinger, 2015).

Nach Vohns (2005) gehören zu einer fundamentalen Idee ein Bündel an spezifischen Handlungen, Strategien, Techniken und Zielvorstellungen. In der Informatik ist das Konzept der fundamentalen Ideen geprägt durch grundlegende Prinzipien, Denkweisen und Methoden (Schwill, 1993). Algorithmen finden sowohl in der Mathematik als auch in der Informatik Anwendung. In der Mathematik werden sie zunehmend unter einer kritischen Haltung betrachtet. Im Mathematikunterricht rücken bereits entwickelte Verfahren bzw. Kalküle in den Fokus (Hahn & Prediger, 2004). Dabei werden die grundlegenden Ideen übergangen, die den Kern des Verfahrens bilden. Dieses Problem wird rund um Defizite im Mathematikunterricht als Folge von TIMSS und PISA vielfach diskutiert (Schwill, 1993). Im Bereich der Informatik finden sie in Form der Programmierung Anwendung und sind diesbezüglich unentbehrlich. Dabei müssen Befehle in einer korrekten Reihenfolge eingegeben werden, damit das Programm bzw. die Anwendung funktioniert.

Dieser Beitrag zeigt auf, dass sich Algorithmen und feste Vorgehensweisen in einem fächerverbindenden Unterricht zwischen Mathematik und Informatik als nützlich erweisen und zum Einsatz kommen, welche aber kein stures Abarbeiten von aneinandergereihten Schritten darstellen, sondern zur Erweiterung von Problemlösefähigkeiten beitragen und vermehrt Strategien zur Lösungsfindung ausprägen.

2. Curriculare Einordnung

Als Grundlage des im Folgenden aufgeführten Einsatzes der Programmierung im Mathematikunterricht befasst sich die Kultusministerkonferenz mit der Weiterentwicklung von digitalen Kompetenzen. Des Weiteren ist es das zentrale Ziel von Bildungspolitik, „[...] Leistungsbereitschaft und Leistungsfähigkeit [...] Selbstständigkeit und Kooperationsfähigkeit [...] wie auch [...] Kreativität und Kommunikationsfähigkeit“ (KMK, 2009, S. 2) von Schüler:innen zu fördern. In den Bildungsstandards lässt sich unter anderem für den Mittleren Schulabschluss sowie für den Hauptschulabschluss² der Einsatz von Robotern verorten. Die Schüler:innen „nutzen Algorithmen mit Hilfe digitaler Werkzeuge, um den jeweils zugrundeliegenden mathematischen Inhalt zu untersuchen“ (KMK, 2022, S. 14) und „nutzen bekannte Algorithmen mit digitalen Mathematikwerkzeugen“ (ebd.) um Zusammenhänge herzustellen. Ferner sollen sie „symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache übersetzen und umgekehrt“ (ebd., S. 12) und sollen „digitale Mathematikwerkzeuge“ (ebd., S.13 f.) (wie z.B. Taschenrechner und unterschiedlichste Software) grundsätzlich verwenden können. Dies ist eine erneute Konkretisierung und Aufwertung der Bedeutung der Notwendigkeit, Schüler:innen in der Verwendung von - jetzt von der KMK so genannten – „digitalen Mathematikwerkzeugen“ (ebd.) zu schulen, während in den älteren Bildungsstandards der KMK von 2003 noch von „technischen Elementen“ gesprochen wurde (KMK, 2003, S.8).

² Siehe auch KMK (2004)

Einen weiteren Aspekt stellt der Medienkompetenzrahmen dar. Dabei besteht die Forderung nach dem Einsatz von digitalen Werkzeugen, wobei diese „[...] kreativ, reflektiert und zielgerichtet“ (Medienberatung NRW, 2020) eingesetzt werden sollen. Ein zusätzlicher Fokus wird unter anderem auf das Problemlösen gelegt, wobei Schüler:innen „Problemlösestrategien entwickeln“ (ebd.) sollen. In Bezug zur Programmierung von Robotern steht insbesondere die Algorithmisierung im Vordergrund, die in Kapitel 3 einen großen Stellenwert einnimmt. In diesem Zusammenhang sollen die Lernenden „Einflüsse von Algorithmen [...] in der digitalen Welt beschreiben und reflektieren“ (ebd.). Eigene Ideen sowie ihre Kreativität können sie dabei „durch Programmieren umsetzen“ (ebd.) und nach der Durchführung die eigene „Lösungsstrategie beurteilen“ (ebd.).

3. Warum Programmieren im Mathematikunterricht?

Mathematik und Informatik spielen oftmals zusammen und lassen sich vernetzen. Computer helfen beispielsweise, mathematische Verfahren umzusetzen und sie so zugänglich zu machen (Oldenburg, 2011).

Die Legitimation des Programmierens im Mathematikunterricht lässt sich durch Ziele ausdrücken, die über traditionelle Ziele des Mathematikunterrichts hinausgehen. Beim Programmieren kann nach Lernziel und Lernprinzip unterschieden werden. Im Unterricht sollen Lernende im Hinblick auf das Lernziel Problemlösestrategien erwerben, bei denen sie algorithmisch vorgehen. So haben sie die Möglichkeit, ihre Methodenkompetenz auszubauen und erkennen, dass sich viele Fragestellungen mithilfe von Computern beantworten lassen. Programmieren als Lernprinzip bedeutet, dass mathematische Begriffe oder auch Sätze, die beim Programmieren eine Relevanz aufweisen, experimentell herausgestellt werden können (Oldenburg, 2011).

Die Entwicklung von Verfahren, mit denen sich eine Vielfalt an Fragestellungen bearbeiten lassen, gehört zum Charakter der Mathematik. Verfahren in Form von (Rechen-)Algorithmen (Handlungsvorschriften) sind seit dem Zeitalter der Antike bekannt. Eines der sehr bekannten Verfahren dient zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen und stammt von Euklid. Solche Algorithmisierungen finden beim Rechnen Verwendung. Im Alltag sind sie auch vertreten und unverzichtbar geworden. Ein Beispiel stellen Ampelanlagen auf den Straßen dar (Oldenburg, 2011).

Algorithmen können von Programmen ausgeführt werden und danach folgt die Überwindung einer Hürde, Probleme können mit ihnen gelöst werden (Oldenburg, 2011).

Für den Mathematikunterricht zeigt sich, dass mathematische Fähigkeiten durch den Einsatz der Programmierung verbessert werden. Nichtsdestotrotz findet sie im Mathematikunterricht kaum bzw. nur implizit Verwendung. Zumeist steht beispielsweise bei Computeralgebrasystemen die Benutzung vorgefertigter Menüs oder eingeschränkter Funktionalitäten im Vordergrund, wodurch der Druck zum Programmieren verringert wird (Oldenburg, 2011).

Algorithmen stellen im Mathematikunterricht im Rahmen von Entwicklung und Reflexion ein erstrebenswertes Ziel dar. Dabei ist darauf zu achten, dass der Begriff der Algorithmen keinesfalls mit der Abarbeitung eines Algorithmus verglichen werden kann, was beispielsweise in der Sekundarstufe II in Zusammenhang mit der Kurvendiskussion zum Einsatz kommt und häufig kritisiert wird. Durch AGs im Bereich der Programmierung besteht die Hoffnung, diese näher an die Lernenden heranzutragen (Oldenburg, 2011).

Für die Benutzung von Computern besteht manchmal die Auffassung, dass der Bereich der Programmierung keinen Stellenwert besitzt. Viele Berufe kommen ohne Kenntnisse der Programmierung aus. In manchen Berufen ist sie jedoch unentbehrlich. Um ein Beispiel zu nennen, wird vielfach der Mangel an Ingenieur:innen beklagt. Beispielsweise spielt die Mathematik in den Ingenieurwissenschaften eine große Rolle. In einigen Anwendungssituationen dieser Berufssparte nehmen Programmierkenntnisse einen hohen Stellenwert ein, wobei dies zunächst nicht als offensichtlich erscheint. Vielfach genügen bereits bestehende Programme. In manchen Fällen sind ergänzende Programmierfähigkeiten vonnöten, um auf einer nächsthöheren Ebene automatisierte Anwendungen einzubetten. Zuletzt kann Mathematikunterricht von Informatikunterricht profitieren, da durch Programmierung ein handlungsorientierter Unterricht geöffnet werden kann (Oldenburg, 2011).

4. LEGO-Education bzw. LEGO-Robotik

Schüler:innen haben heutzutage viele Möglichkeiten, die Automatisierung von Prozessen spielerisch zu erfahren und so Einblicke in eine mathematisch-informatische Welt zu erhalten. LEGO-Education ist eine dieser Möglichkeiten. Konkret handelt es sich hier um LEGO-Robotik, dessen zentrales Element ein programmierbarer Baustein (Hub) ist. Die Kinder und Jugendlichen haben die Chance, nach ihren Vorstellungen einen Roboter zu konstruieren und lernen durch Anwendungen erste Programmierkenntnisse in den von ihnen selbst ausgewählten Kontexten. Wie bei allen Herstellern von Klemmbausteinen kann man seine Ideen im Bauprozess kreativ ausprobieren und im Falle der LEGO-Robotik dann die Konstruktion mit der Programmierung in einen logischen Zusammenhang bringen, da das abschließende Produkt einen bestimmten Zweck erfüllen soll. Die investierte Zeit ist entwicklungsfördernd und die Ausprägung von digitalen Kompetenzen wird gefördert. Zudem findet auch eine Förderung weiterer Aspekte statt. Hierzu zählen Sprachfähigkeiten, Organisations- und Problemlösefähigkeiten, Neugier, Kreativität, Selbstvertrauen sowie durch MINT auf die Zukunft vorbereitet sein. Zum ersten Punkt ähnelt das Erlernen einer Programmiersprache dem Erlernen einer Sprache, da auch beim Programmieren immer je nach Sprache eine gewisse Syntax eingehalten werden muss. Erlernte Fähigkeiten durch das Programmieren könnten dann auf Muster des Satzbaus und der Grammatik im fremdsprachlichen Kontext übertragen werden (LEGO System, 2022).

Die Abfolge von Aktionen spielt auch eine entscheidende Rolle. Um einen Roboter zu programmieren, bedarf es einer kleinschrittigen Vorgehensweise. Um ein

großes Gesamtziel zu erreichen, muss jeder noch so kleine Schritt bedacht und umgesetzt werden. Ggf. müssen Schritte auch nochmal reflektiert werden, um sie folgend zu optimieren, dies kann man dann zum Beispiel auch mit dem Problemlösekreislauf nach Pólya (1949) vergleichen. Seitens der Lernenden ist zudem ein gewisses Maß an Kreativität und Neugierde gefragt und wird gefordert. Sie lernen viele Bausteine des Programmierens kennen und können sie benutzen, um ihr individuelles Produkt zu entwickeln. Nicht zuletzt wird für die Zukunft prognostiziert, dass einer der vier MINT-Felder von Bedeutung sein wird, egal in welcher beruflichen Sparte sich die Jugendlichen und Kinder einfinden werden. Grundkenntnisse in einem der vier Bereiche können bereits helfen, neue Technologien im Detail zu verstehen (LEGO System, 2022). Zusammenfassend lernen Schüler:innen implizit Mathematik, Programmieren und auch Problemlösen. Sie messen Winkel, programmieren Befehle und können konkrete Aufgaben lösen, ohne dass sie sich über das „Lernen“ explizit Gedanken machen. Die Lernumgebungen werden mit großer Freude angenommen (Universität des Saarlandes, 2017).

Die Programmierumgebung von LEGO-Education erlaubt dabei einen differenzierten Einstieg in die Programmierung, da man zwischen verschiedenen Sprachen wählen kann: Blockprogrammierung, Textbausteinen (Scratch) und Python. Die Blockprogrammierung hat in der LEGO-Education eine lange Tradition und soll wohl auch in der Art und Weise des Aufbaus an das Bauen mit den berühmten Klemmbausteinen erinnern. Diese Art der Programmierung ist vor allem für Einsteiger ohne Vorkenntnisse gut geeignet. Das in Schulen häufig bereits in der Sekundarstufe I genutzte Programm Scratch verbirgt sich hinter der Programmieroption Textbausteine. Hier kann man dann bereits tiefer in die Programmierung einsteigen und ein Vorstellungsvermögen für die notwendige Syntax innerhalb eines Programms aufbauen. Seit einiger Zeit ist aber auch die Programmierung mit Python durch LEGO ermöglicht worden, was gerade für Schulen die Möglichkeit bietet, die LEGO-Robotik auch in den Anfängen der Sekundarstufe II einzusetzen.

Zusammenfassend bietet LEGO-Education für alle Erfahrungsstufen im Umgang mit Programmierung einen Zugang zum LEGO-Robotik Bereich an.

5. LEGO-Robotik im Regelunterricht

LEGO-Robotik lässt sich in verschiedene Themen aus dem Regelunterricht des Fachs Mathematik integrieren. Sowohl in der Primarstufe als auch in den Sekundarstufen gibt es Beispiele, die mit relativ geringem Zeitaufwand durchführbar sind. Wir wollen hier eines dieser Beispiele kurz skizzieren. Das Beispiel nutzt als Basis das Basisset LEGO-Education-Set Spike Prime für die Sekundarstufen.

Durch die vorgestellte Lernumgebung kann man verschiedene Elemente des Medienkompetenzrahmen NRW, welcher für alle Grundschulen, Förderschulen und Schulen mit Sekundarstufe I in NRW gilt, abdecken. Neben dem bei Stunden mit Medieneinsatz offensichtlichen Bereich *1.2 Digitale Werkzeuge*, können durch

Ziel der Stunde ist es, dass die Schüler:innen durch ein kleines Experiment mit verschiedenen Radgrößen und der entsprechenden Protokollierung die Zahl Pi näherungsweise bestimmen. Die Einbindung in eine mögliche Reihenplanung könnte wie folgt aussehen:

Stunde	Thema
0	Einführung in die Programmierung mit Textbausteinen am Beispiel LEGO-Robotik
1	Auffrischung Längen, Größen und Formeln – in Bezug auf geometrische Formen und Körper
2	Erkundung der Kreiszahl Pi – mit LEGO-Robotik
3	Kreisumfang, Radius und Durchmesser – Feste Verhältnisse im Kreis – eine Übungsstunde
4	Flächeninhalt des Kreises – Kreisflächen im Alltag
5	Berechnung von zusammengesetzten Flächen – Beispiel Sport-Stadion

Tabelle 1: Mögliche Reihenplanung

Eine beispielhafte Unterrichtsstruktur für die zweite Stunde innerhalb dieser Reihe ist in Tab. 2. skizziert:

Zeit	Phasen/ Lernschritte/ Unterrichtsschritte	Sachaspekte	Sozialformen/ Handlungsmuster/ Medien
8.00-8.10	Einstieg	Die gesammelten Längen, Größen und Formeln der letzten Stunde werden nochmal mit Hilfe des Beamers präsentiert und von verschiedenen Schüler:innen vorgestellt. Kurze Erklärung der Lehrkraft bzgl. der anstehenden Arbeit mit LEGO und der Programmier-App am Tablet.	UG im Plenum Beamer LEGO Spike Sets Tablets
8.10-8.20	Erarbeitung I	Die Schüler:innen bauen den „Speed-Bot“ und lassen den Roboter eine beliebige Strecke auf dem Boden als Test fahren.	LEGO Spike Prime Sets Tablets

8.20-8.35	Erarbeitung II	Die Schüler:innen bearbeiten die Erkundungsaufgabe zur Kreiszahl Pi.	LEGO Spike Prime Sets Tablets
8.35-8.45	Sicherung und Reflexion	Die Ergebnisse aller Gruppen werden zusammengetragen und es werden für die verschiedenen Radgrößen Mittelwerte aus den Gruppenergebnissen gebildet. Die Schüler:innen beschreiben ihr Vorgehen und stellen eine begründete Vermutung über die Zusammenhänge an. Abschließend beurteilen die Schüler:innen, wie die Arbeit mit dem Roboter funktioniert hat.	UG im Plenum Beamer Tablets

Tabelle 2: Mögliche Unterrichtsskizze

Abhängig vom jeweiligen Schwerpunkt kann der Anteil der benötigten Programmierung auf ein Minimum reduziert oder von der Lehrkraft sogar bereits vorgegeben werden. Sofern die Schüler:innen auch selbst programmieren dürfen, ist eine kurze Einführung in die Programmierung mit einzuplanen – sofern dies nicht schon in einem anderen Zusammenhang geschehen ist. Die Programmierung kann hier – je nach gewählter Sprache – auf Blöcke reduziert werden oder mittels Textbausteine oder Python auch den einer Schleife zugrunde liegenden Algorithmus zum ergänzenden Thema neben der Kreiszahl Pi machen.



Abbildung 3: Einfache Programmierung mit Textbausteinen

In der abgebildeten Reihe ist die Zeit für die Erarbeitung der Zusammenhänge im Kreis mit drei Schulstunden einkalkuliert. Man sollte die Grundlagen zum Thema Kreis und Programmieren kurz ansprechen und das ganze spielerisch/handlungsorientiert vermitteln. Im Vorfeld würde sich der „Roboter-Führerschein“ aus dem DigiMath4Edu Projekt anbieten. Dieser erklärt den Schüler:innen den Umgang mit der Programmieroberfläche sowie die Verbindung von Tablet und intelligentem Baustein der LEGO Education Spike Prime Sets.

Räder	Größe	Umdrehungen (Anzahl)	Gesamtlänge der Strecke	
schwarz	9,8 cm	6,5	200 cm	3,14
Blau	7,9 cm	8	200 cm	3,16
gelb	4,9 cm	13	200 cm	3,14

Tabelle 3: Mögliche Schüler:innenlösungen

6. Fazit und Ausblick

LEGO-Robotik bietet die Möglichkeit, fächerübergreifend zu arbeiten. Durch oftmals bereits vorhandene Erfahrungen im Umgang mit LEGO haben die Schüler:innen einen leichteren und spielerischen Zugang zum Unterrichtsgegenstand (LEGO System, 2022; Schlicht & Witzke, 2015). Die Kombination mit der Möglichkeit der Blockprogrammierung des intelligenten Bausteins und seiner Sensoren erlaubt es, verschiedenste mathematische Probleme erforschend zu bearbeiten. Schon Gopnik hielt 2010 fest, dass „[...] sich Kinder die Welt in ganz ähnlicher Weise wie Naturwissenschaftler [aneignen]: Sie experimentieren gezielt, bewerten gewonnene statistische Muster und stellen anhand ihrer Beobachtungen Theorien auf“ (Gopnik, 2010, S. 69). Neben der angesprochenen Möglichkeit der curricularen Anbindung an den Mathematikunterricht und der Nutzung im Sinne des Medienkompetenzrahmens NRW gibt es auch noch außerschulische Möglichkeiten im Rahmen von Wettbewerben, im MINT-Bereich die LEGO-Robotik zu nutzen. Die wohl bekanntesten sind der zdi-Roboterwettbewerb in NRW und der weltweit organisierte Wettbewerb First-LEGO-League, welche die LEGO-Robotik nutzen, um Inhalte des MINT-Bereichs durch die Teilnehmenden erforschen zu lassen und überregional zu vernetzen.

Im Rahmen des Südwestfalen Regionale 2025 Projekts DigiMath4Edu entstehen Praxisbände, in denen unter anderem weitere Beispiele für die Einbindung für LEGO-Robotik in den Regelunterricht gegeben werden. Ein weiteres Beispiel für die Grundschule wurde bereits im MNU-Journal 02/2023 veröffentlicht.

Literatur:

- Büchter, A. & Leuders, T. (2016). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln: Lernen fördern - Leistung überprüfen* (9. Aufl.). Sekundarstufe I + II. Cornelsen.
- Gopnik, A. (2010) Kleinkinder begreifen mehr. *Spektrum der Wissenschaft*. 10/2010, 69-73.
- Hahn, S. & Prediger, S. (2004). Vorstellungsorientierte Kurvendiskussion – Ein Plädoyer für das Qualitative. In A. Heinze (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2004: Vorträge auf der 38. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 1. bis 5. März 2004 in Augsburg* (S. 217–221). Franzbecker.
- Jainta, P. & Andrews, L. (2020). *Mathe ist wirklich noch viel mehr: Aufgaben und Lösungen der Fürther Mathematik-Olympiade 1999–2006*. Springer Spektrum.

- Klinger, M. (2015). *Vorkurs Mathematik für Nebenfachstudierende: Mathematisches Grundwissen für den Einstieg ins Studium als Nicht-Mathematiker*. Springer-Lehrbuch. Springer Spektrum.
- KMK (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf (29.06.2023)
- KMK (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss*. https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Haupt.pdf (29.06.2023)
- KMK (2009). *Empfehlungen der Kultusministerkonferenz zur Stärkung der mathematisch-naturwissenschaftlich-technischen Bildung*. http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2009/2009_05_07-Empf-MINT.pdf (28.06.2023)
- KMK (2022). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik. Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA)*. https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-ESA-MSA-Mathe.pdf (31.03.2024)
- LEGO System (2022). *Programmieren für Kinder*. <https://www.lego.com/de-de/categories/coding-for-kids> (04.05.2023)
- Medienberatung NRW (Hrsg.) (2020). *Medienkompetenz Rahmen NRW*. https://www.schulministerium.nrw/system/files/media/document/file/LVR_ZMB_MKR_Rahmen_A4_2020_03_Final.pdf (07.05.2023)
- Ministerium für Schule, Jugend und Kinder des Landes Nordrhein-Westfalen (2004). *Kernlehrplan für die Realschule in Nordrhein-Westfalen*. https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/45/rs_mathematik.pdf (06.06.2023)
- Oldenburg, R. (2011). *Mathematische Algorithmen im Unterricht. Mathematik aktiv erleben durch Programmieren* (1. Aufl.). Studium. Vieweg & Teubner.
- Pielsticker, F. (2020). *Mathematische Wissensentwicklungsprozesse von Schülerinnen und Schülern. Fallstudien zu empirisch-orientiertem Mathematikunterricht mit 3D-Druck*. Springer Spektrum.
- Pólya, G. (1949). *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme*. Bern, München, Francke.
- Schlicht, S. & Witzke, I. (2015). Invarianz - Kindersichtweisen wertschätzen und begleiten. *Sache - Wort - Zahl*, 152/43 Jahrgang/2015, 39-44.
- Schwill, A. (1993). Fundamentale Ideen der Informatik. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 25(1), 20-31.
- Universität des Saarlandes (2017). *Wie Kinder mit Robotern gleichzeitig Mathe, Programmieren und Problemlösen lernen*. <https://idw-online.de/de/news685187> (07.07.2023)
- Vohns, A. (2005). Fundamentale Ideen und Grundvorstellungen: Versuch einer konstruktiven Zusammenführung am Beispiel der Addition von Brüchen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 26(1), 52–79. <https://doi.org/10.1007/BF03339006>

Kevin Hörnberger, Jasmin Müller, Tatjana Visarius, Insa Germer und Rebekka Post

Universität Siegen, hörnberger@mathematik.uni-siegen.de

Auffassungen von Lernenden und Lehrenden in NRW zu CAS-Apps als Alternative zu klassischen Handhelds am Beispiel der Apps CAsEasy+

Das Ende des grafikfähigen Taschenrechners (GTR) als notwendiges Hilfsmittel für die Abiturklausuren in Nordrhein-Westfalen zum Abiturjahrgang 2026 stellt viele Schulen vor die Herausforderung, ein neues Werkzeug für den alltäglichen Gebrauch im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II auszuwählen. Dabei stellen, neben dem wissenschaftlichen Taschenrechner (WTR) und modularen Mathematikssystemen (MMS), insbesondere Computeralgebrasysteme (CAS) in Form von Apps eine Alternative zum GTR dar. Im Rahmen einer explorativen Studie innerhalb des Südwestfalen Regionale 2025 Projekts DigiMath4Edu der Mathematikdidaktik der Universität Siegen wurden 252 Schüler:innen aus der Sekundarstufe II und 15 Lehrkräfte von fünf Schulen aus den Kreisen Olpe und Siegen-Wittgenstein in einem Mixed-Method-Design zu ihren Auffassungen zu CAS-Apps befragt. In diesem Beitrag möchten wir einen Einblick in die ersten Forschungsergebnisse geben und Aussagen von Studierenden aus einem Besser Studieren!-Projekt zu dem perspektivischen Taschenrechnereinsatz vorstellen.

1. Einleitung

Kurz bevor das Projekt „DigiMath4Edu“⁴ startete, erfuhren die weiterführenden Schulen mit gymnasialer Oberstufe in einer Schulmail vom 05.08.2020⁵, dass ab dem Abitur 2026 keine Prüfungsaufgaben mehr gestellt werden, die das Verwenden eines Grafikfähigen Taschenrechners (GTR) voraussetzen. Somit stehen alle Schulen mit gymnasialer Oberstufe erneut vor einer notwendigen Entscheidung hinsichtlich des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe II. Zum einen besteht für die Schulen die Möglichkeit die Abiturklausur wie vor der Einführung des GTR mit einem WTR⁶ (kein GTR⁷, CAS⁸ oder MMS⁹) schreiben zu lassen, oder zum anderen könnte für die Abiturklausur ein CAS bzw. MMS genutzt werden. In der nachfolgenden Grafik wird noch einmal verdeutlicht, welche Funktionen die ein-

⁴ Projektinformationen unter <https://www.digimath4edu.de>

⁵ <https://www.schulministerium.nrw/23092022-regelungen-zum-einsatz-digitaler-mathematikwerkzeuge-pruefungen-der-gymnasialen-oberstufe>

⁶ WTR: Wissenschaftlicher Taschenrechner

⁷ GTR: Grafikfähiger Taschenrechner

⁸ CAS: Computer-Algebra-System

⁹ MMS: modulares Mathematiksystem

zelnen Systeme haben. Hierbei wird deutlich, dass MMS noch nicht klar ausformuliert ist und nicht eindeutig klar ist mit welchen Funktionen dieses System spä-

System	WTR	GTR	CAS	MMS
Einfache arithmetische Berechnungen	✓	✓	✓	?
Gleichungen und Gleichungssysteme		✓	✓	?
Funktionsgraphen plotten		✓	✓	?
Tabellenkalkulation		✓	✓	?
Ableitung an einer Stelle sowie bestimmte Integrale numerisch berechnen		✓	✓	?
Gleichungen und Gleichungssysteme symbolisch lösen			✓	?
Differenzieren und Integrieren von Funktionen (algebraisch und numerisch)			✓	?

ter in Prüfungen genutzt werden darf.

Die bisherigen CAS-Systeme, die von Schulen als Handheld genutzt werden sind Casio ClassPad II oder der TI nspire CAS. Viele Schulen sind oder werden auf Tablets umgestiegen besser: Viele Schulen sind bereits auf Tablets umgestiegen, oder werden dies in naher Zukunft tun und nutzen als Tablet beispielsweise die Apps GeoGebra, CASeasy+ oder TI nspire CAS. Bei GeoGebra handelt es sich um eine Dynamische-Geometrie-Software (DGS), die kostenfrei im Internet oder als App auf dem Tablet genutzt werden kann. Sie ist auf allen Plattformen verfügbar und bietet zusätzlich einen Prüfungsmodus. GeoGebra ist erstmals 2016 durch einen Ergänzungserlass des Ministeriums für Schule und Bildung Nordrhein-Westfalens zum damals gültigen Taschenrechnererlass in Prüfungen zugelassen worden. Die CASeasy+ App vom Westermann Verlag wird häufig in Verbindung mit dem Apple iPad (iOS) genutzt. Sie ist dennoch auch für die Plattformen Windows und Android verfügbar und aktuell (Stand: Oktober 2023) liegen die Kosten für die App bei ca. 25 € für eine Dauerlizenz. Integriert ist auch bei dieser App ein Prüfungsmodus, der während einer Aktivierung zusätzlich ein Aktivitätenprofil erstellt. Die TI nspire CAS-Software ist für die Plattformen Windows und iOS verfügbar. Die Kosten für die Windows Version belaufen sich auf ca 29 €, die iOS Version kostet hingegen ca. 36 € auch hier handelt es sich jeweils um eine Dauerlizenz. Dies sind nur drei Beispiele für Tablet-Apps, welche als Alternative zu Handhelds genutzt werden könnten, einen größeren Vergleich findet man bei Hörnberger 2022.

Einige der genannten Systeme wurden bereits in den Projekt- und Partnerschulen erprobt. Zum einen eine große Gesamtschule aus dem ersten Projektjahr von „DigiMath4Edu“ mit dem Schwerpunktthema „WTR & GTR als Auslaufmodell? Al-

ternative Apps im Mathematikunterricht“, die somit einen ersten Probelauf im Projekt mit der CASeasy+ App absolviert hat. Ein großes Gymnasium der Region (ebenfalls eine Schule des Projekts „DigiMath4Edu“) wird auch im Schuljahr 2023/24 als „Bündelungsgymnasium“ für den Übergang von G8 zu G9 eine Einführungsphase stellen und wird im Zuge dessen in diesem Jahrgang die CASeasy+ App einführen. Eine Partnerschule der Universität Siegen der Schulform Gesamtschule hat gemeinsam in einem Projekt die Verwendung von GeoGebra erprobt. In Zukunft wird an dieser Schule GeoGebra auch weiterverwendet. Zudem hat ein weiteres Gymnasium der Universitätsstadt Siegen die CASeasy+ App getestet im Vergleich zu denen an der Schule genutzten CG-50 von Casio, einem Handheldgerät mit GTR-Eigenschaften.

Doch nicht nur die Schulen müssen sich mit dieser neuen Taschenrechner-Problematik auseinandersetzen. In der universitären Lehre spielen Taschenrechnersysteme bisher häufig als Inhalt keine wesentliche Rolle. Dies wurde zum Anlass genommen ein Projekt im Rahmen der „BesserStudieren!“-Förderung der Universität Siegen durchzuführen. Denn mit Eintritt in das Schulleben erscheint es nützlich, wenn Studierende in der Lage sind CAS, DGS oder MMS zu nutzen und die Kompetenzen zur Verwendung den Schüler:innen weitervermitteln können.

Im Folgenden soll nun kurz dargestellt werden, wie die drei an der explorativen Studie beteiligten Personengruppen (Lehrkräfte, Studierende, Lernende) auf die Systeme reagierten und welche Konsequenzen sich für die Nutzung einer CAS-App als mögliche Alternative zu den klassischen Handhelds aus deren Sicht ergeben. Es sollen daraus Hypothesen zu den folgenden Punkten abgeleitet werden:

- Risiken und Chancen die Lehrkräfte in der Nutzung sehen und beschreiben
- der Eindruck des Nutzens aus Sicht der Schüler:innen
- Äußerungen zur aktuellen Bedeutung und bisheriger Verwendung ausgewählter Studierender

2. Studiendesign

Wie bei allen digitalen Medien und Werkzeugen, geht auch bei CAS der didaktische Wert für das Lernen von Mathematik entscheidend mit der Gestaltung der begleitenden Lernumgebung einher. Ob digitale Technik lernwirksam im Unterricht genutzt werden kann, wird daher vom technischen, didaktischen und inhaltlichen Wissen der Lehrkräfte (TPACK) beeinflusst. Aber auch Beliefs der Lehrkräfte über das Lehren mit Technologie, die Natur der Mathematik und das Lehren und Lernen von Mathematik sowie Selbstwirksamkeitsüberzeugungen spielen eine maßgebliche Rolle bei der Integration von CAS-Apps in den Unterricht und verbinden sich zu vielschichtigen Auffassungen (vgl. Gurcay et al. 2012, S.155; Thurm & Barzel 2020, S.1413). Unter Auffassungen werden hier, wie in der Definition von Dilling (2022), in Belief Systemen zusammenwirkende Beliefs verstanden:

„[Es] wird von der Auffassung von Mathematik gesprochen, wenn gemeint ist, dass bestimmte Beliefs in Bezug auf Mathematik im Rahmen eines übergeordneten Belief System gemeinsam fungieren.“ (Dilling 2022, S.45)

Die Auffassungen zu CAS-Apps von Lehrkräften und Schüler:innen aus der Qualifikationsphase II wurden dazu in dieser Erhebung der Mathematikdidaktik der Universität Siegen erhoben. Dazu wurden Daten aus fünf Schulen mit unterschiedlichen Vorerfahrungen bezüglich CAS-Apps aus den Kreisen Siegen-Wittgenstein und Olpe erhoben. Es wurden insgesamt 252 Schüler*innen befragt sowie 15 Lehrkräfte interviewt.

Das Studiendesign beinhaltete zunächst eine Fortbildung der Lehrkräfte zu verschiedenen GTR-Alternativen. Dies sollte den Lehrkräften, die mehrheitlich nur über sehr geringe Vorkenntnisse über die App CASeasy+ bzw. CAS-Apps im Allgemeinen verfügten, einen ersten Einblick in deren Bedienung und Funktionsumfang geben. Die App CASeasy+ wurde als Referenzprogramm für die Studie ausgewählt, da sie speziell für die Nutzung auf Tablets entwickelt wurde und in einigen vorherigen Lehrkräftefortbildungen auf positive Resonanz stieß. Es wurde sich zudem für die CASeasy+ App entschieden, da die App sich nicht nur im Design von den anderen Apps unterscheidet, sondern auch die Notation entsprechend der Schulbücher verwendet. Auch der leicht zu aktivierende Prüfungsmodus entsprach den Vorstellungen der beteiligten Lehrpersonen, sowie die sehr kurze Eingewöhnungszeit im Umgang mit der App gaben hier den Ausschlag. Die Lehrpersonen erhielten im Anschluss einen teilstandardisierten Prä-Fragebogen in Microsoft Forms. Dieser Prä-Fragebogen diente dazu, die Interviews zu entlasten sowie statistische Daten über die Vorerfahrungen und Einstellungen zu CAS-Apps und Auffassungen über die erwartete Änderung der Unterrichtskultur durch den Einsatz von CAS-Apps zu gewinnen. Die Lehrkräfte führten danach eine Unterrichtsstunde im Rahmen von 45, 60 oder 90 Minuten mit den Schüler:innen ihres Mathematikurses durch. Diese erfolgte nach einem vorgegebenen Verlaufsplan ausschließlich in Grund- und Leistungskursen der Qualifikationsphase II (Q2), um eine möglichst große Vergleichbarkeit der Daten aus den unterschiedlichen Kursen und Schulen zu gewährleisten. Diese Unterrichtsstunde sollte dazu dienen, dass die Lehrkräfte die App CASeasy+ in einer vorgegeben Unterrichtssituation nutzen und dabei den Umgang der Schüler:innen mit der App CASeasy+ wahrnehmen können. Während der Unterrichtsstunde füllte mindestens eine Person einen Beobachtungsbogen aus, in welchem Rahmenbedingungen sowie einige Aspekte des Verhaltens der Schüler:innen und Lehrpersonen dokumentiert wurden. Einige Beobachtungen wurden vom Interviewer in den nachfolgenden Interviews gezielt aufgegriffen. Zusätzlich arbeitete eine Vergleichsgruppe mit der App GeoGebra Classic, u. a. um auszuschließen, dass Probleme, die sich beim Bearbeiten der Aufgaben ergaben, spezifisch durch die Nutzung von CASeasy+ gefördert wurden. In der Unterrichtsstunde stellte die Lehrkraft den Schüler:innen zunächst die Grundlagen der CASeasy+ App mithilfe einer Präsentation vor, welche im Rahmen der

Studie zur Verfügung gestellt wurde. Dies sollte gewährleisten, dass alle Lernenden vergleichbare Vorkenntnisse besitzen. Danach lösten die Schüler:innen eine CAS-Abituraufgabe von 2012 zum Inhaltsfeld Analysis. Dafür wurde jeder und jedem Lernenden ein iPad von der Universität Siegen mit der CASeasy+ App zur Verfügung gestellt. Im Anschluss wurden die Ergebnisse der Schüler:innen vorgestellt, wobei besonders auch der Umgang mit der CAS-App dargelegt werden sollte. Zum Schluss füllten die Lernenden einen Fragebogen in Microsoft Forms zu ihren Auffassungen zur App CASeasy+ aus.

Nach der Durchführung der Unterrichtsstunde wurden mit den 15 Lehrkräften halbstrukturierte Interviews durchgeführt. Anschließend wurden die Interview-Daten transkribiert und mithilfe des Programms MAXQDA unter Nutzung der inhaltlich-strukturierenden qualitativen Inhaltsanalyse nach Kuckartz und Rädiker (2022) induktiv ausgewertet. Bei der Auswertung waren die Forschungsanliegen, wichtige Qualitätsmerkmale einer ‚guten‘ CAS-App aus Sicht der Lehrkräfte zu identifizieren und zu untersuchen, welche Veränderungen der Unterrichtskultur die Lehrkräfte bei einer Implementation einer CAS-App antizipieren. Dazu wurden die Leitkategorien Aussagen über Qualitätsmerkmale von CAS-Apps, Äußerungen der Lehrkräfte über Schüler:innen, Aussagen über eigenes Können sowie Gefühle und Erfahrungen der Lehrkräfte, Aussagen über die Veränderung der inhaltlichen, strukturellen bzw. methodisch-didaktische Ebene der Unterrichtskultur durch die Nutzung von CAS-Apps als Leitkategorien aufgestellt. Nachdem das Material im ersten Durchlauf anhand dieser Leitkategorien codiert wurde, wurde danach ein zweiter Codierungsprozess vorgenommen, bei dem induktiv Unterkategorien am Interview-Material gebildet wurden. Zu jeder Kategorie wurde eine Interview-Passage als Ankerbeispiel festgelegt.

Zusätzlich sollten die Beliefs zu CAS-Apps mit Forschungsergebnissen der Belief-Forschung zu (CAS-)Handhelds verglichen werden und ggf. domänenspezifische Beliefs zu CAS-Apps identifiziert werden. Die Ergebnisse der Auswertung wurden aus diesem Grund mit den von Thurm und Barzel (2021, S. 48) formulierten Beliefs zu (CAS-)Handhelds verglichen. Dabei wurden insbesondere Gemeinsamkeiten und Unterschiede im Hinblick auf die Kategorien Beliefs über das Lehren mit Technologie und Selbstwirksamkeitsbeliefs untersucht.

Ein weiterer Teil der Studie beschäftigt sich nicht mit der Sicht der Lehrkräfte auf den Einsatz von CAS-Apps, sondern auf die Schüler:innen-Wahrnehmung. Dazu füllten die Schüler*innen am Ende der Stunde eine Umfrage aus. Diese bestand aus insgesamt 37 Fragen, bei denen es sich um eine Mischung aus offenen, geschlossenen und Skalenfragen handelte. Die Fragen mit einer Skala richteten sich immer auf Werte von 1 bis 10, wobei auch immer der durchschnittliche Wert jeder Frage angegeben wird.

3. Lehrkräfte zur App CAsEasy+ als Alternative zu klassischen Handhelds

Den vorab skizzierten Forschungsanliegen folgend werden nun einige Ergebnisse aus der Analyse der mit den beteiligten Lehrkräften geführten 15 Interviews vorgestellt. Aus den Forschungsergebnissen kann die Hypothese formuliert werden, dass eine hohe Bedienungsfreundlichkeit und gute Übersichtlichkeit als wichtige Qualitätsmerkmale einer ‚guten‘ CAS-App von den befragten Lehrpersonen wahrgenommen werden. Dies hängt mit den Beliefs der beforschten Lehrkräfte zu Mathematikwerkzeugen zusammen: Häufig wird von den Lehrkräften formuliert, dass mathematische Werkzeuge einfach und schnell zu erlernen sein sollten, damit sie eine Unterstützung und kein Hindernis beim Erlernen von Unterrichtsinhalten darstellen. Zusätzlich ist vielen Lehrkräften eine technisch störungsfreie Bedienbarkeit der App wichtig, weil Software-Fehler als hinderlich für den reibungslosen Unterrichtsverlauf angesehen werden und die Schüler:innen demotivieren könnten. Als drittes entscheidendes Kriterium einer ‚guten‘ CAS-App führen die interviewten Lehrpersonen den allumfassende Funktionsumfang der App an: Die CAS-App sollte aus Sicht der Studienteilnehmenden alle Funktionen beinhalten, die zum Lehren der im Lehrplan festgelegten Unterrichtsinhalte der Sekundarstufe II notwendig sind. Zudem wünschen sich viele Lehrkräfte aus der Studie einen Prüfungsmodus als Teil des Funktionsumfangs der App, der diese in Klausuren nutzbar macht. Zusätzliche Funktionen, die im Rahmen der Beforschung den erwarteten Änderungen der Unterrichtskultur oft als positiv hervorgehoben wurden, sind die simultane Nutzungsmöglichkeit mehrerer Repräsentationsformen zur Verständnisvertiefung und die Integration dynamischer Schieberegler zur Förderung von entdeckendem Lernen. Diese Funktionen gelten zwar nicht als elementare Qualitätsmerkmale einer ‚guten‘ CAS-App aus Sicht der befragten Lehrkräfte, aber werden dennoch häufig als besonders vorteilhafte Elemente einer CAS-App genannt. Die Studie ermöglicht zahlreiche Hypothesen über die Beliefs der interviewten Lehrkräfte zu den erwarteten Änderungen der Unterrichtskultur bei der unterrichtlichen Implementation von CAS-Apps: In der Studie zeigt sich, dass die Beliefs der inhaltlichen, methodisch-didaktischen und strukturellen Ebene der Unterrichtskultur in den Auffassungen der befragten Lehrkräfte verknüpft sind und zusätzlich mit epistemologischen und pädagogischen Beliefs sowie Selbstwirksamkeitsüberzeugungen verbunden sind. Insgesamt wird von vielen Lehrpersonen auf der inhaltlichen Ebene durch das Auslagerungsprinzip eine verstärkte Förderung von prozessbezogenen Kompetenzen und eine vermehrte Zuwendung zu authentischen Aufgaben mit Realitätsbezug erwartet. Dies wird von den meisten Lehrkräften positiv bewertet, häufig sprachen die Studienteilnehmenden in diesem Zusammenhang jedoch von ihrer Angst vor dem dadurch bedingten Rückgang von inhaltsbezogenen (händischen) Rechenfertigkeiten ihren Schüler:innen. Diese Angst ist verstärkt bei Lehrkräften zu beobachten, die epistemologische Beliefs halten, die beinhalten, dass hilfsmittelfreie Fähigkeiten und kalkülarartige Rechnungen als Teil der Natur von Mathematik im Unterricht deutlich werden sollen. In Bezug auf die didaktisch-methodische Ebene wird häufig als Vorteil genannt, mit

CAS-Apps, das eigenständige Lernen der Lernenden fördern zu können. Auch beim Umgang mit Ergebnissen wird von einigen Lehrpersonen eine verstärkte Schülerzentrierung dadurch prognostiziert, dass die Lernenden durch Screen-Sharing vermehrt ihren Lösungsweg mit der CAS-App vorstellen können. Zudem bieten die Visualisierungsmöglichkeiten der CAS-Apps nach Ansicht der befragten Lehrkräfte das Potenzial zur Förderung des mathematischen Verständnisses bei den Lernenden und zur Gestaltung von Aufgaben zum entdeckenden Lernen. Der größere Bildschirm eignet sich aus Sicht der Studienteilnehmenden, um kooperative Lernformen zu ermöglichen. Bezogen auf die strukturelle Ebene sehen die interviewten Lehrkräfte besonders die zeitliche Gestaltung ihres Unterrichts im Umbruch: Viele Lehrpersonen merken im Interview an, dass sie die Bedienung einer CAS-App als schneller erlernbar als die eines Handhelds einschätzen. Die gewonnene Zeit kann aus Sicht einiger Lehrkräfte dazu genutzt werden, alte Inhalte wie die Polynomdivision wieder in den Unterricht zu integrieren oder die Vernetzung zwischen verschiedenen Inhalten zu fördern. Gleichzeitig teilen mehrere Lehrkräfte aus der Studie die Sorge, dass große Herausforderungen bei der Bewältigung von schulorganisatorischen Problemen auf sie zukommen, die sich beim Wechsel vom GTR zu Tablet-Apps und im Rahmen der Digitalisierung allgemein ergeben, z. B. hinsichtlich der Geräteausstattung und -administration und der Gewährleistung der Sicherheit der Tablets in Prüfungen. Die interviewten Lehrkräfte wünschen sich im Hinblick auf Prüfungen meist eine Vergrößerung des Umfangs des hilfsmittelfreien Teils, um weiterhin die Wichtigkeit des Erlernens von Rechenfähigkeiten zu betonen. Die Studienteilnehmenden sehen die Veränderung der Aufgabenkultur hin zu einer vermehrten Nutzung von Sachaufgaben auch im Hilfsmittelteil der Klausuren bei der Nutzung von CAS-Apps als notwendig an. Bezüglich des Einsatzes des Werkzeuges im Unterricht zeichnet sich weiterhin die Tendenz ab, dass die Lehrkräfte zunächst das händische Vorgehen lehren möchten, bevor die CAS-App im Kontext des Inhaltsfeldes genutzt wird. Zudem wird von mehreren Lehrkräften eine bessere Berufsvorbereitung durch die Nutzung einer App auf einem Tablet prognostiziert, jedoch ein Wechsel auf die Universität durch das verringerte Einüben händischer Rechnungen als erschwert wahrgenommen. In den Aussagen über die Schüler:innen wird ersichtlich, dass einige Lehrkräfte aus der Studie die Ansicht teilen, dass der Unterricht für die Schüler:innen durch die Nutzung von moderner Technik, der Möglichkeit händische Rechnungen auszulagern und durch die Visualisierungsmöglichkeiten beim Einsatz von CAS-Apps attraktiver wird. Die vermehrte Fokussierung von prozessbezogenen Kompetenzen und die Nutzung von authentischen Anwendungsaufgaben wird vermehrt als Chance gesehen, leistungsstarke Schüler:innen zu fördern und zu motivieren. Dabei wird jedoch teilweise zugleich die Überforderung leistungsschwacher Lernender befürchtet.

Es zeigt sich außerdem, dass einige der befragten Lehrkräfte geringe Selbstwirksamkeitsüberzeugungen in Bezug auf Bereiche haben, die beim Einsatz von CAS-Apps bedeutsam sind: Diese Lehrkräfte schätzen ihren eigenen Einfluss auf die

Verbesserung von schulorganisatorischen Bedingungen als gering ein. Zudem sehen sich einige Lehrkräfte nicht in der Lage, insbesondere bei Prüfungen auftretende technische Probleme bei der Nutzung von CAS-Apps zu lösen. Manche der teilnehmenden Lehrkräfte zeigen sich durch den Wechsel des Werkzeuges verunsichert und sprechen eine große Unsicherheit über die Anforderungen des CAS-Erlasses sowie zukünftige Prüfungsformate an. Zugleich wird die eigene Änderung des Unterrichts, um verstärkt didaktische Vorteile von CAS-Apps nutzbar zu machen, im Rahmen der Befolgung des Lehrplans teilweise von den Lehrkräften als eingeschränkt erlebt.

In der folgenden Abbildung wird zusammenfassend dargestellt, inwiefern die Auffassungen der Lehrkräfte zum Einsatz von CAS-Apps Übereinstimmungen mit den bisher identifizierten Auffassungen zu (CAS-)Handhelds nach Thurm und Barzel (2021, S.48) aufweisen.

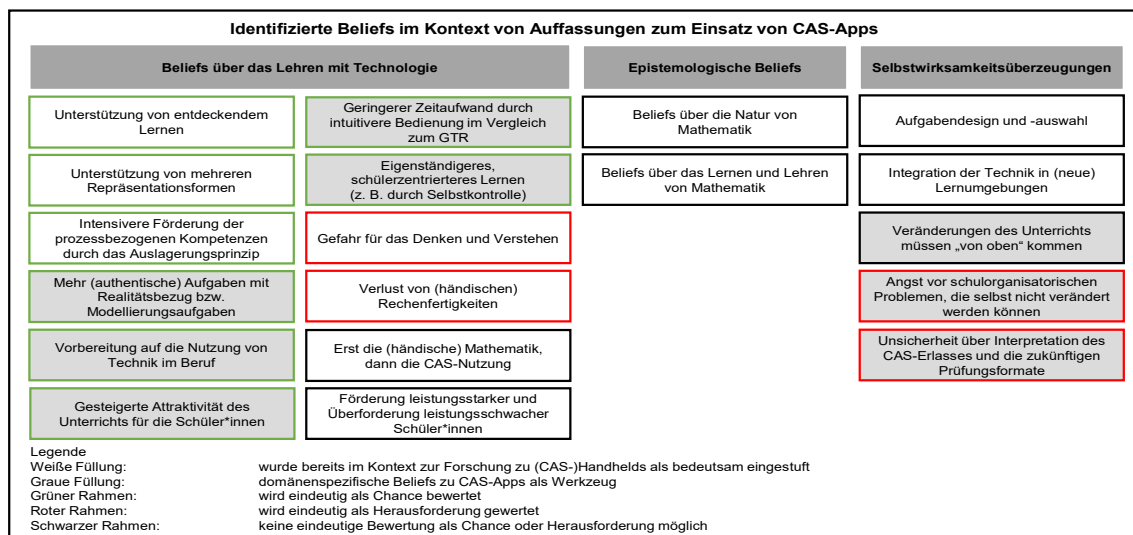


Abb.1: Identifizierte Beliefs im Kontext von Auffassungen zum Einsatz von CAS-Apps. Eigene Darstellung in Anlehnung an Thurm und Barzel (2021, S.48).

In Bezug auf domänenspezifische Beliefs zu CAS-Apps zu Inhaltsfeldern der Mathematik lieferte die Studie einige mögliche Hypothesen: Insbesondere in den Inhaltsfeldern der Analysis und analytischen Geometrie wird seitens einiger Lehrkräfte erwartet, durch verbesserte Visualisierungsmöglichkeiten der CAS-Apps das mathematische Verständnis der Lernenden zu fördern. In der Stochastik wird von den befragten Lehrkräften durch die einfachere Bedienung eine vermehrte Nutzung von Datenvisualisierungen im Unterricht prognostiziert. Der Verlust händischer Fähigkeiten wird insbesondere im Inhaltsfeld Algebra bei der Fähigkeit Gleichungen zu lösen und Terme umzuformen befürchtet. Auch in der Analysis wird ein Rückgang von händischen Fertigkeiten beim Einsatz einer CAS-App rund um die Kurvendiskussion und bei der Arithmetik in Bezug auf Kopfrechenfähigkeiten kritisch von den Studienteilnehmenden hinterfragt.

4. Schülerinnen und Schüler zu CAS-Apps als Alternative zu klassischen Handhelds

Die Verwendung von Computeralgebrasystemen (CAS) hat sich in den letzten Jahren zu einem wesentlichen Bestandteil des mathematischen Unterrichts entwickelt. Insbesondere im Kontext der Abiturvorbereitung eröffnen sie den Schüler:innen neue Möglichkeiten, komplexe mathematische Aufgaben zu lösen. CAS bieten umfangreiche Funktionen und leistungsstarke Algorithmen, die eine effiziente Bearbeitung mathematischer Probleme ermöglichen (Hörnberger, 2022). Jedoch bleiben herkömmliche Taschenrechner nach wie vor weit verbreitet und werden von vielen Schüler:innen bevorzugt genutzt. In dieser Erhebung haben die Lernenden den Einsatz von CAS bei der Lösung von Abituraufgaben mit der Verwendung herkömmlicher Taschenrechner verglichen und in einer Umfrage bewertet. Dabei sollten sowohl die Leistungsfähigkeit des CAS als auch die individuellen Präferenzen, Erfahrungen und Schwierigkeiten der Schüler:innen erhoben werden.

Der für die Erhebung verwendete Fragebogen für die Lernenden bestand aus insgesamt 38 geschlossenen sowie offenen Fragen. Auf die anfänglich allgemeinen Fragen wie der Schulform, dem Besuch eines Grund- oder Leistungskurses und der letzten Mathenote auf dem Zeugnis, sollten die Schüler:innen angeben, wie sie mit digitalen Medien ausgestattet sind und mit diesen arbeiten. Daraufhin folgten Fragen bezüglich des Umgangs mit dem CAS (in der Umfrage als TabletApp bezeichnet) im Vergleich zum sonstigen Arbeiten mit dem Handheld. Diese Vergleiche greifen verschiedene Komponenten auf, die sich bei der Eingewöhnung an einen neuen Taschenrechner als relevant erweisen haben und sind nur indirekt bei der Analyse der Ergebnisse einzusehen. Die Teilnehmenden haben lediglich die gleichen Fragen zu beiden Systemen gestellt bekommen und sollten dabei eine Einschätzung mit jeweils einer Skala von 1-10 abgeben. Beispielsweise sollten die Lernenden die benötigte Zeit zur Interpretation eines Rechenwegs einmal bei der CASeasy+ App und bei der nächsten Frage bei dem Handheld einschätzen. Im Anschluss daran wurden offene Fragen gestellt, bei denen die vorherige Einschätzung begründet oder erläutert werden sollte. Zuletzt wurden die Schüler:innen gebeten eine allgemeine Einschätzung hinsichtlich der Vorteile und der Veränderung des Mathematikunterrichts durch beispielsweise die CASeasy+App von Westermann abzugeben.

Die Selbsteinschätzung der Lernenden bei der Frage nach dem Umgang mit digitalen Medien wurde im Durchschnitt mit dem Wert 7,81 bewertet. Dieser Wert lässt sich mit der Verfügbarkeit der Medien im privaten Rahmen in Verbindung setzen. So geben 196 Schüler:innen an, ein eigenes Tablet oder iPad zu besitzen und weitere 16 Zugang zu einem haben. Generell gaben 75% der Teilnehmenden an, ein Tablet oder iPad als Heft-/ Buch- oder Ordnerersatz in der Schule zu verwenden. Des weiteren geben 40% der Schüler:innen an, bereits mit einer TaschenrechnerApp gearbeitet zu haben, bei der es sich vorrangig um GeoGebra gehandelt hat.

Die darauffolgenden Fragen zum Vergleich von TabetApp und Taschenrechner werde in der abgebildeten Tabelle paraphrasiert dargestellt. Dabei wurde immer die Zelle farblich hervorgehoben, die in dem Vergleich etwas besser von den Lernenden im Durchschnitt bewertet worden ist.

Paraphrasierte Fragen	CAS	Taschenrechner
Einfachheit des Findens von Rechenwegen bzw. Befehlen mit dem jeweiligen System (1= sehr schwer; 10= sehr einfach)	6,14	6,69
Benötigte Zeit zur Eingewöhnung an das System (1= sehr wenig; 10= sehr viel)	5,4	4,79
Zeitkontingent zum Interpretieren und mathematischem Begründen im Unterricht durch das System (1= sehr viel weniger; 10= sehr viel mehr)	5,7	6,14
Dauer eine Kurvendiskussion mit dem System (1= sehr kurz; 10= sehr lang)	4,83	5,42
Visualisierung in dem System (1= sehr schlecht; 10= sehr gut)	7,38	5,9
Benötigte Zeit für die Lösungskontrolle von Aufgaben mit dem System (1= sehr wenig; 10= sehr viel)	4,87	5,42
Zeitaufwand für das Aufrufen vorheriger Lösungen innerhalb des Systems (1= sehr wenig; 10= sehr viel)	6,63	5,66

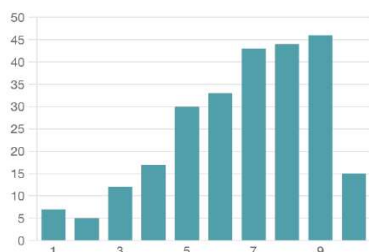
Tabelle 1: Paraphrasierte Fragen aus dem Fragebogen mit Werteskala.

Der erste Vergleich bezieht sich auf die Einfachheit des Rechenweges, beziehungsweise die Auswahl des richtigen Befehls für eine Rechnung. Mit einem Unterschied von 0,55 in der durchschnittlichen Bewertung empfinden die Lernenden den bisherigen Taschenrechner als einfacher in der richtigen Auswahl von Befehlen und Rechenwegen. Auch in der benötigten Zeit zur Eingewöhnung an das System und um die Ergebnisse im Unterricht interpretieren zu können, wird der Taschenrechner gegenüber dem CAS als einfacher eingeschätzt (Siehe Abb. 2). Besonders interessant an dieser Frage ist die Gewichtung der Aussagen. So haben knapp 60% der Schüler:innen einen Wert von 7 oder mehr bei der Beurteilung des Taschenrechners ausgewählt, sowie auch die Zeitliche Eingewöhnung in den Taschenrechnern von über 50% als sehr kurz eingeschätzt wurde. Dahingegen wird gerade die Zeitdauer der Eingewöhnung in die TabetApp von den Lernenden sehr unterschiedlich eingeschätzt und hat keine eindeutige Tendenz vorzuweisen.

10. Wie einfach findest du den richtigen Rechenweg bzw Befehl an deinem **Taschenrechner**? (1=sehr schwer/10=sehr einfach)

6.69

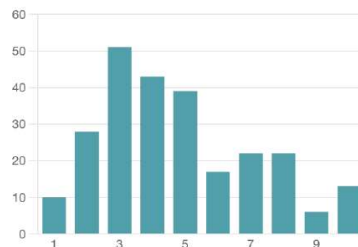
Durchschnittliche Bewertung



11. Wie viel Zeit hast du benötigt, um dich an den Umgang mit deinem **Taschenrechner** zu gewöhnen? (1=sehr wenig/10=sehr viel)

4.79

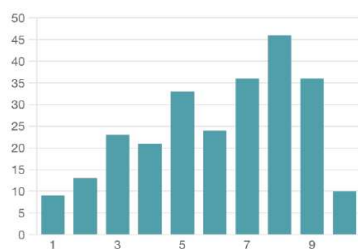
Durchschnittliche Bewertung



12. Wie einfach hast du den Rechenweg mit der neuen **TabletApp** gefunden? (1=sehr schwer/10=sehr einfach)

6.14

Durchschnittliche Bewertung



13. Wie viel Zeit hast du gebraucht um dich an die neue **TabletApp** zu gewöhnen? (1=sehr wenig/10=sehr viel)

5.40

Durchschnittliche Bewertung

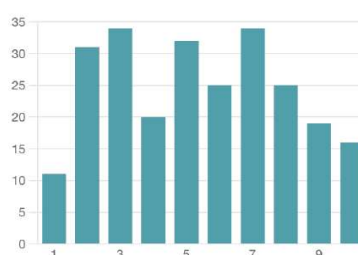


Abb. 2: Graphische Darstellung der Antworthäufigkeiten auf Frage 10-13 in Säulendiagrammen dargestellt.

Speziell die Komponente der Zeitersparnis für das Interpretieren und Begründen mathematischer Lösungen im Unterricht ist sehr relevant. Durch die vielen zusätzlichen Funktionen des CAS verändert sich die Aufgabenstruktur, da theoretisch mehr Zeit für Interpretationen zur Verfügung steht (Hörnberger, 2022, S.28). Die Ergebnisse der Umfrage haben ergeben, dass die Schüler:innen bei dem Arbeiten mit dem GTR mehr Zeit für diese Komponente im Unterricht haben. Kommentare von Schüler:innen aus offenen Aufgaben sagen zudem, dass eigenes Denken nicht mehr erforderlich sei (Aussage eines Lernenden). Klinger und Schüler-Meyer (2019) haben in ihrem Buch ausgeführt, wie eine geeignete Aufgabenkultur bei der Verwendung von Computer-Algebra-Apps aussehen kann und sollte. Diese Ausführungen decken sich jedoch nicht mit den ersten intuitiven Empfindungen der Schüler:innen, sodass diese noch mehr Zeit zur Lösungsinterpretation und Begründung beim Handheld sehen. Dies kann aber auch damit zusammenhängen, dass die Befehlsstrukturen in der neuen CAS-App noch nicht so leicht zu finden sind und daher dafür zu dem Zeitpunkt noch mehr Zeit benötigt wurde. Obwohl bei den letzten Vergleichen des GTR und der TabletApp die App in allen bisherigen Komponenten als vergleichsweise schlechter von den Schüler:innen bewertet wurde, sind die Lernenden sich bei der Frage nach dem Nutzen der TabletApp für

das Lösen von Mathematikaufgaben recht einig. In dem Kreisdiagramm in Abbildung 3 lässt sich gut erkennen, dass 74,6% der Teilnehmenden die Tablet-App als eine Erleichterung für die Aufgabenbearbeitung empfinden. Aussagen wie „Ich finde es [die TabletApp] wesentlich angenehmer, jedoch macht es den mathematischen Hintergrund nicht leichter“ oder „Weil es [die TabletApp] nach dem Angewöhnen sehr intuitiv sein kann“ zeigen, dass die App als Entlastung für Schüler:innen empfunden wird. Zugleich wird die TabletApp aber auch als hinderlich betrachtet, indem sie für mögliche Ablenkungen durch die Benutzung von anderen Apps auf dem Tablet anregt, oder als zu komplex empfunden wird (Aussagen von Lernenden).

19. Glaubst du, dass eine solche neue **TabletApp** allen Schülerinnen und Schülern das Lösen von Aufgaben in der Mathematik erleichtern würde?

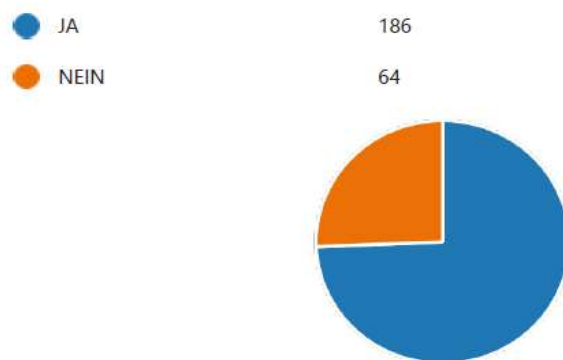


Abb. 3: Graphische Darstellung der Antworthäufigkeiten aus Frage 19 in einem Kreisdiagramm dargestellt.

In den zu lösenden Abituraufgaben ging es im Feld der Analysis um verschiedene Aspekte einer Kurvendiskussion. Somit haben die Schüler:innen keine vollständige Kurvendiskussion während der Erhebung mit der TabletApp durchgeführt, diese jedoch in Ansätzen ausgeführt. Dabei schätzen die Lernenden die Dauer für eine Kurvendiskussion mit CASeasy+ App mit einem Unterschied von 0,6 in den Durchschnittswerten als kürzer ein, als es mit dem Taschenrechner dauern würde.

Die nächste wichtige Komponente bei dem Vergleich von Taschenrechner und TabletApp ist die Visualisierung. Mit einem durchschnittlichen Wert von 7,38 und einer Angabe der Werte 7-10 bei von 72% der Teilnehmenden werden die Visualisierungen bei der TabletApp von den Lernenden als sehr gut empfunden. Dagegen erreicht der Taschenrechner einen durchschnittlichen Wert von 5,9 in der Einschätzung, welcher mit einer schlechten Auflösung und einem vergleichsweise kleinen Display begründet wird (Aussage von Lernenden). Auch die Formulierungen der Befehle und die Darstellung der Ergebnisse spielt bei dieser Komponente eine große Rolle. Nach der Einschätzung zu der Visualisierung sollten die Schüler:innen in der nächsten Frage ihre Einschätzung begründen. „Wir kennen uns gut mit Technik aus und die Befehle sind [in der TabletApp], anders als bei unseren Taschenrechnern, auf Deutsch. Außerdem findet man sich leicht zurecht, durch

das Suchfeld.“ oder „weil es anschaulicher ist und einfacher Ergebnisse zu verstehen“ verstärken die Ergebnisse, wieso die Visualisierung bei der TabletApp als angenehmer empfunden wird.

Die letzten beiden Fragen richten sich an das Kontrollieren von Aufgaben und das erneute Aufrufen von vorherigen Ergebnissen. In beiden Fragen wird die TabletApp im Vergleich, als das weniger Zeitaufwendige System empfunden. Bei der gleichen Frage bezüglich der Kontrolle von Ergebnissen mit dem zusätzlichen Fokus auf die Kurvendiskussion, wurde die TabletApp als deutlich angenehmeres Medium genannt (Vgl. Abb. 4). Knapp 50% haben sich für die TabletApp entschieden und 26,7% haben beide Darstellungsmöglichkeiten, als gleichwertig empfunden, was die Auffassung einer allgemeinen Zeitersparnis bei der Nutzung der TabletApp für die Aufgabenkontrolle unterstützt.

34. Angenommen, du hättest eine Kurvendiskussion komplett ohne Hilfsmittel gerechnet. Womit könntest du deine Ergebnisse am besten kontrollieren

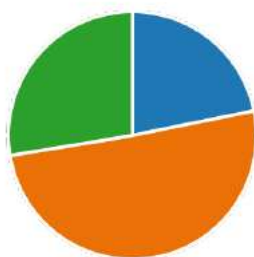


Abb. 4: Graphische Darstellung der Antworthäufigkeiten aus Frage 34 in einem Kreisdiagramm dargestellt.

Aus den abschließenden offenen Fragen bezüglich der Veränderung des Mathematikunterrichts durch ein CAS-System wie der CASeasy+ App von Westermann werden keine eindeutige Vorteile von den Lernenden gegenüber dem Taschenrechner angegeben. Das allgemeine Lösen von Aufgaben, die Visualisierung und der intuitive Umgang sind nur ein paar der Punkte, die in diesem Zusammenhang genannt werden. Durch die großflächige Implementierung von Tablets oder iPads im Schulalltag und auch im privaten Rahmen, können leicht verschiedene CAS-Apps auf den Geräten aufgespielt werden. Aber auch in diesem Zusammenhang haben die Teilnehmer:innen der Umfrage die Befürchtungen geäußert, dass andere Anwendungen auf dem Tablet eine Ablenkung darstellen könnten und auch der Kostenfaktor bei der Anschaffung von Tablets zu berücksichtigt sei (Aussagen von Lernenden).

Zusammenfassend lassen sich weitere Ergebnisse durch die Lernendenperspektive auf die Frage nach CAS-Systemen in der Schule ableiten. Dazu muss beachtet

werden, dass eine 10-minütige Einführung in ein System ausreicht, um einen Grundlegenden Überblick über das System zu erhalten, jedoch nicht um das volle Potential des Systems in einer Anwendungsaufgabe abzurufen, oder Aussagen über die Dauer des dauerhaften Einsatzes im Unterricht zu tätigen. Die Schüler:innen können jedoch erste Einschätzungen geben und auch kritisch reflektierend zu diesen Stellung nehmen. Daraus ergibt sich für die Lernenden, dass der Taschenrechner in seiner Bedienung noch immer die leichteren Zugänge bietet und in diesem Kontext auch den größten Zeitraum für die Interpretation der Ergebnisse im Unterricht zur Verfügung stellt. Die Schüler:innen haben diesen zu dem Erhebungszeitraum auch schon 3 Jahre verwendet, weswegen die geringe Differenz in den Durchschnittswerten klar zeigt, dass die CAS-App nach einer Anwendung mit dem Taschenrechner mithalten kann. Bei einer genaueren Untersuchung über einen längeren Zeitraum könnten die Einschätzungen noch verfeinert und fundiert werden.

Besonders das Kontrollieren von Aufgaben und auch das erneute Aufrufen früherer Ergebnisse werden allerdings schon nach dem ersten Einsatz bei der TabletApp als einfacher empfunden. Besonders die Visualisierungen in der TabletApp werden von den Schüler:innen als sehr gut bewertet und haben auch den größten Abstand in ihren Durchschnittswerten zu dem Taschenrechner vorzuweisen. Die Veränderungen durch die Implementierung einer CAS App bieten aus Sicht der Lernenden sowohl Potentiale als auch Herausforderungen, die klar Formuliert werden. So stehen sich Aussagen wie „Man muss sich nur dran gewöhnen und braucht etwas Zeit, um damit klar zu kommen. Wenn man aber damit umgehen kann, kann die App einem schon einiges erleichtern und vieles würde wahrscheinlich schneller gehen.“ und „Man muss die Aufgabe nur in die App übertragen, eigenes Denken ist nicht mehr erforderlich“ gegenüber (Aussagen von Lernenden). Gerade die letzte Aussage spiegelt auch einen zentralen Belief der Lehrpersonen wieder und verdeutlicht die Wichtigkeit auch die Meinungen und Ansichten von Schüler:innen in solchen Debatten zu berücksichtigen.

Literatur:

- Baacke, D. (2007). Medienpädagogik. Tübingen: Niemeyer
- Dilling, F. (2022). Begründungsprozesse im Kontext von (digitalen) Medien im Mathematikunterricht. Wissensentwicklung auf der Grundlage empirischer Settings. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Gurcay, D., Wong, B., & Chai, C. S. (2012). Turkish and Singaporean Pre-service Physics Teachers' Beliefs about Teaching and Use of Technology. *The Asia-Pacific Education Researcher*, 22 (2), 155-162.
- Hörnberger, K. (2022). WTR, GTR und CAS-Rechner als Auslaufmodell? – Ein Praxisorientierter Überblick über Tablet-Apps als Alternative zum Taschenrechner in Nordrhein-Westfalen aus schulorganisatorischer Sicht. In F. Dilling, F. Pielsticker & I.

- Witzke (Hrsg.), Neue Perspektiven auf mathematische Lehr-Lernprozesse mit digitalen Medien: Eine Auswahl grundlagenorientierter und praxisorientierter Beiträge (1st ed. 2022). Springer Fachmedien Wiesbaden.
- Klinger, M. & Schüler-Meyer, A. (2019). Wenn die App rechnet: Smartphone-basierte Computer-Algebra-Apps brauchen eine geeignete Aufgabenkultur. *Mathematik Lehren*, Heft 215.
- Kuckartz, U., & Rädiker, S. (2022). *Qualitative Inhaltsanalyse: Methoden, Praxis, Computerunterstützung: Grundlagentexte, Methoden* (5. Auflage). Weinheim, Basel: Beltz Juventa.
- Thurm, D. & Barzel, B. (2020). Effects of a professional development program for teaching mathematics with technology on teachers' beliefs, self-efficacy and practices. *ZDM – Mathematics Education*, 52 (7), 1411-1422.
- Thurm, D. & Barzel, B. (2021). Teaching mathematics with technology: a multidimensional analysis of teacher beliefs. *Educational Studies in Mathematics*, 109, 41-63.

Melanie Huth, Jasmin Pollok & Christof Schreiber

Justus-Liebig-Universität Gießen, Melanie.Huth@math.uni-giessen.de, Jasmin.Pollok@math.uni-giessen.de, Christof.Schreiber@math.uni-giessen.de

Unterrichtsintegrierte Förderangebote der Digitalen Drehtür Hessen im Fach Mathematik

Eine unterrichtsintegrierte Förderung für mathematisch interessierte Lernende ist für Lehrkräfte oft herausfordernd im Schulalltag. Die Digitale Drehtür Hessen stellt dafür digitale Lernprogramme für Primar- und Sekundarstufe (Jg. 3 bis 10) bereit. Angelehnt an Renzulli et al. (1981) bearbeiten Lernende projektorientiert mathematische Themen parallel zum Unterricht und kehren dann in den Klassenverband zurück. Im Beitrag wird das Konzept im Fach Mathematik vorgestellt.

1. Einleitung

Die Digitale Drehtür (<https://digitale-drehtuer.de>) ist eine länderübergreifende Bildungsinitiative. Sie stellt sowohl asynchrone als auch synchrone online zugängliche Lernangebote zu verschiedenen Fächern und Inhalten bereit und soll einen Beitrag zur Begabungsentfaltung aller Lernenden leisten. Angelehnt an die Idee von Renzulli et al. (1981) zur Entfaltung von Begabung und der Berücksichtigung von Potenzialen, soll es so möglich werden, individuelle Interessen zu fördern und zu bestärken. Die Idee ist, zunächst durch inspirierende Angebote eigene Interessen zu entdecken. Dies erfolgt durch sogenannte *Inspirations*, auch Typ I Förderangebote genannt, umgesetzt als digitale Videokonferenzen, bei denen die Lernenden unterschiedliche Themen kennenlernen können. Bei Typ II Förderungen wird die eigene *Methodenkompetenz* gestärkt, indem z.B. Strategien reflektiert und erlernt werden. Förderangebote vom Typ III bieten eine inhaltliche Vertiefung und die Arbeit an einem *Projekt* zu einem selbstgewählten Thema.

In Hessen wird die Digitale Drehtür vom Hessischen Ministerium für Kultus, Bildung und Chancen gefördert und vom Zentrum für Lehrerbildung der Justus-Liebig-Universität koordiniert. In einem Fächerverbund aus Kunst, Deutsch, Biologie, Sachunterricht und Mathematik sollen fachspezifisch vor allem Typ III Angebote entwickelt werden, die integriert in den Schulalltag genutzt werden können. Die Implementierung erfolgt auf dem sogenannten Campus der Digitalen Drehtür (<https://www.digitale-drehtuer-campus.de/explore>), auf dem alle Lernangebote zugänglich sind. Im Fach Mathematik erfolgt die Ausgestaltung als asynchrone Lernprogramme in der *Werkstatt Mathematik* auf dem Campus, die projektorientiert die Beschäftigung mit verschiedenen Inhalten erlauben. Die vielfältigen mathematischen Themen sind jahrgangsübergreifend konzipiert und bieten mathematische Lernprogramme für die Jahrgänge 3 und 4, 5 und 6, 7 und 8 sowie 9 und 10. Die Lernprogramme sollen im Alltag des Mathematikunterrichts auch für die Lehr-

kraft eine Entlastung bezüglich geeigneter Förderangebote für besonders interessierte und begabte Lernende bieten. Für das Angebot, im Sinne des Enrichments,¹⁰ können sich Schulen über die Seite der Digitalen Drehtür anmelden, um die Angebote für eine Gruppe von Lernenden oder auch für ganze Klassen auf dem Campus kostenlos zu nutzen.

Im vorliegenden Beitrag soll der theoretische Hintergrund der Digitalen Drehtür in Hessen für das Fach Mathematik vorgestellt und die konzeptionelle Struktur der entwickelten Lernprogramme beschrieben werden. Einblicke in ein ausgewähltes Programm und die Bearbeitung von Lernenden schließen sich an, bevor in einem Fazit ein Ausblick auf die anstehende Begleitforschung erfolgt.

2. Begabungsentfaltung nach Renzulli

Die Digitale Drehtür lehnt sich theoretisch an das Konzept zur Begabungsentfaltung nach Renzulli (1978, 2004) an. Daher werden im Folgenden Renzullis Drei-Ringe-Konzept und das damit verbundene Drehtürmodell erläutert.

2.1. Das Drei-Ringe-Konzept

Das Enrichment-Triad-Modell bzw. Drei-Ringe-Konzept von Renzulli (1978, 2004) und Renzulli et al. (1981) wurde in den 70er Jahren entwickelt und bildet die Rahmentheorie der Digitalen Drehtür. Der Ansatz folgt der Idee, Begabung als Potenzial zu betrachten. Die „Interaktionen zwischen individueller Persönlichkeit und sozialer Umwelt“ (Renzulli, 2004, S. 56) trägt dabei entscheidend zum Gelingen der Entfaltung dieses Potenzials bei. Zentral sind geeignete Lernangebote, die Interessen aufgreifen und selbstgesteuertes Lernen ermöglichen. Renzulli (2004) beabsichtigt mit seinem Ansatz die Komplexität des Phänomens von Begabung stärker in den Fokus zu rücken sowie eine Abkehr von der Gleichsetzung der Begabung mit hoher Intelligenz. Mitbedacht werden auch Lernende, die möglicherweise ihr Potenzial im Schulalltag oder bei Tests nicht (immer) zeigen können.

Schulen sollten nach Renzulli (2004) als Orte der Begabungsentfaltung für Lernende erlebbar werden. Gleichschrittigkeit des Lernangebots und des zeitlichen Rahmens, verbunden mit Bewertung wird diesem Ansatz folgend als ungeeignete Antwort auf Potenziale von Lernenden gesehen (Greiten, 2016, S. 11). Vielmehr sollte ein breites Themenangebot inspirieren, Methodenkompetenz stärken und sowohl projektorientiertes als auch fächerübergreifendes Arbeiten weitgehend selbstgesteuert ermöglichen. Renzulli (1978) plädiert auch für den Einbezug persönlicher Stärken bei Bewertungen. Es sollten Lernsituationen angeboten werden, die den Aufbau kognitiver Strukturen bei Lernenden begünstigen und gewissermaßen automatisch initiieren. So sollen Lernende weniger Konsument*innen und Anwender*innen von Wissen, sondern vielmehr Wissensentwickler*innen im Ha-

¹⁰ Enrichment meint eine vertiefende Auseinandersetzung mit schulcurricularen Inhalten im Sinne von anspruchsvolleren und komplexeren Aufgaben, die auch methodisches Lernen ansprechen und Standard-Aufgabenformate überschreiten (Bardy & Bardy, 2020, S. 162).

bitus einer Wissenschaftler*in werden und ihre Erkenntnisse zur Diskussion stellen (Greiten, 2016). Damit schließt der Ansatz zunächst die Gruppe aller interessierten Lernenden ein, richtet sich aber innerhalb dieser Gruppe speziell auch an besonders begabte Schülerinnen und Schüler. Die Schnittmenge aus den Bereichen der *überdurchschnittlichen intellektuellen Fähigkeiten*, der *Kreativität* und der *Aufgabenbereitschaft/Motivation* wird dem Ansatz folgend als Hochbegabung oder Hochleistung angesehen.¹¹ *Überdurchschnittlich intellektuelle Fähigkeiten* zeigen sich etwa an schlussfolgerndem Denken, an einer besonderen sprachlichen Gewandtheit oder auch an der beschleunigten Informationsverarbeitung. *Kreativität* wird z.B. an einem flexiblen Lösungsverhalten, der Offenheit für Neues oder einer Risikobereitschaft für Denk- und Vorgehensweisen deutlich. *Aufgabenbereitschaft bzw. Motivation* lässt sich an Ausdauer, Begeisterung und Beharrlichkeit bei der Bearbeitung von Aufgaben und dem Einschlagen von verschiedenen Lösungswegen beobachten. Abbildung 1 zeigt das Modell und weitere ausdifferenzierende Aspekte der Merkmale.

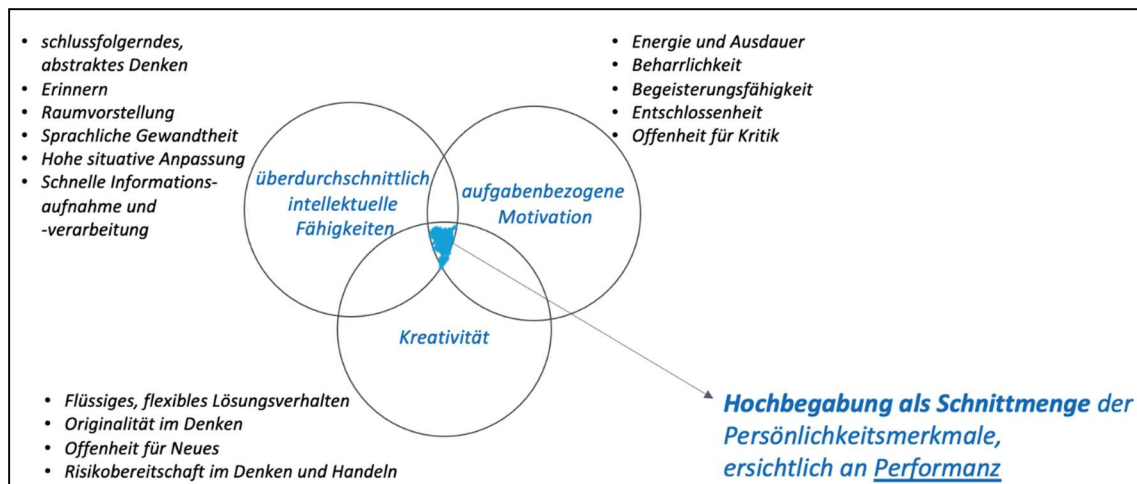


Abbildung 1: Das Drei-Ringe-Modell nach Renzulli et al. (1981), Darstellung aus Huth, Pollok, Schreiber, Utsch (im Druck)

Renzullis Modell wurde von verschiedenen Forschenden weiterentwickelt. Mönks und Ypenburg (2012) erweitern das Modell etwa um die Sozialisationsinstanzen Familie, Peers und Schule zu einem Mehr-Faktoren-Modell. Die genannten Sozialisationsinstanzen werden grafisch in den Hintergrund der drei Ringe als gleichseitiges Dreieck gelegt und gelten als zentral im Zusammenspiel mit den bei Renzulli et al. (1981) aufgeführten Persönlichkeitseigenschaften.

¹¹ Mit den Angeboten des Fachs Mathematik in der Digitalen Drehtür sollen im Sinne einer Begabungsförderung (Fuchs, 2019, S. 216) alle interessierten Lernenden angesprochen werden. Damit zielt das Angebot auf eine heterogene Lerngruppe von interessierten bis mathematisch begabten Lernenden. Es erfolgt keine Diagnostik, die zu einer Auswahl führt. Die Teilnahme erfolgt auf Grundlage einer gemeinsamen Entscheidung von Lehrkraft, Lernender*in und den Erziehungsberechtigten. Daher wird im Folgenden die Bezeichnung *mathematisch interessierte bis begabte Lernende* oder *potenziell mathematisch begabte Lernende* als Zielgruppe verwendet. Bei Zitation von anderen Ansätzen aus der Literatur wird der jeweils dort verwendete Begriff genutzt.

Bardy und Bardy (2020) führen als Kritik an Renzullis Modell an, dass ein Grundschulkind, welches überdurchschnittliche intellektuelle Fähigkeiten vorweisen kann, seine Hochbegabung nur dann zeigen könne, wenn auch seine aufgabenbezogene Motivation durch ein entsprechendes Angebot angesprochen werde. Auf dieses Angebot nimmt aber die lernende Person selbst nur wenig Einfluss. Weitere Kritik bezieht sich auf die empirische Überprüfbarkeit der drei Aspekte von Hochbegabung und die Frage nach ihrer Gewichtung (Bardy & Bardy, 2020, S. 27f).

2.2. Das Drehtürmodell

Renzullis Idee der Drehtür beinhaltet eine flexibel gestaltete Förderung in Stammklassen und einem ca. 15-20% der besten Lernenden der Schule umfassenden „Talent Pool“ (Delisle & Renzulli, 1982, S. 90). Das Drehtürmodell verweist auf die Idee, dass Lernende die Stammklasse vorübergehend und in Absprache mit der verantwortlichen Lehrkraft wie durch eine Drehtür verlassen können, ihren eigenen Interessen mithilfe entsprechender Angebote nachgehen und sich dann flexibel in die Lerngruppe zurückdrehen können.

Die Nutzungsweisen von Drehtürförderangeboten durch teilnehmende Lernende und Lehrende in Schulen wird im Fach Mathematik von Auhagen (2023) untersucht. Im Rahmen einer Interviewstudie mit Lehrkräften und Einzelfallstudien von an Drehtürförderungen teilnehmenden Lernenden der 3. und 4. Jahrgangsstufe, kann sie Effekte auf Potenziale der kognitiven und ko-kognitiven Ebene nachweisen (S. 213f). Zudem zeigt Auhagens (2023) Forschung, dass sich nach Einschätzung von Lehrpersonen das Bild von Mathematik bei den Lernenden insbesondere an auf Enrichment angelegten Drehtürförderungen hin zu einer dynamischen, entdeckenden und problemlösenden Wissenschaft verändert und die Teilnahme mathematische Identität stärken kann (S. 208f).

3. Perspektiven auf mathematische Begabung

In diesem Abschnitt folgt zunächst die Darstellung ausgewählter mathematikdidaktischer Ansätze und deren Perspektive auf mathematische Begabung, bevor eine Verortung des Begabungsverständnisses im Rahmen des Projektes erfolgt.

3.1 Ausgewählte mathematikdidaktische Ansätze zur Begabung

Schindler und Rott (2016) lehnen sich an Renzulli et al. (1981) an und erweitern das Modell mathematikspezifisch zum KAF-Modell. Die Abkürzung KAF steht für *Kreativität, Anstrengungsbereitschaft* und *außergewöhnliche Fähigkeiten*. *Kreativität* verbinden Schindler und Rott (2016) mit einem beobachtbaren Ideenfluss, Flexibilität beim Vorgehen und einer gewissen Originalität von Lösungswegen. *Außergewöhnliche mathematische Fähigkeiten* zeigen Lernende, die besonders gut formale mathematische Strukturen erkennen können und einen hohen Grad an Generalisierungsfähigkeit mitbringen. Auch ein mathematisches Strategiegedächtnis gehört dazu. Das Vertrauen in eigenen Fähigkeiten, Durchhaltevermögen bei Aufgabenbearbeitungen und klare, rationale Lösungen werden unter

Anstrengungsbereitschaft subsummiert. Nach Schindler und Rott (2016) ist die Diagnose von mathematischer Begabung herausfordernd. Sie schlagen daher eine Fokusverschiebung auf *mathematisch begabtes Handeln* vor. Ein spezifisch messbares Intelligenzlevel oder eine diagnostizierte Begabung rücken damit in den Hintergrund. Mit dem Blick auf begabtes Handeln können auch Fähigkeiten in nur bestimmten mathematischen Inhaltsfeldern oder bezogen auf nur einen der drei genannten Bereiche berücksichtigt werden. Der Ansatz steht damit für einen stärkenorientierten Blick auf Lernende und eine angemessene Förderung, die „eine fruchtbare und sinnstiftende Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten“ (Schindler & Rott, 2016, S. 7) bereitstellt. Dies sei z.B. mit einer Förderung im Sinne des Drehtürmodells möglich.

Darüber hinaus nehmen in der nationalen Forschungsliteratur zur mathematischen Begabung die Beiträge u.a. von Käpnick (2015) und Fuchs (2019) eine zentrale Rolle ein. Käpnick (2015) beschreibt mathematische Begabung bereichsspezifisch und schreibt ihr Komplexität und Dynamik bezogen auf ihre Entwicklung zu. Fuchs (2019) differenziert zwischen *mathematisch (Hoch-)Begabten*, die einer Förderung bedürfen und eine alle Lernenden einschließende *mathematische Begabungsförderung*. Mathematisch (Hoch-)Begabte haben das Potenzial, überdurchschnittliche mathematische Fähigkeiten zu zeigen. Lernangebote der *Begabungsförderung* richten sich breiter gefasst und inklusiv an die Entwicklung der Persönlichkeit *aller* Lernenden und schließen dabei die Begabtenförderung mit ein (S. 216ff).

Bezüglich einer angemessenen Förderung von potenziell mathematisch begabten Lernenden und als Angebot der Begabungsentfaltung gelten mathematikdidaktische Konzepte, die den Umgang mit Diversität als Ressource im Rahmen natürlich differenzierender Lernangebote in fachspezifischer Weise aufgreifen als besonders geeignet (Krauthausen, 2018; Hirt & Wälti, 2022; Fuchs, 2019). Das gemeinsame Lernen an einem Inhalt und die fachliche Differenzierung ermöglichen die Ansprache verschiedener Lernniveaus. Eine Individualisierung bezüglich eigener Inhalte wird als weniger zielführend angesehen, denn gerade der soziale Austausch über den gleichen mathematischen Inhalt regt mathematisches Lernen an. Dazu bedarf es eines hinreichend komplexen Lernangebots. Auch Ganzheitlichkeit und eigene Entscheidungen der Lernenden, z.B. in Bezug auf die Nutzung von Materialien und Darstellungen, gehören zu einem natürlich differenzierenden Lernangebot mit einem hohen Anteil an sozialem Lernen (Krauthausen & Scherer, 2019, S. 49ff). Diese Sicht steht im Einklang mit interaktionstheoretischen Ansätzen zum Mathematiklernen (Krummheuer & Brandt, 2001; Krummheuer & Fetzer, 2005) und berücksichtigt in besonderer Weise heterogene Lernvoraussetzungen.

Fuchs (2019) betont die ganzheitliche Sicht auf Begabung und deren Entfaltung. Sie benennt neben dem dynamischen Konzept und der Bereichsspezifität Katalysatoren wie Familie, Freundeskreis und Schule, die Einfluss auf den Grad der Entfaltung von mathematischer Begabung nehmen können. Überdurchschnittliche

Leistungsfähigkeit kann sich in besonderer Weise zeigen, wenn bestimmte Gelin-
gensbedingungen vorliegen. So definiert Fuchs (2019) mathematische Hochbega-
bung als

[...] ein sich entwickelndes und individuell geprägtes Potenzial für eine
möglichst weit überdurchschnittliche mathematische Leistungsfähig-
keit (Performanz). Dieses Potenzial entwickelt sich in wechselseitigen
Zusammenhängen mit begabungsunterstützenden bereichsspezifischen
Persönlichkeitseigenschaften und günstigen intrapersonalen und inter-
personalen Katalysatoren.“ (S. 168).

Käpnick und Fuchs (2004) plädieren dafür, keine exkludierende Auslese der
Gruppe von potenziell mathematisch begabten Lernenden vorzunehmen (S. 332f).
Dagegen spreche das sich entwickelnde Potenzial, die Notwendigkeit einer mög-
lichst vielfältigen sozialen Erfahrung mit Gleichaltrigen und die Unsicherheit in
einer sehr frühen Diagnose (S. 332f). Als Orientierung bspw. für Lehrkräfte be-
schreibt Käpnick (2015) spezifische Merkmale mathematischer Begabung: *Bega-
bungsunterstützende Persönlichkeitseigenschaften* sind etwa Freude am Problem-
lösen, hohe Kooperationsfähigkeit, intellektuelle Neugier, hohe geistige Aktivität
und Anstrengungsbereitschaft. *Mathematikspezifische Begabungsmerkmale* um-
fassen u.a. das Speichern von mathematischen Sachverhalten und Strukturen, die
weiter genutzt werden können, das selbstständige Anwenden dieses Transfers oder
die Fähigkeit, eigene Repräsentationen zu erzeugen und diese zu wechseln. Auch
mathematische Fantasie und Sensibilität werden betont. Potenziell begabte Ler-
nende zeigen in diesem Sinne häufig ungewöhnliche Herangehensweisen, haben
eine Art Struktur- oder Zahlenblick und erkennen früh lösungsrelevante mathema-
tische Strukturen (Fuchs, 2006).

3.2 Sicht auf mathematische Begabung in der Digitalen Drehtür

Im Rahmen der Digitalen Drehtür im Fach Mathematik wird mathematische Be-
gabung theoriekonform zu den dargestellten mathematikdidaktischen Ansätzen
und der Leittheorie nach Renzulli (1978) verstanden als ein sich entwickelndes
Potenzial, besondere mathematische Leistungen zeigen zu können. Weil keine Art
von Testung bei den am Projekt teilnehmenden Schüler*innen vorgenommen wird,
sondern die Angebote differenziert gestaltet und prinzipiell offen für alle interes-
sierten Lernenden sind, verstehen wir dieses Potenzial so, dass es sich zunächst an
einem gesteigerten mathematischen Interesse und der Offenheit, sich auf entspre-
chende mathematische Förderangebote einzulassen, beobachten lässt. Die Aus-
wahl der die Lernangebote nutzenden Gruppe von Schüler*innen wird von den
Lehrkräften der Partnerschulen der Digitalen Drehtür vorgenommen. Grundsätz-
lich könnten auch ganze Klassen Lernprogramme durchlaufen, wenn die jeweilige
Lehrkraft diese in ihren Unterricht einbinden möchte. Damit einher geht der Be-
darf, dass die Angebote möglichst differenziert gestaltet sein müssen und die
Gruppe der Nutzer*innen heterogene, aber nicht im Detail bekannte Lernvoraus-
setzungen mitbringt.

Dieses Verständnis mathematischer Begabung wird mit der semiotischen Theorie nach Charles Sanders Peirce verbunden. Auf diese Weise wird es möglich, den Begriff der mathematischen Begabung semiotisch hinsichtlich einer hohen Affinität zur Diagrammnutzung und zum mathematischen Zeichengebrauch zu fassen. Nach Peirce (1931) zeichnet sich mathematisches Agieren vornehmlich durch den Umgang mit Zeichen und Diagrammen aus. Es geht vor allem um die Konstruktion von Diagrammen nach bestimmten, sozial ausgehandelten Regeln, die Manipulation von Diagrammen und schließlich um Erkenntnisgewinn und mögliche Verallgemeinerung in der mathematischen Auseinandersetzung. In dieser Sichtweise lassen sich auch die von Käpnick (2015) beschriebenen Merkmale potenziell mathematisch begabter Lernender wiederfinden, explizit in Bezug auf die Nutzung und Transformation von Repräsentationen und implizit auch bei der Betonung mathematischer Sensibilität oder Fantasie. Peirce (1931) führt zum diagrammatischen Arbeiten aus:

For mathematical reasoning consists in constructing a diagram according to a general precept, in observing certain relations between parts of that diagram not explicitly required by the precept, showing that these relations will hold for all such diagrams, and in formulating this conclusion in general terms. (CP 1.54)

Auch Dörfler (2015), Schreiber (2013) und Ott (2016) folgen diesem Ansatz und betonen vor allem die Schriftgebundenheit der Mathematik. Die Bedeutung von Zeichen und Diagrammen ist dabei nicht per se gegeben, sondern entsteht durch den Gebrauch im sozialen Aushandlungsprozess. Ott (2016) verweist mit Bezug auf weitere Literatur darauf, dass Darstellung und Konstrukteur*in der Darstellung in einem sich wechselseitig beeinflussenden Verhältnis stehen. Die Bedeutung des sozialen Austauschs bezüglich der Vereinbarung von Regeln und Deutungen mathematischer Zeichen und Diagramme wird herausgestellt, ebenso wie der Einfluss dieser Darstellungen auf den weiteren mathematischen Auseinandersetzungsprozess (Ott, 2016). Diagramme selbst sind stets regelhaft in Relation stehende Zeichen in Schrift, z.B. auf dem Bildschirm oder auf Papier oder auch durch Handlungen erzeugte Materialanordnungen. Regeln und Gestalt des Diagramms werden in der Interaktion ausgehandelt und in diesem Rahmen vereinbart. Sind die Regeln des Diagramms vertraut und können angewendet werden, führen sie potenziell zur Manipulation mit und am Diagramm und schließlich zu mathematischem Erkenntnisgewinn der mathematisch Agierenden.

Es ist zu erwarten, dass mathematisch interessierte und potenziell begabte Lernenden besonderes Interesse am Umgang mit mathematischen Diagrammen und die Fähigkeit der eigenen Diagrammkonstruktion zeigen. Sie können mutmaßlich besonders gut mit den in den Lernprogrammen angebotenen Diagrammen arbeiten, weil sie einen schnellen Zugang zu den Regeln von Diagrammen finden und nach diesen Regeln Manipulationen am Diagramm vornehmen können, um zu mathematischen Verallgemeinerungen zu gelangen.

Die skizzierte Sichtweise auf mathematisch potenziell Begabte beinhaltet die Annahme einer heterogenen Zielgruppe für die entwickelten Lernprogramme im Fach Mathematik. Die Gruppe umfasst sowohl mathematisch begabte Lernende als auch diejenigen, deren gesteigertes Interesse am Fach im Verlauf ihrer Entwicklung nicht notwendig zu einer überdurchschnittlichen Performanz führt. Im Sinne eines inklusiven Begabungsverständnisses, sollen sich alle Lernenden, die Interesse und Motivation mitbringen, mit den Angeboten der Digitalen Drehtür Hessen im Fach Mathematik beschäftigen können. Dies ist natürlich immer abhängig von den Möglichkeiten an der jeweiligen Partnerschulen, die Lernenden organisatorisch und personell zu begleiten.

4. Die Angebote der Digitalen Drehtür Hessen im Fach Mathematik

Im folgenden Abschnitt wird die Konzeption der Angebote im Allgemeinen vorgestellt und anschließend am Beispiel des Programms ‚Pi‘ veranschaulicht. Der Abschnitt schließt mit der Vorstellung eines Schüler*innenprojekts ab, anhand dessen einzelne Merkmale mathematischer Begabung beleuchtet werden können.

4.1 Zur Konzeption

Angelehnt an Renzullis (1978) Ansatz und unter Einbezug mathematikdidaktischer Perspektiven berücksichtigt die Konzeption der Angebote folgende ineinandergreifende Aspekte, die anschließend weiter ausgeführt werden:

- *Projektorientierung* als gestalterisches Prinzip, um selbstgesteuertes, planvolles und gemeinsames Arbeiten an einem Projekt zu ermöglichen.
- *Vielfältige mathematische Themen* als Enrichment-Angebote.
- *Natürliche Differenzierung* innerhalb der Lernprogramme, um heterogenen Lernvoraussetzungen fachdidaktisch angemessen zu begegnen.
- *Gruppenarbeit* im Sinne des mathematischen Lernens in Interaktion und mit und an Zeichen und Diagrammen.

Mit der Idee der *Projektorientierung* wird ein besonderes Potenzial verbunden, die Gruppe von mathematisch interessierten bis begabten Lernenden angemessen in ihren Stärken zu fördern. Eigene Diagrammkonstruktionen und der Umgang mit angebotenen Diagrammen kann im sozialen Austausch angeregt, die Selbstregulation im Lernprozess unterstützt und Methodenkompetenz aufgegriffen werden. Anders als bei einzelnen Problemlöseaufgaben, ist es bei der Projektorientierung möglich, sich angeleitet und intensiv mit einem mathematischen Thema breitgefächert zu beschäftigen und dabei gleichzeitig eine (eigene) Idee als Schüler*innenprojekt umzusetzen. Die Förderangebotstypen nach Renzulli et al. (1981) werden auf diese Weise vernetzt angesprochen. Dies schult in besonderem Maße die Eigenständigkeit und unterstützt die Lernenden bei der Entwicklung eines forschenden Habitus, wie es das Konzept der Drehtür fordert (Renzulli et al., 1981).

Ein Projekt wird nach Schreiber und Kromm (2020) als „Zusammenarbeit von Menschen zu einem bestimmten Thema“ (S. 14) definiert. Sie grenzen den reinen Projektunterricht vom Begriff des projektorientierten Lernens ab. Projektorientierung umfasst alle Formen des Lernens angelehnt an Projektarbeit. Mit der Projektorientierung wird die Chance verbunden, dass Lernende bezogen auf ein bestimmtes Thema planvoll und ggf. arbeitsteilig zusammenarbeiten und als Abschluss eine Präsentation, z.B. in Form eines Plakates oder Videos, zusammenstellen. In der gemeinsamen Arbeit kann mathematische Bedeutung ausgehandelt und eine Vernetzung von Wissen angeregt werden, weil verschiedene Aspekte des Themas betrachtet und miteinander in Relation gesetzt werden müssen. Die Verbindung von projektorientierten Angeboten mit digitalen Medien bietet sich in besonderer Weise an (Schreiber & Kromm, 2020). Das digitale Medium ist durch die Digitale Drehtür gesetzt und kann innerhalb der Angebote des Faches Mathematik die Rolle der Bereitstellung von Informationen, der Strukturierung in Lektionen und Begleitung durch vielfältige und differenzierte Aufgaben, Hilfen und Projektvorschläge, verbunden mit methodischen Hinweisen, einnehmen.

Die Programme sind immer einheitlich als Selbstlernkurs und Austauschkurs auf dem Campus der Digitalen Drehtür angelegt (s. Abb. 2). Der jeweilige Selbstlernkurs ist dabei in Lektionen eingeteilt, die den Ablauf eines Projektes aufgreifen. So findet sich in Lektion 1 eine Einführung in das gewählte Thema. Die Inhalte knüpfen in der Regel an das Vorwissen der Lernenden an und ermöglichen mit der Formulierung eines Ziels bereits einen Ausblick auf mögliche Projekte, die erstellt werden können. Lektion 2 ist dann für eine thematische Vertiefung geeignet. Hier können weiterführende Aufgaben und Inhalte bearbeitet werden. In Lektion 3 werden Projektvorschläge zum Thema gegeben, wobei von den Lernenden selbst eingebrachte Projektideen unbedingt erwünscht sind. Lektion 4 betont im besonderen Maße die Präsentation des Projektes. Hier wird Unterstützung durch methodenorientierte Lernvideos gegeben,¹² was die Verzahnung der angesprochenen Typen von Förderangeboten nach Renzulli (1978) verdeutlicht. Die Lernenden werden so z.B. bei der Erstellung eines Plakates angeleitet. Die vier Lektionen können flexibel genutzt werden: Ein Überspringen zur nächsten Lektion oder eine Rückschau sind jederzeit möglich und unterstreichen das geforderte selbstregulierte Lernen. Technisch ist es auf der genutzten digitalen Plattform KIRON möglich sogenannte H5P Komponenten, wie z.B. Kreuzworträtsel, Lückentexte, Videos oder ein Quiz, einzubinden. Auflösungen und Tipps zur Differenzierung finden sich zumeist als aufklappbare Buttons. Sind die Projekte von den Lernenden erstellt, ist es möglich, sie über den Campus in einem Austauschkurs hochzuladen und vom Mathematik-Team eine Rückmeldung zu erhalten (s. Abb. 2). Auch das Zurückspiegeln in den Unterricht ist nach Absprache mit der Lehrkraft, etwa als Präsentation vor der Klasse, möglich. Jedes Programm umfasst etwa vier bis sechs Zeitstunden und kann über zwei Wochen, aber auch beliebig länger, bearbeitet werden.

¹² Die Videos sind bisher in den Lernprogrammen der Jahrgänge 3 und 4 sowie 5 und 6 implementiert und sollen zukünftig in allen Lernprogrammen zugänglich sein.

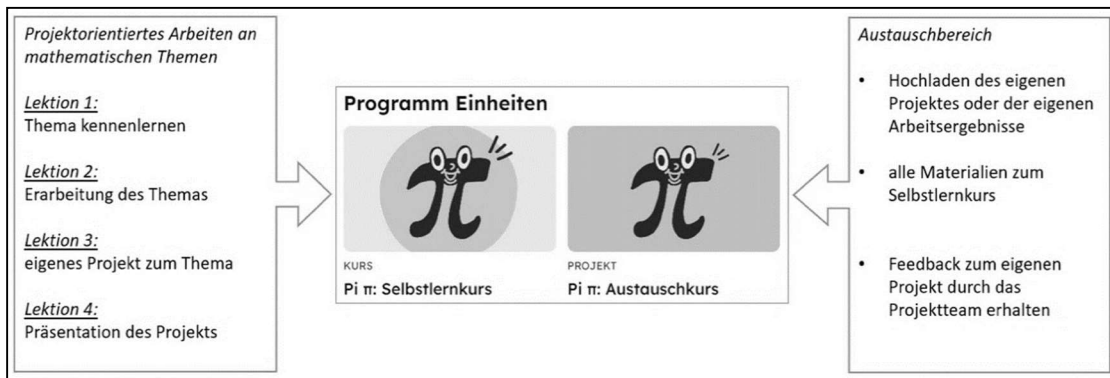


Abbildung 2: Das Lernprogramm „Pi π“ mit Selbstlern- und Austauschkurs

In den fachdidaktisch konzipierten Lernprogrammen werden *vielfältige mathematische Themen* aufgegriffen, die bedeutsam für verschiedenste Bereiche der Mathematik sind. So bieten sie bspw. Einblick in Codierungen, verschiedene Beweisformen und ermöglichen die Beschäftigung mit Primzahlen, anderen Zahlssystemen oder stochastischen Fragen. Auch Körpernetze oder Parkettierungen können projektorientiert bearbeitet werden. Die Lernenden wählen selbst das Thema oder sprechen sich mit der verantwortlichen Lehrkraft ab. Die Lernprogramme vernetzen dabei die mathematischen Inhaltsbereiche. Auch fächerübergreifende Fragen, z.B. im Programm ‚Klima und Meereis‘, werden aufgegriffen.

Gleichzeitig stellt die oben erwähnte *natürliche Differenzierung* eine besondere methodische Anforderung an die Gestaltung der Lernprogramme dar: Der Digitale Drehtür Campus kann hessenweit und in weiteren Bundesländern von angemeldeten und registrierten Schulen genutzt werden. Damit umfasst die Zielgruppe eine große Zahl an Lernende, deren Lernvoraussetzungen unbekannt sind, weil die Entscheidung, sie zur Teilnahme vorzuschlagen, in der Verantwortung der angemeldeten Schulen bzw. Lehrkräfte liegt. Die Lernprogramme sind jahrgangsübergreifend und originär für Gruppenarbeit konzipiert, wobei eine Einzelbearbeitung möglich ist. Es bietet sich so bereits eine Differenzierung auf der Ebene des gemeinsamen und interaktiven Arbeitens. Innerhalb der Lernprogramme gibt es Hinweise, Hilfen oder Tipps, die zusätzliche Informationen oder Impulse für den eigenen Lösungsweg bereithalten. Zu einem Thema kann man sich auf vielfältige Weise beschäftigen, was sowohl innerhalb von Lektion 1 und 2 als auch durch die Projektvorschläge aufgegriffen wird. Auch Wortspeicher werden bereitgestellt. Der Austausch mit dem Projektteam ist auch über (noch) unvollständige Projekte im Austauschbereich oder über E-Mails möglich.

Ziel ist es, mithilfe herausfordernder Angebote die fachlichen und prozessbezogene Kompetenzen vielfältig zu fördern: Die gemeinsame *Gruppenarbeit* am Projekt erfordert Absprachen und sozialen sowie fachlichen Austausch im Kompetenzbereich des Kommunizierens. Argumentieren und Darstellen werden immer dann angeregt, wenn eigene Lösungen reflektiert, begründet, erläutert und verständlich für andere als Erkenntnisse zusammengestellt werden sollen. Bei der

Projekterstellung oder einzelnen Aufgabenangeboten wird auch der Umgang mit symbolischen, formalen und technischen Elementen immer wieder initiiert. Die Projektorientierung bietet auch hier die Möglichkeit, gemeinsame mathematische Darstellungen zu entwickeln. Modellieren und Problemlösen sind Kompetenzen, die in einigen Programmen gezielt angesprochen und reflektiert werden.

4.2 Beispielprogramm ‚Pi‘

Im Programm ‚Pi‘ beschäftigen sich die Lernenden mit unterschiedlichen Möglichkeiten der Berechnung von Pi. Der Programmeinstieg im Selbstlernkurs in Lektion 1 beginnt mit der Beschreibung der Zahl Pi als Dezimalzahl mit unendlich vielen Nachkommastellen. Es folgen einige grundlegende Informationen darüber, woher der Name Pi kommt, wie Pi definiert werden kann und dass es sich bei Pi um eine irrationale Zahl handelt. In der ersten Lektion wird deutlich, dass die Menschheit sich schon lange damit beschäftigt, Pi zu berechnen. So sollen die Lernenden in der ersten Aufgabe eine Annäherung aus dem 16. Jhd. v. Chr. auf Genauigkeit prüfen. Anhand eines Bibelzitats werden die Schüler*innen anschließend dazu angeregt, den Zusammenhang zu Pi begründet darzustellen (s. Abb. 3).

Aufgabe 2

Auch in die Bibel kann man eine Näherung für π reinlesen:

„Dann machte er das Meer. Es wurde aus Bronze gegossen und maß 10 Ellen von einem Rand zum anderen; es war völlig rund und 5 Ellen hoch. Eine Schnur von 30 Ellen konnte es rings umspannen.“ (Jerusalem Tempel)

Warum hat dieses Bibelzitat etwas mit π zu tun? Begründet.

Abbildung 3: Ausschnitt aus Lektion 1 des Programms ‚Pi π ‘

Am Ende der ersten Lektion wird die Idee von Archimedes von Syrakus vorgestellt: Das Verhältnis von Umfang eines Kreises zu Durchmesser eines Kreises entspricht dem Verhältnis von der Fläche eines Kreises zu der Fläche eines Quadrates mit dem Radius des Kreises als Seitenlänge. Diese Überlegung soll mit bereits bekannten Formeln sowie geeigneten Zeichnungen von den Lernenden begründet werden. Während Lektion 1 somit einen kurzen geschichtlichen Überblick über die Bestimmung von Pi liefert, wird in Lektion 2 ein konkretes Vorgehen erarbeitet, welches dazu führt, eine immer genauere Abschätzung von Pi zu erhalten. Die ebenfalls von Archimedes von Syrakus stammende Idee, regelmäßige Vielecke zur Abschätzung zu verwenden, soll mit Hilfe einer Veranschaulichung deutlich und dann von den Lernenden eigenständig ausprobiert werden.

Lektion 3 beinhaltet Projektvorschläge. Die Lernenden können sich daran orientieren, aber auch eigene Ideen umsetzen. Vorgeschlagen wird eine Auseinander-

setzung mit einer weiteren selbstrecherchierten historischen Methode, der stochastischen Methode, oder der physikalischen Methode. Zu den letzten beiden werden konkrete Vorgehensweisen beschrieben, die dann von den Schüler*innen eigenständig durchgeführt und ein Rückbezug zur Zahl Pi hergestellt werden kann.

Die Lernenden werden in Lektion 4 bei der Erstellung einer Präsentation ihres Projekts unterstützt. Aktuell erhalten die Lernenden eine Checkliste zur Gestaltung einer Projektpräsentation. Perspektivisch werden auch hier die angesprochenen Methodenvideos implementiert. Am Ende von Lektion 4 erfolgt die Verlinkung in den Austauschkurs, in welchem das erstellte Projekt hochgeladen oder per E-Mail gesendet werden kann. Es erfolgt eine individuelle Rückmeldung durch das Mathematik-Team, die über den Austauschkurs bereitgestellt wird. Sie ist kompetenzorientiert gestaltet und bietet in der Regel weiterführende Denkanstöße.

4.3 Schüler*innenbearbeitung Pi

Da die Abgabe der Bearbeitung aus datenschutzrechtlichen Gründen über die Plattform der Digitalen Drehtür anonym und unter Verwendung eines Nicknames im Austauschkurs hochgeladen wird, kann keine Aussage über die erstellende Schüler*innengruppe des im Folgenden vorgestellten Projekts getroffen werden. Es wird daher im Sinne der Konzeption von einer Schüler*innengruppe gesprochen.

Die Bearbeitung (s. Abb. 4 und Abb. 5) orientiert sich an dem Projektvorschlag zur stochastischen Bestimmung von Pi, geht jedoch über das vorgeschlagene Vorgehen hinaus. Die Rückmeldung aus dem Mathematik-Team regte die Schüler*innen zudem dazu an, sich erneut mit dem Thema zu beschäftigen. Anregungen zum Weiterdenken wurden aufgegriffen und in Form einer neuen Abgabe hochgeladen. Hieran zeigt sich die hohe Bereitschaft, sich auf Probleme einzulassen, ein besonderes Durchhaltevermögen, da immer weiter an der Aufgabe gearbeitet wurde, aber auch das Bestreben nach Klarheit, welche nach Schindler und Rott (2016) Merkmale mathematisch begabten Handelns sind. Die angewandte Methode (Monte-Carlo-Methode) lässt auf eine eigene Recherche der Schüler*innen zum Thema schließen.

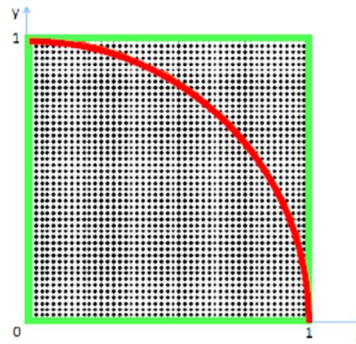
Abbildung 4 zeigt den Beginn der Bearbeitung des Projektvorschlags ‚Pi stochastisch bestimmen‘. Die Dokumentation der Ergebnisse erfolgt besonders strukturiert und Zusammenhänge werden farblich sinnvoll hervorgehoben. Es wird deutlich, dass die Schüler*innengruppe die Verwendung mathematischer Symbole beherrscht, was ein weiteres Merkmal mathematischer Begabung darstellt. Die Lernenden finden eine eigene Veranschaulichung und nutzen ein Tabellenkalkulationsprogramm, um ihre mathematische Idee umzusetzen und ein eigenes Diagramm lösungsorientiert zu manipulieren.

Monte-Carlo-Methode

⇒ Verwendung von Zufallszahlen um mathematische Probleme zu lösen

Quadrat mit Kantenlänge 1 [LE] und $A = 1$ [FE], darin **Viertelkreisbogen** mit $r = 1$ in Quadrat

Zufallsgenerator: mehrere tausend beliebige Punkte $P(x/y)$ in Quadrat: x, y Element von $[0; 1]$



Zufällig erzeugte Punkte als Beispiel: $P_1(0,5/0,38853387)$; $P_2(0/0,9989575)$; $P_3(0,128854/0,2448956526562)$

→ $\frac{\text{Anzahl Punkte in Viertelkreis}}{\text{Anzahl Punkte im Quadrat}} = \frac{1}{4} \pi$
(Herleitung über Flächeninhalt: $A_{\text{Viertelkreis}} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r^2$ mit $r = 1$ also $\frac{\pi}{4} \text{ cm}^2$, wogegen Fläche des kompletten Vierecks 1 cm^2 beträgt $\Rightarrow \frac{\pi}{4} \text{ cm}^2$ geteilt durch 1 cm^2)

Abbildung 4: Ausschnitt der ersten Abgabe der Schüler*innenbearbeitung

In Abbildung 5 wird einen Ausschnitt der erneuten Bearbeitung eines in Lektion 4 des Lernprogramms gegebenen Rätsels zum Erdumfang dargestellt. Der Erdumfang wird mit einer Schnur um den Äquator gelegt, die anschließend um 1m verlängert wird. Den Abstand zwischen Erde und Schnur sollen die Schüler*innen mit dem Abstand vergleichen, der entsteht, wenn auf die gleiche Weise der Umfang eines Fußballs um 1m verlängert wird.

allgemeine Rechnung:

Kreis mit Umfang U_{Kreis} , Durchmesser d_{Kreis} :

$$U_{\text{Kreis}} = d_{\text{Kreis}} \cdot \pi \rightarrow d_{\text{Kreis}} = \frac{U}{\pi}$$

Schnurlänge: $U_{\text{Kreis}} + 100 \text{ cm}$

$$d_{\text{neu}} = (U_{\text{Kreis}} + 100 \text{ cm}) / \pi \rightarrow d_{\text{neu}} = \frac{U_{\text{Kreis}}}{\pi} + \frac{100 \text{ cm}}{\pi}$$

Differenz zw. d_{neu} und d : $\frac{U_{\text{Kreis}}}{\pi} + \frac{100 \text{ cm}}{\pi} - \frac{U_{\text{Kreis}}}{\pi} = \frac{100}{\pi} \text{ cm}$
(halbiert: $100/2 \cdot \pi$, etwa **16 cm**), d.h. es sind immer 16 cm Platz zwischen Schnur und Kugel!

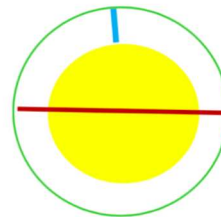


Abbildung 5: Ausschnitt aus der zweiten Abgabe der Schüler*innenbearbeitung

Die überarbeitete Version der zweiten Abgabe der Schüler*innenbearbeitung beinhaltet allgemeine Überlegungen, die in Abbildung 5 als „allgemeine Rechnung“ überschrieben ist. Die Lernenden arbeiten diagrammatisch, indem sie sich an der Konstruktion eines Diagramms in mathematischer Formelsprache versuchen, eine Grafik zur Veranschaulichung und damit ein weiteres Diagramm entwerfen und zu einer allgemeingültigen Aussage „immer 16cm Platz“ gelangen. Die Diagramme (Grafik und Formeln) stehen in Relation zueinander, was über die

Farbgebung deutlich wird. Der Begriff „Kugel“ wird hier für Erde und Fußball verwendet als mathematische Annäherung an diesen geometrischen Körper.

5. Fazit

Die im Rahmen der Digitalen Drehtür im Fach Mathematik entwickelten Lernprogramme können Lernende dazu anregen, sich mit einem Thema vertieft und selbstgesteuert zu beschäftigen. Sie finden eigene Veranschaulichungen und zeigen ihr Potenzial in der Konstruktion, Manipulation und Verwendung von auch mehreren aufeinander bezogenen Diagrammen, wie der Einblick in das Beispiel zeigt. Besondere Motivation und Aufgabenbereitschaft wird an der erneuten Überarbeitung und Abgabe deutlich. Man erkennt auch, dass die Lernenden sich im Sinne der Idee des Enrichments vertiefend und durch eigene Recherchen mit der Bestimmung von π beschäftigt haben. Es ist anzunehmen, dass das Format des projektorientierten Arbeitens zu dieser selbstständigen und weiterführenden Auseinandersetzung beiträgt. Gleichzeitig wird deutlich, dass die Präsentation der Erkenntnisse linear, als eine Art Hefteintrag erfolgt. Inhaltliche und methodische Kompetenzen könnten hier noch stärker verzahnt gefördert werden. Dazu bedarf es Unterstützung innerhalb der Lernprogramme, bspw. hinsichtlich der bereits teilweise implementierten Videos zu Präsentationsmethoden.

Solche Betrachtungen von Schüler*innenprojekten sind dabei in einem ersten analytischen Zugang auf das jeweils abgegebene Endprodukt bezogen. Diese Einblicke können einerseits zur Evaluation und Qualitätssicherung der Lernprogramme dienen und geben andererseits Hinweise auf die Vorgehens- und Denkweisen der Lernenden. Im Rahmen einer darüberhinausgehenden Begleitforschung ist geplant, Lernende zu verschiedenen Erhebungszeitpunkten bei der Bearbeitung eines selbstgewählten mathematischen Lernprogramms zu videografieren. So soll es möglich werden, den Prozess ihrer diagrammatischen Tätigkeit zu rekonstruieren und qualitativ beschreiben zu können. Die Daten sollen zunächst mit Methoden der Interpretativen Unterrichtsforschung ausgewertet werden (Interaktionsanalyse, Krummheuer & Fetzer, 2005). Mit einer sich anschließenden semiotischen Analyse (Schreiber, 2013) soll dann der Fokus auf den Prozess des diagrammatischen Arbeitens der Lernenden gelegt und der Zeichenprozess bei der Erstellung des Projekts rekonstruiert werden. Dabei können die folgenden Forschungsfragen die Analysen leiten: Welche mathematischen Einsichten gewinnen die Lernenden beim projektorientierten Arbeiten an den Lernprogrammen der Digitalen Drehtür? Wie werden dabei Diagramme konstruiert und verwendet? Wie werden Regeln von Diagrammen sozial ausgehandelt und welche Diagrammanipulationen werden vorgenommen?

Literatur:

- Auhagen, W. (2023). *Katalysatorwirkungen einer Drehtürmodellförderung auf die Entfaltung mathematischer Begabungen und Potenziale: Theoretische und empirische Studien*. WTM Verlag.
- Bardy, T. & Bardy, P. (2020). *Mathematisch begabte Kinder und Jugendliche. Theorie und (Förder-)Praxis*. Springer Spektrum.
- Delisle, J. R. & Renzulli, J. (1982). The revolving door model of identification and programming for the academically gifted: Correlates of creative production. *Gifted Child Quarterly*, 25, 89–95.
- Dörfler, W. (2015). Abstrakte Objekte in der Mathematik. In G. Kadunz (Hrsg.), *Semiotische Perspektiven auf das Lernen von Mathematik* (S. 33–49). Springer Spektrum.
- Digitale Drehtür (2023). Digitale Drehtür Campus. Verfügbar unter: <https://www.digitale-drehtuer-campus.de/explore> [15.10.2023].
- Fuchs, M. (2006). *Vorgehensweisen mathematisch potentiell begabter Dritt- und Viertklässler beim Problemlösen. Empirische Untersuchungen zur Typisierung spezifischer Problembearbeitungsstile*. LIT Verlag.
- Fuchs, M. (2019). *Alle Kinder sind Matheforscher. Frühkindliche Begabungsförderung in heterogenen Gruppen*. Klett Kallmeyer.
- Greiten, S. (Hrsg.) (2016). *Das Drehtürmodell in der schulischen Begabtenförderung. Studienergebnisse und Praxiseinblicke aus Nordrhein-Westfalen*. Karg-Stiftung.
- Hirt, U. & Wälti, B. (2022). *Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürlich differenzieren für Rechenschwache bis Hochbegabte*. Klett Kallmeyer.
- Huth, M.; Pollok, J.; Schreiber, C. & Utsch, N. (im Druck). Die ‚Digitale Drehtür Hessen Mathematik‘ – Mathematik für Interessierte. In B. Brandt & L. Bröll (Hg.), *Sammelband des Symposiums Lernen digital in Chemnitz*. Waxmann.
- Käpnick, F. (2015) Theorieansätze zur Kennzeichnung des Konstruktes „Mathematische Begabung“ im Wandel der Zeit. In F. Käpnick & T. Frizlar (Hg.), *Mathematische Begabungen. Denkansätze zu einem komplexen Themenfeld aus verschiedenen Perspektiven* (S. 9–39). WTM Verlag.
- Käpnick, F. & Fuchs, M. (2004). Fördermöglichkeiten mathematisch begabter Grundschulinder in einem Enrichment-Projekt. In C. Fischer; F. J. Mönks & E. Grindel (Hg.) *Curriculum und Didaktik der Begabtenförderung. Begabungen fördern, Lernen individualisieren* (S. 330–346). LIT Verlag.
- Krauthausen, G. (2018). Natural Differentiation — An Approach to Cope with Heterogeneity. In G. Kaiser; H. Forgasz; M. Graven; A. Kuzniak; E. Simmt & B. Xu (Hg.). *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education* (S. 325–341). ICME-13 Monographs. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72170-5_19
- Krauthausen, G. & Scherer, P. (2019). *Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht. Konzepte und Praxisbeispiele aus der Grundschule*. Klett Kallmeyer.
- Krummheuer, G. & Brandt, B. (2001). *Paraphrase und Traduktion. Partizipationstheoretische Elemente einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens in der Grundschule*. Beltz Wissenschaft, Deutscher Studien Verlag.
- Krummheuer, G. & Fetzer, M. (2005). *Der Alltag im Mathematikunterricht: Beobachten – Verstehen – Gestalten*. Spektrum Akademischer Verlag.

- Mönks, F. J. & Ypenburg, I. H. (2012). *Unser Kind ist hochbegabt: Ein Leitfaden für Eltern*. Reinhardt.
- Ott, B. (2016). *Textaufgaben grafisch darstellen. Entwicklung eines Analyseinstruments und Evaluation einer Interventionsmaßnahme*. Waxmann.
- Peirce, C. S. (CP1) (1931). *The collected Papers of Charles Sanders Peirce. Vol. I: The Principles of Philosophy*. Harvard University Press.
- Renzulli, J. (1978). What Makes Giftedness? Reexamining a Definition. *Phi Delta Kappan*, 60, 180–184.
- Renzulli, J. (2004). Eine Erweiterung des Begabungsbegriffs unter Einbezug co-kognitiver Merkmale. Übersetzt aus dem Englischen von Ransom Bradford. In C. Fischer; F. J. Mönks & E. Grindel (Hg.), *Curriculum und Didaktik der Begabtenförderung. Begabungen fördern, Lernen individualisieren* (S. 54–82). LIT Verlag.
- Renzulli, J., Reis, S. M. & Smith, L. H. (1981). The revolving door-model. A new way of identifying the gifted. *Phi Delta Kappan*, 62, 648–649.
- Schindler, M. & Rott, B. (2016). Kreativität, Interesse, Talent. Mathematische Begabung vielfältig denken. *Mathematik lehren*, 33(2016) 195, 2–7.
- Schreiber, C. (2013). Semiotic Processes in Chat-based Problem-Solving Situations. *Educational Studies in Mathematics*, 82(1), 51–73.
- Schreiber, C. & Kromm, H. (2020). *Projektorientiertes Lernen mit dem Internet – PrimärWebQuest*. Schneider Verlag.
- Digitale Drehtür. (o. D.). <https://digitale-drehtuer.de>
- Campus der Digitalen Drehtür. (o. D.). <https://www.digitale-drehtuer-campus.de/explore>

Marcel Klinger

Universität Duisburg-Essen, marcel.klinger@uni-due.de

Algorithmisches Denken im Mathematikunterricht fördern: Ein Praxisbeitrag aus der Lehramtsausbildung Mathematik

Die Lehrveranstaltung „Algorithmische Mathematik“ an der Universität Duisburg-Essen hat das Ziel, Studierende dazu zu befähigen, den eigenen Mathematikunterricht algorithmisch-gehaltvoll zu gestalten. Hierzu werden mathematische Algorithmen verschiedener mathematischer Teildisziplinen thematisiert und mithilfe einer blockbasierten Programmiersprache auch praktisch erschlossen. Der vorliegende Beitrag beschreibt die Konzeption des Lehrformats und hält die bei mehrmaliger Durchführung gewonnenen praktischen Erfahrungen fest.

Algorithmen haben eine immense Bedeutung für die heutige Gesellschaft. Um dem Anspruch einer allgemeinbildenden Schule gerecht zu werden, müssen Algorithmen mit all ihren Facetten zweifelsohne Bestandteil einer grundständigen Schullaufbahn sein. In diesem Kontext kann gerade das Fach Mathematik mit seinen mannigfaltigen Fachinhalten algorithmischer Natur einen besonderen Beitrag leisten.

Damit schulischer Mathematikunterricht der damit einhergehenden Verantwortung gerecht werden kann, muss sichergestellt sein, dass auch (angehende) Lehrkräfte über die notwendigen Kompetenzen verfügen, die Rolle von Algorithmen im eigenen Unterricht entsprechend hervorzuheben. Kurzum: Angehende Mathematiklehrkräfte müssen selbst über die Fähigkeit verfügen, *algorithmisch zu denken*.

Um dies zu gewährleisten, wurde an der Universität Duisburg-Essen ein entsprechendes Wahlpflichtmodul „Algorithmische Mathematik“ konzipiert und mehrmalig durchgeführt. Die Vorstellung der Konzeption und Durchführung dieses Moduls soll den Fokus dieses Beitrags darstellen. Zuvor werden die Rollen von Algorithmen im Mathematikunterricht und der hiermit in Zusammenhang stehende Begriff des „Algorithmischen Denkens“ jedoch genauer beleuchtet.

1. Algorithmen *im* Mathematikunterricht

Die Bedeutung von Algorithmen als Gegenstand der Mathematik sowie als Werkzeug innerhalb der Disziplin ist neben ihrer gesamtgesellschaftlichen Relevanz unbestritten. Entsprechend lassen sich algorithmische Strukturen auch im schulischen Mathematikunterricht vielfältig wiederfinden (Ziegenbalg et al., 2016). Das Spektrum reicht hierbei von schriftlichen Rechenverfahren der Grundschule bis zum Gaußschen Eliminationsverfahren oder einer strukturierten Kurvendiskussion der Oberstufe. Obwohl es somit reichlich Gelegenheiten gäbe, werden Algorithmen innerhalb schulischer Curricula nicht explizit oder nur stark unterrepräsentiert thematisiert (vgl. Stephens, 2018).

Vor dem Hintergrund ihrer fachbezogenen wie allgemein-gesellschaftlichen Bedeutung erscheint dies paradox, dränge doch mit ihrer unterrichtlichen Erfassung gleichzeitig auch ein hochaktuelles Thema in den Unterricht, das potenziell einen lebensweltlichen und sinnstiftenden Bezug zwischen mathematischen Inhalten und der Welt herzustellen vermag. In diesem Zusammenhang besteht somit eine Wechselwirkung zwischen *Algorithmischen Denken* (oder allgemeiner *Digital Literacy*) auf der einen und der Förderung eines tieferen mathematischen Verständnisses auf der anderen Seite (vgl. Stephens & Kadijevich, 2020).

1.1 Algorithmisches Denken

Während der viel ältere Begriff des „Algorithmus“ gut konturiert und vielfach in voneinander nur in einzelnen Aspekten abweichenden Definitionen konsolidiert ist (s. hierzu z.B. Oldenburg, 2022; Knuth, 1997), befindet sich der Begriff „Algorithmisches Denken“ sowie der verwandte und von Papert (1980) geprägte Begriff „Computational Thinking“ im Mittelpunkt vielfältiger Diskussionen innerhalb der wissenschaftlichen Community. Vor diesem Hintergrund greifen Stephens und Kadijevich (2020) unterschiedliche Definitionen und Beschreibungen beider Konzepte auf und synthetisieren diese. Demnach ist Algorithmisches Denken erforderlich, „whenever one has to comprehend, test, improve, or design an algorithm [...]“ (ebd., S. 118). Andere Autoren, etwa Kortenkamp und Labert (2015) oder Oldenburg (2022), beschreiben das Konzept entsprechend dieses Umstands in Analogie zu Vollrath (1989) als „eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Algorithmen ist“ (Kortenkamp & Lambert, 2015).

Der Synthese von Stephens und Kadijevich folgend ist diese „Denkweise“ von den drei Eckpfeilern „decomposition“ (z. B. das strategische Zerlegen von Problemen), „abstraction“ (z. B. kognitive Analyse von Daten und Mustererkennung) und „algorithmization“ (z. B. Strukturieren und Formulieren einzelner Verfahrensschritte zur Problembewältigung) geprägt.

Zusätzlich zu diesen Eckpfeilern umfasst das Computational Thinking demnach mit „automation“ einen weiteren Eckpfeiler, der hervorhebt, dass durch einen entsprechenden Denkprozess gewonnene Produkte mit Hilfe eines Informationsverarbeitungssystems (z. B. eines Computers) effizient verarbeitbar sein sollen und somit prinzipiell *automatisierbar* sind (vgl. Wing, 2010). Insofern stellt sich das Algorithmische Denken also als substanzielle Teilmenge des Computational Thinkings dar, was auch eine häufig in der Literatur vorzutreffende weitgehend synonyme Verwendung der beiden Begriffe erklärt. Der Begriff „Algorithmisches Denken“ ist hingegen erfahrungsgemäß allein aufgrund seiner begrifflichen Nähe zum Algorithmusbegriff dahingehend eingängiger, dass in der entsprechenden Denkweise versierte Menschen mit ihm in natürlicher Weise ein klar umrissenes Concept Image (z.B. Tall & Vinner, 1981; vgl. Klinger, 2019) dessen verbinden, was er zu beschreiben versucht. Aus diesem Grund soll hier das Algorithmische Denken begrifflich im Vordergrund stehen.

1.2 Blockbasierte Programmierumgebungen

Algorithmisches Denken ist eine Denkart, für deren erfolgreiche Ausprägung neben einer theoretischen Fundierung zweifelsohne das praktische Arbeiten mit Algorithmen essenziell ist. Neben klassischen textbasierten Programmierkonzepten bieten blockbasierte Programmierumgebungen hier in allen Phasen des schulischen Mathematikunterrichts gerade für unerfahrene Schülerinnen und Schüler ein besonderes Potenzial. Im Gegensatz zu klassischen Programmierkonzepten muss dabei keine Syntax erlernt werden, da sich ein sequentieller Code automatisch durch das Aneinanderreihen vorgegebener elementarer „Programmblöcke“ ergibt. Dies birgt gleichzeitig den Vorteil, dass eine Bibliothek aller verfügbaren Befehle einsehbar ist und nicht zuletzt durch Trial-and-Error-artiges Ausprobieren verinnerlicht werden kann. Gleichzeitig wirken derartig visualisierte Programmierkonzepte auch einschränkend, etwa weil mit ihnen naturgemäß eine eher eingeschränkte Funktionalität einhergeht. Im Weiteren sei indes auf spezifischere Literatur verwiesen; etwa für den praktischen Einsatz blockbasierter Programmierkonzepte auf einen Beitrag von Eppendorf und Marx (2020) sowie für die mit solchen Konzepten einhergehenden informatikdidaktischen Herausforderungen auf einen Beitrag von Jatzlau und Romeike (2017).

2. Rahmenbedingungen und Grundannahmen zur Veranstaltungskonzeption

Zunächst ergeben sich für die Konzeption einer Veranstaltung, die das Augenmerk auf Algorithmen in Mathematik und vor allem im Mathematikunterricht lenkt, die folgenden organisatorischen Rahmenbedingungen aus der Struktur der vorhandenen Lehramtsstudiengänge: Im Studiengang für das Mathematik-Lehramt an Haupt-, Real-, Sekundar- und Gesamtschulen (HRSGe) an der Universität Duisburg-Essen sind durch die Studierenden insgesamt drei fachmathematische Vertiefungswahlmodule zu belegen. Von diesen sind zwei in der Bachelor-, eines ist in der Masterphase zu belegen. Die Wahlmodule haben Vorlesungscharakter im Umfang von jeweils zwei Semesterwochenstunden und werden durch eine Übung (ebenfalls im Umfang von jeweils zwei Semesterwochenstunden) begleitet. Aus derselben Gruppe von Wahlmodulen können auch Studierende des Grundschullehramts in der Masterphase eine Veranstaltung ihrer Wahl belegen.

Insgesamt steht daher ein für beide Studiengänge und im Falle des HRSGe-Lehramtes auch für Bachelor- und Masterphase gemeinsamer Pool regelmäßig angebotener Veranstaltungen zur Auswahl. Zu diesen zählen etwa typische mathematische Vertiefungsgebiete wie „Analytische Geometrie“, „Analysis“ oder „Diskrete Mathematik“. In unregelmäßigen Abständen bieten Dozierende entsprechende Veranstaltungen erstmalig an, zuletzt etwa eine Veranstaltung „Geschichte der Mathematik“.

In diesem Sinne war eine Veranstaltung, die die Bedeutung und Relevanz von Algorithmen in der Mathematik wie im Mathematikunterricht aufzeigt und gleichsam

die Fähigkeit Studierender und somit angehender Mathematik-Lehrkräfte algorithmisch zu denken fördert, am ehesten in Form eines neuen fachmathematischen Wahlmoduls des beschriebenen Pools zu konzipieren. Hierdurch kann fachmathematischen Gegenständen der Sekundarstufen und darüberhinausgehenden mathematischen Inhalten ausreichend Raum gegeben werden. Demgegenüber lassen sich fachdidaktische Aspekte der Betrachtung von Algorithmen im Unterricht aufgrund der fachmathematisch vorgegebenen Modulprägung eher am Rande behandeln.

Überdies wurden für die Konzeption einer Veranstaltung die weitergehend geschilderten didaktischen Grundannahmen getroffen. Zu diesen zählt etwa ein besonderer Grad von Eigenständigkeit und Selbstorganisation, welcher den Studierenden abverlangt werden soll und in der späten Bachelor- bzw. sogar Masterphase auch abverlangt werden darf. Dies umfasst etwa ein eigenständiges Bearbeiten der verschiedenen Vorlesungsinhalte im Rahmen eines Flipped-Classroom-Settings. Ein besonderes Augenmerk soll auch auf die Verzahnung von Lernzielen, zugehörigen Lehr-Lern-Aktivitäten und der anschließenden Leistungsüberprüfung fallen, wie sie etwa Biggs und Tang (2011) in ihrem Konzept des *Constructive Alignments* fordern. Gleichzeitig soll besagte Verzahnung ebenso wie der geplante Veranstaltungsablauf für Lernende explizit transparent gemacht werden.

3. Konzeption und Durchführung der Veranstaltung „Algorithmische Mathematik“

Im Weiteren soll die von den zuvor aufgeführten Rahmenbedingungen und Grundannahmen ausgehende Veranstaltungskonzeption vorgestellt werden. Hierbei wird auf die einzelnen Veranstaltungselemente und -inhalte aber auch Aspekte der konkreten Veranstaltungsdurchläufe eingegangen. Mit einer gesonderten Betrachtung des „Maker-Praktikums“ soll einem Veranstaltungselement zudem spezielle Aufmerksamkeit gewidmet werden. Abschließend wird außerdem auf Aspekte der finalen Leistungsüberprüfung sowie einer abschließenden Evaluation eingegangen.

3.1 Veranstaltungsstruktur

Das Vertiefungswahlmodul sieht Vorlesungen mit einer klassischen Struktur aus einer Vorlesung und einer zugehörigen Übung vor, so dass prinzipiell zwei Slots im Umfang von je 90 Minuten Lehrveranstaltungslänge zur Verfügung stehen. Traditionell folgen mathematische Vorlesungen hierbei dem Muster, dass der jeweils wochenweise neu zu thematisierende Stoff in einer großen Plenumsveranstaltung mit idealerweise allen teilnehmenden Studierenden meist in dozierenden-zentrierter Form erörtert wird (s. Abb. 1). Es folgt zumeist die Ausgabe eines Übungsblattes, das dann in Einzel- oder Kleingruppenarbeit bearbeitet und eingereicht werden muss. Abschließend werden die Lösungen (ggfs. ergänzt um weitere Präsenzübungsaufgaben) in mittlerer Gruppenstärke in einer Übungsgruppe vorgestellt.

Im Unterschied zu dieser „traditionellen“ Vorgehensweise werden in der hier vorgestellten Veranstaltung zunächst Lernvideos ausgespielt, die den initialen Kontakt mit dem jeweils zu behandelnden Stoff darstellen. Es folgt ein Treffen in mittlerer Gruppenstärke innerhalb der Übungsgruppe, welche im Kontext der Veranstaltung „Lerncafé“ genannt wird, in welcher die Studierenden aufgeteilt in Kleingruppen wöchentliche Übungsaufgaben selbstständig bearbeiten. Auch hier werden die entsprechenden Bearbeitungen der Übungsblätter modulkonform später zur Korrektur eingereicht. Als letztes wochenweises Element findet im Rahmen des Vorlesungszeitslots das „Plenum“ statt, in dem alle an der Veranstaltung beteiligten Studierenden zusammenkommen, so dass finale Fragen geklärt oder weitergehende Präsenzübungsaufgaben bearbeitet werden können. Die Grundstruktur der Veranstaltung folgt somit einem Flipped- bzw. Inverted-Classroom-Design (Akçayır & Akçayır, 2018; Werner et al., 2018)

Traditionell:



Abbildung 1: Sich wöchentlich wiederholender Veranstaltungsverlauf der vorgestellten Veranstaltung (unten) im Vergleich zum traditionellen Ablauf (oben)

3.2 Veranstaltungselemente und -inhalte

Die zuvor erläuterte grobe Struktur soll nun entlang der einzelnen Elemente der Veranstaltung detaillierter beleuchtet werden.

Bei den wöchentlich veröffentlichten Videos handelt es sich um zwei bis vier interaktive H5P-Video-Einheiten.¹³ Relevante Themen, die jeweils in mehreren Videos aufbereitet werden, sind hierbei nach einer initialen Einführung etwa Turtle-Grafiken, der Euklidische Algorithmus, das Newton-Verfahren, Sortieralgorithmen, die Türme von Hanoi oder der Aufbau von Gleitkommazahlen. Eine Betrachtung der Themen erfolgt dabei im Regelfall auf drei Ebenen: einer *mathematisch-theoretischen*, einer *präimplementierenden* sowie einer *implementierenden Ebene*. Auf Ersterer wird das zugrundeliegende mathematische Konzept erarbeitet. Die präimplementierende Ebene zeichnet sich dadurch aus, dass das grundsätzliche Vorgehen in Form eines Pseudocodes programmiersprachen-unabhängig formuliert und ein entsprechender Algorithmus hierbei vorbereitet wird. Die letzte Ebene beinhaltet die konkrete Implementation eines Algorithmus in Form eines Programms. Die drei beschriebenen Ebenen werden hierbei nicht notwendigerweise

¹³ Das gesamte Material ist unter <https://www.klinger.nrw/lehre/algorithmische-mathematik/> zum kostenlosen Download verfügbar und steht unter einer CC-BY-NC-SA-Lizenz.

in aufbauender Reihenfolge thematisiert. Vielmehr kann etwa auch eine initiale Betrachtung der fertigen Implementationsebene aus didaktischen Gründen (z. B. im Rahmen des Black-Box/White-Box-Prinzips; Heugl, Klinger & Lechner, 1996) sinnvoll sein.

Aus mathematisch-inhaltlicher Sicht besteht die Veranstaltung somit im Wesentlichen aus Streifzügen durch vielfältige Teildisziplinen und der überblicksartigen Betrachtung einzelner mathematischer Gegenstände mit hohen algorithmischen Anteilen. Bei den Videos handelt es sich dabei um gescreencastete und vertonte Powerpoint-Präsentationen. Die Länge der einzelnen H5P-Einheiten beträgt hierbei im Regelfall nicht mehr als 15 Minuten, was einerseits einen höheren Aktivierungsgrad versprechen (Guo et al., 2014) und zudem gerade von Studierenden besser angenommen werden soll (Bordes et al., 2021). Zusätzlich folgt jede Einheit der gleichen Makrostruktur, wobei zu Beginn stets der Inhalt des Videos und bei Abschluss eine Zusammenfassung der wichtigsten Erkenntnisse stichpunktartig gelistet wird.

Im wöchentlichen Lerncafé soll regelmäßig Raum für die zu bearbeitenden Übungsblätter (im Kontext der Veranstaltung „Trainingsblätter“ genannt) gegeben werden. Im Sinne des in Abschnitt 2 erläuterten Transparenzprinzips wird hierbei auf jedem Blatt einerseits hervorgehoben, die Betrachtung welcher Videos für die nachfolgenden Aufgaben notwendig ist. Andererseits wird durch ein Sternchen an einer Aufgabe indiziert, dass zu ihrer vollständigen Bearbeitung auch ein Computerprogramm entwickelt und eingereicht werden muss. Es soll eine entspannte und ungezwungene Atmosphäre vorherrschen (worauf u. a. bereits die Bezeichnung „Café“ hindeuten soll), in welcher die Studierenden im Wesentlichen selbstständig und eigenorganisiert arbeiten. Hierbei steht der Dozent jedoch ständig als Ansprechpartner bereit.

Für die in die Veranstaltung integrierten praktischen Anteile wurde die blockbasierte Programmierumgebung „Scratch“ (Resnick et al., 2009) u. a. aus den in Abschnitt 1.2 illustrierten Gründen ausgewählt. Dies hat zur Folge, dass mit Scratch eine kostenlose und kindgerechte Plattform gewählt wurde, die die Lernenden unmittelbar in ihren späteren Unterricht integrieren können. Prinzipiell hätte auch eine professionellere bildungsorientierte Programmiersprache (etwa auf ABSIC oder Pascal basierende Konzepte) für die Veranstaltung gewählt werden können, jedoch senkt Scratch die Einstiegshürden für gänzlich unerfahrene Studierende erheblich. Scratch wird daher im Wesentlichen so genutzt, dass ein mathematischer Algorithmus als Code für eine einzelne Figur hinterlegt wird. Hierbei werden neben den grundlegenden Kontrollstrukturen wie Schleifen und Verzweigungen auch Listen, die in Scratch die wesentlichen Eigenschaften von Arrays implementieren, und „eigene Blöcke“, welche mit abgekapselten Funktionen oder Prozeduren anderer Sprachen vergleichbar sind, thematisiert. Letztere dienen hierbei vor allem dazu, rekursive Algorithmen (etwa die rekursive Variante des Euklidischen

Algorithmus oder rekursive Turtle-Grafiken) praktisch umsetzen zu können. Aspekte der objektorientierten Programmierung, wie sie Scratch etwa in Form des „Klonens“ von Figuren unterstützt, spielen hingegen keine Rolle.

3.3 Veranstaltungsdurchführung

Die Veranstaltung wurde erstmalig im Wintersemester 2020/21 durchgeführt. Bei diesem Semester handelte es sich, wie bei vielen Universitäten in Deutschland, um ein vollständiges Distanz-Semester aufgrund der damals vorherrschenden Corona-Pandemie. Aus diesem Grund konnten zwar Videos und andere Materialien ausgespielt, jedoch Lerncafés nicht wie beschrieben durchgeführt werden. Stattdessen fanden regelmäßig Besprechungen als Videokonferenz zu den Inhalten der Veranstaltung statt. Erst bei einer zweiten und dritten Durchführung im Wintersemester 2022/23 bzw. Sommersemester 2023 konnte das Konzept der beschriebenen Planung entsprechend durchgeführt werden. Hierbei kam es im Wintersemester 2022/23 aufgrund eines umfangreichen Cyberangriffs auf die Universität Duisburg-Essen zu weiteren Unregelmäßigkeiten, so dass zunächst eine zum universitären Lern-Management-System Moodle alternative Möglichkeit des Ausspielens der Videodateien gefunden werden musste. Weitere Erschwernisse ergaben sich durch einen längeren Internet- und WLAN-Ausfall in den Veranstaltungsräumen.

Erst im Sommersemester 2023 ergab sich somit eine vollständig reguläre und der Planung entsprechende Veranstaltungsdurchführung. Bei dieser wurde zusätzlich das im folgenden Abschnitt vorgestellte „Maker-Praktikum“ flankierend zum bisherigen Veranstaltungskonzept ergänzend durchgeführt.

3.4 Maker-Praktikum

Unter einem „Maker-Space“ (auch „FabLab“) ist eine Art offene Werkstatt zu verstehen, welche vielfältige analoge und digitale Werkzeuge bereitstellt, um es Privatleuten zu ermöglichen, eigene Innovationen von einer Idee ausgehend bis mindestens zu einem ersten Prototypen umzusetzen (vgl. Anderson, 2012; Akhavan, 2021). Entsprechende Werkstätten sind im Kontext der sog. *Maker-Bewegung* zu sehen (ebd.).

Das „Maker-Praktikum“ ist in diesem Sinne einem Maker-Space nachempfunden. Einzige Aufgabenstellung für die Studierenden ist es, in Kleingruppen eine Idee zu entwickeln und diese Mithilfe verschiedener bereitgestellter oder von außen hinzugezogener Werkzeuge umzusetzen. Hierbei soll einerseits ein gewisser Programmieraufwand notwendig sein, andererseits soll ein mathematischer oder mathematikdidaktischer Bezug bestehen. Dies soll dazu führen, dass im Kontext der Veranstaltung gewonnene algorithmische Kompetenzen für die Studierenden auch im größeren projektbezogenen Rahmen praktisch erfahrbar werden. Gleichzeitig erleichtert das Praktikum bereits kurz nach Veranstaltungsbeginn auch unerfahrenen Studierenden den Einstieg in generelle Ideen des Programmierens.

Zu Beginn des Praktikums geht eine Brainstorming-Phase Hand in Hand mit einer Phase des praktischen Ausprobierens und Erkundens der verschiedenen Hardware-

Optionen. Zur Auswahl stehen hierbei insbesondere „LEGO Mindstorms EV3“¹⁴ wie auch programmierbare Einplatinencomputer wie etwa der „Calliope“¹⁵. Die Programmierung ist wahlweise mit Scratch oder „Microsoft MakeCode“¹⁶ möglich. Letzteres ist Scratch hierbei durch seine blockbasierte Natur sehr ähnlich, so dass es insgesamt leichtfällt zwischen den beiden Umgebungen zu wechseln. Neben dieser bereitgestellten Hard- und Software ist es den Studierenden auch gestattet weitere Mittel hinzuzuziehen.

Der Flipped-Classroom-Charakter der Veranstaltung erlaubt es hierbei, den Übungsgruppen- oder Vorlesungsslot für die gemeinsame Umsetzung der Praktikums-Aufgabe zu verwenden. Dabei entscheiden die Studierenden eigenverantwortlich, ob gerade das aktuelle Trainingsblatt bearbeitet oder die Praktikums-Idee umgesetzt wird.

Das Praktikum schließt mit einer gemeinsamen gegenseitigen Präsentation aller Projekte (etwa 15 Minuten frei gestaltete Präsentation pro Gruppe). Die reine Teilnahme am Praktikum ist zur Klausurzulassung verpflichtend. Die einzelnen Projekte werden mit 0 bis 10 Punkten entlang der Kriterien „Kreativität / Idee“, „Mathematischer / mathematikdidaktischer Bezug“, „Umsetzung / Komplexität“, „Dokumentation“ und „Präsentation“ durch eine Fach-Jury bewertet. Besagte Kriterien wurden im Sinne eines Constructive Alignments zu Praktikumsbeginn transparent dargestellt. Die gewonnenen Punkte erhalten die Studierenden als Bonuspunkte zur abschließenden Modulklausur gutgeschrieben, sofern sie auch ohne die Punkte bestanden hätten.

3.5 Leistungsüberprüfung

Das Modul schließt mit einer Modulklausur von 90 Minuten Umfang. Eine Klausur im Sinne eines Constructive Alignments ist bei einer Veranstaltung wie der vorliegenden praktisch nur möglich, wenn das entsprechende Werkzeug (hier Scratch) auch während der Prüfung zur Verfügung steht (vgl. Küppers & Schroeder, 2017). Denkbar wäre in Analogie zu vielen Abiturprüfungen etwa ein hilfsmittelfreier sowie ein Teil mit entsprechenden Hilfsmitteln. Da dies jedoch für gewisse Restriktionen sorgt (eine Weiterarbeit am hilfsmittelfreien Teil ist z. B. nach Zulassung des Werkzeugs nicht mehr möglich) und es dem offenen und eigenverantwortlichen Charakter der Veranstaltung am ehesten entspricht, steht Scratch als Werkzeug während der Prüfung uneingeschränkt in der entsprechenden Offline-Version des Programms zur Verfügung. Hierbei handelt es sich bei einer von insgesamt fünf Aufgaben um eine explizite Programmier-Aufgabe (analog zu den Sternchen-Übungsaufgaben), sodass (von einer etwaig ausgeteilten Vorlage ausgehend) ein Scratch-Programm erstellt und zur Korrektur eingereicht werden muss. In allen anderen Aufgaben entscheiden die Studierenden selbst, ob sie

¹⁴ Der Vertrieb wurde durch LEGO inzwischen eingestellt, siehe etwa <https://www.heise.de/news/Lego-stellt-Mindstorms-ein-7322482.html>.

¹⁵ Siehe <https://calliope.cc/>.

¹⁶ Siehe <https://www.microsoft.com/de-de/makecode>.

Scratch zur Unterstützung heranziehen oder allein Paper-and-Pencil-basiert vorgehen.

Die Prüfung wird wahlweise in einem für derartige Veranstaltung bereitstehenden Computer-Pool oder mit eigenen Geräten der Studierenden im Sinne eines BYOD-Konzepts durchgeführt. Hierbei ist dann sicherzustellen, dass während der Prüfung kein WLAN-Zugriff zur Verfügung steht bzw. erfolgt. Um Täuschungsversuchen pro aktiv zu begegnen und zudem einem unverständigen Auswendiglernen vorzubeugen, ist es den Prüflingen gestattet, ein beidseitig handschriftlich beschriebenes DIN-A4-Blatt vorzubereiten und in der Klausur zu verwenden.

3.6 Rezeption

Aufgrund der Corona-Pandemie sowie eines bereits oben beschriebenen umfangreichen IT-Ausfalls der Universität Duisburg-Essen konnte die Veranstaltung nicht mithilfe eines standardisierten Fragebogens evaluiert werden. Stattdessen wurden neben einzelnen Feedback-Gesprächen mit Studierenden Kartenabfragen vorgenommen. Hierbei hatten die Teilnehmer:innen der Veranstaltung die Gelegenheit, anonym von positiven (grüne Karten) wie negativen (rote Karten) Erfahrungen mit der Veranstaltung zu berichten wie auch konstruktive Vorschläge (gelbe Karten) zu ihrer weiteren Optimierung zu äußern.

Exemplarisch ist ein Auszug des Ergebnisses einer entsprechenden Abfrage aus dem Wintersemester 2022/23 in Abbildung 2 dargestellt. Die Kritik fiel insgesamt im beschriebenen Sinne durchweg positiv bzw. konstruktiv aus, so dass nahezu keine roten Karten abgegeben wurden.

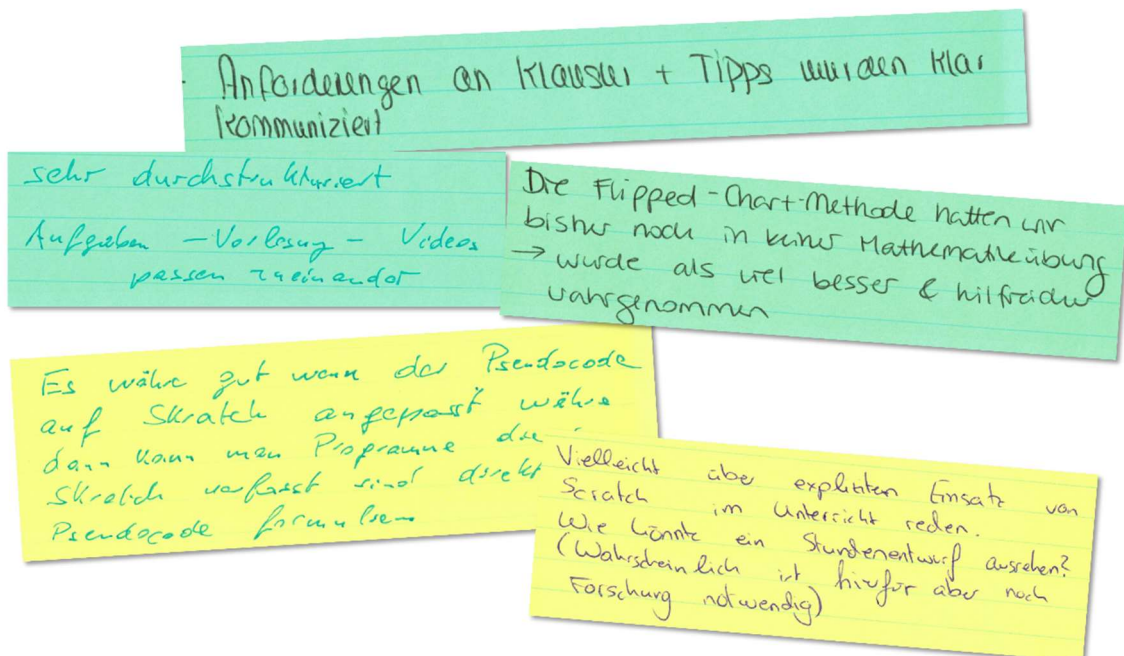


Abbildung 2: Auszug des Ergebnisses einer Kartenabfrage zu negativen, positiven und konstruktiven Rückmeldungen der teilnehmenden Studierenden im Wintersemester 2022/23

Es zeigt sich, dass die konsequente Verzahnung von Videos und Präsenzbetrieb positiv wahrgenommen wurde. Gleichzeitig wird die große Transparenz (gerade im Hinblick auf die abzuleistende Prüfung) geschätzt. Aus Sicht der Studierenden tendenziell zu verbessernde Aspekte betreffen etwa die fachmathematische und weniger unterrichtspraktische Ausrichtung der Veranstaltung, welche sich jedoch aus dem anzuwendenden Wahlmodul ergibt. Auch die hier beschriebene fehlende Passung zwischen Pseudocodes und der blockbasierten Struktur von Scratch ist durchaus intendiert, um Studierenden so eine gewisse Flexibilität im algorithmischen Denken abzuverlangen.

Darüber hinaus erhält auch das Maker-Praktikum, welches im Sommersemester 2023 mit einer ähnlichen Kartenabfrage evaluiert wurde, großen Zuspruch seitens der Teilnehmenden. Hervorgehoben wird die Möglichkeit, die eigene Kreativität vollständig zu entfalten wie auch frei und individuell zu arbeiten zu können. Hierdurch habe das Programmieren deutlich an Anschaulichkeit gewonnen. Einziger Kritikpunkt ist hingegen, dass das zusätzlich zur Rahmenveranstaltung durchgeführte Praktikum die für die parallel zu erarbeitenden Vorlesungsinhalte zur Verfügung stehende Zeit zwangsläufig reduziert.

4. Fazit

Im Rahmen der mehrmaligen Veranstaltungsdurchführung hat sich das Veranstaltungskonzept, in der Form wie es auf Flipped-Classroom- und Elemente projektbasierten Lernens setzt, bewährt. Dies lässt sich gut in den unterschiedlichen Evaluationen und vor dem Hintergrund persönlicher Erfahrungen erkennen. Darüberhinausgehende empirische Erkenntnisse zur Wirksamkeit des vorgestellten Lehrveranstaltungsformats liegen nicht vor, wären aber mit Blick auf die potenziell vermittelte Fähigkeit zum algorithmischen Denken aber wünschenswert. Hierzu zählen neben einer Wirkung auf die fachlichen Kompetenzen an der Schnittstelle zwischen Mathematik und Informatik der Studierenden auch etwaig beeinflusste affektiv-motivationale Merkmale, etwa in Form von Beliefs.

Eine Fortführung und Weiterentwicklung der Lehrveranstaltung ist beabsichtigt und durch die Dokumentation und Veröffentlichung der wesentlichen Materialien in OER-Form auch dozentenunabhängig an anderen Standorten möglich. Generell wäre erstrebenswert, dass entsprechende Veranstaltungsformate durch ein Aufbrechen von zu starken Restriktionen in Form von zu restriktiven Modulbeschreibungen und unflexibler Prüfungsformate einfacher und im Sinne eines Constructive Alignments noch stimmiger realisierbar sind. Hierzu wäre etwa eine Art „Experimentierklausel“ in Prüfungsordnungen denkbar und potenziell zielführend.

Literatur:

- Akçayır, G. & Akçayır, M. (2018). The flipped classroom: A review of its advantages and challenges. *Computers & Education*, 126, 334–345.
- Akhavan, M. (2021). Third places for work: A multidisciplinary review of the literature on Coworking Spaces and Maker Spaces. In I. Mariotti, S. Di Vita & M. Akhavan (Hrsg.), *New workplaces – Location patterns, urbans effects and development trajectories: A worldwide investigation* (S. 13–32). Springer.
- Anderson, C. (2012). *Makers: The new industrial revolution*. Crown.
- Biggs, J. & Tang, C. (2011). *Teaching for quality learning at university: What the student does* (4. Aufl.). McGraw-Hill.
- Bordes, S. J., Walker, D., Modica, L. J., Buckland, J. & Sobering, A. K. (2021). Impact of fully guided implant planning software training on the knowledge acquisition and satisfaction of dental undergraduate students. *Medical Education Online*, 28(1).
- Eppendorf, F. & Marx, B. (2020). Blockprogrammieren im Mathematikunterricht – ein Werkstattbericht. In F. Dilling & F. Pielsticker (Hrsg.), *Mathematische Lehr-Lernprozesse im Kontext digitaler Medien: Empirische Zugänge und theoretische Perspektiven* (S. 227–245). Springer Spektrum.
- Guo, P. J., Kim, J. & Rubin, R. (2014). How video production affects student engagement: An empirical study of MOOC videos. In *L@S '14: Proceedings of the first ACM conference on Learning @ scale conference* (S. 41–50). ACM.
- Heugl, H., Klinger, W. & Lechner, J. (1996). *Mathematikunterricht mit Computeralgebra-Systemen: Ein didaktisches Lehrbuch mit Erfahrungen aus dem österreichischen DERIVE-Projekt*. Addison-Wesley.
- Jatzlau, S. & Romeike, R. (2017). Herausforderungen durch neue Programmierkonzepte in blockbasierten Programmiersprachen. In I. Diethelm (Hrsg.), *Informatische Bildung zum Verstehen und Gestalten der digitalen Welt: 17. GI-Fachtagung Informatik und Schule, 13.–15. September 2017, Oldenburg* (S. 383–392). Gesellschaft für Informatik e.V.
- Klinger, M. (2019). Grundvorstellungen versus Concept Image? Gemeinsamkeiten und Unterschiede beider Theorien am Beispiel des Funktionsbegriffs. In A. Büchter, M. Glade, R. Herold-Blasius, M. Klinger, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.), *Vielfältige Zugänge zum Mathematikunterricht: Konzepte und Beispiele aus Forschung und Praxis* (S. 61–75). Springer Spektrum.
- Knuth, D. E. (1997). *The art of computer programming: Fundamental algorithms* (Bd. 3). Addison-Wesley.
- Kortenkamp, U. & Lambert, A. (2015). Wenn..., dann... bis...: Algorithmisches Denken (nicht nur) im Mathematikunterricht. *mathematik lehren*, Heft 188, 2–9.
- Küppers, B. & Schroeder, U. (2017). Vergleich von Papierklausuren und elektronischen Prüfungen. *INFORMATIK*, 307–318. https://doi.org/10.18420/in2017_24

- Oldenburg, R. (2022). Informatisches Denken im Mathematikunterricht. In G. Pinkernell, F. Reinhold, F. Schacht, & D. Walter (Hrsg.), *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule: Aktuelle Forschungsbefunde im Überblick* (S. 303–323). Springer Spektrum.
- Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas*. Basic Books.
- Resnick, M., Maloney, J., Monroy-Hernández, A., Rusk, N., Eastmond, E., Brennan, K., Millner, A., Rosenbaum, E., Silver, J., Silverman, B. & Kafai, Y. (2009). Scratch: Programming for all. *Communications of the ACM*, 52(11), 60–67.
- Stephens, M. (2018). Embedding algorithmic thinking more clearly in the mathematics curriculum. In Y. Shimizu & R. Vithal (Hrsg.), *ICMI Study 24: School mathematics curriculum reforms: Challenges, Changes and opportunities / November 25–30, 2018, Tsukuba, Japan, University of Tsukuba* (S. 483–490).
- Stephens, M. & Kadujevich, D. M. (2020). Computational/algorithmic thinking. In S. Lerman (Hrsg.), *Encyclopedia of mathematics education* (S. 117–123). Springer.
- Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151–169.
- Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 10(1), 3–37.
- Werner, J., Ebel, C., Spannagel, C. & Bayer, S. (Hrsg.) (2018). *Flipped Classroom – Zeit für deinen Unterricht. Praxisbeispiele, Erfahrungen und Handlungsempfehlungen*. BertelsmannStiftung.
- Wing, J. M. (2010). Computational thinking: What and why? Abgerufen von <https://www.cs.cmu.edu/~CompThink/resources/TheLinkWing.pdf> am 29.09.2023.
- Ziegenbalg, J., Ziegenbalg, O. & Ziegenbalg, B. (2016). *Algorithmen von Hammurapi bis Gödel: Mit Beispielen aus den Computeralgebrasystemen Mathematica und Maxima*. Springer Spektrum.

Auswahl und Nutzung von Erklärvideos im Mathematikunterricht - eine Annäherung aus verschiedenen Perspektiven der Praxis und der Theorie

In der aktuellen (deutschen) empirische Unterrichtsforschung zeigt sich ein breites Bild an Einsatzmöglichkeiten von Erklärvideos. Unklar bleibt: Welche Kriterien für eine sinnvolle Erklärvideonutzung gibt es? Was muss jemand tun, um ein mathematisches Erklärvideo passend zu den eigenen Bedürfnissen auszuwählen? Fokussiert wird in diesem Beitrag auf die Nutzung von Erklärvideos durch Lernende selbst im Zeitraum einer Klassenarbeit. Unter Beachtung von Häufigkeit und Selbstbestimmtheit der Nutzung sollen Nutzungsmuster exploriert werden.

1. Einleitung

Sie werden produziert und vielfältig genutzt – mathematische Erklärvideos. Für die Schulmathematik gibt es zu fast jedem Inhaltsfeld Erklärvideos von mehreren Anbieter*innen (Bednorz & Bruhn, 2021). Der Rat für kulturelle Bildung (2022) konstatiert genau wie Wetzel (2021), dass diese Videos auch tatsächlich von Schüler*innen zu Lernzwecken genutzt werden. Dabei ermöglicht der Einsatz „guter“ Erklärvideos in „gut“ gestalteten Lernumgebungen eine Erweiterung des prozeduralen und Faktenwissens der Lernenden (Findeisen et al., 2019).

Wie die Nutzung der Videos im schulbezogenen Kontext genauer aussieht, haben unter anderem Wolf et al. (2021) untersucht. Ihre Ergebnisse deuten darauf hin, dass Lernende unterschiedliche Intentionen bei der Nutzung von Erklärvideos haben. Ob es mathematikspezifische Strategien bei der Nutzung von Erklärvideos gibt, ist hierbei weiterhin unklar. Studien aus anderen Fachdisziplinen wie beispielsweise in der Physik von Wolf & Kulgemeyer (2016) legen nahe, dass die Schüler*innen nicht immer wissen, welches Video ihnen aus einer didaktischen Sicht heraus in ihrer Situation bestmöglich weiterhilft, da sie bei der Auswahl auch auf nicht inhaltsbezogene Aspekte achten. An dieser Stelle setzt die in diesem Artikel vorgestellte Studie aus einer mathematikbezogenen Perspektive an: Es soll geklärt werden, welche Nutzungstypen es unter den Lernenden gibt und wie diese – für einen bewussten Videoeinsatz sensibilisiert – von der empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik profitieren können. Erste deskriptive Ergebnisse einer Pilotierungsstudie werden im vierten Abschnitt präsentiert.

2. Theoretischer Hintergrund

Erklärvideos zeichnen sich durch verschiedene Aspekte aus, die in den folgenden Unterkapiteln näher erläutert werden. Sie sind audiovisuelle Darstellungsformen von Inhalten und bedienen damit zwei Wahrnehmungskanäle, weshalb insbesondere die Dual Coding Theory – und damit auch die Cognitive Theory of Multimedia Learning – bei der Qualitätsbewertung von Erklärvideos bedacht werden sollte

(Kap. 2.2). Nicht erst seit der Corona-Pandemie samt angestiegener Video-Nutzung (Drijvers et al., 2021) ist die Erforschung von Nutzen (Kap. 2.3) und Nutzung (Kap. 2.4) vom Erklärvideoeinsatz in Lehr-Lern-Szenarien oder als Hilfe für die Vor- und Nachbereitung der Schüler*innen von zuhause aus ein Interessengebiet der empirischen Forschung. Bevor ein Überblick über die Ausgangslage gegeben wird, soll in Kap. 2.1 eine Definition von Erklärvideos erfolgen.

2.1 Definitorisches: Erklärvideo, Lernvideo oder mathematisches Video?

Sowohl in der deutsch- als auch englischsprachigen Literatur gibt es mehrere Fachbegriffe für „Erklärvideos“. So sind Lernvideo, Tutorial, Nachhilfevideo, mathematisches Video oder Demonstrationsvideo nur einige der Synonyme, die – in verschiedenen Kontexten eingebettet – für die audiovisuellen Darstellungsformen verwendet werden. Dies kann auch darauf zurückbezogen werden, dass Erklärvideos in vielfältiger Weise produziert und genutzt (Wolf, 2015) werden.

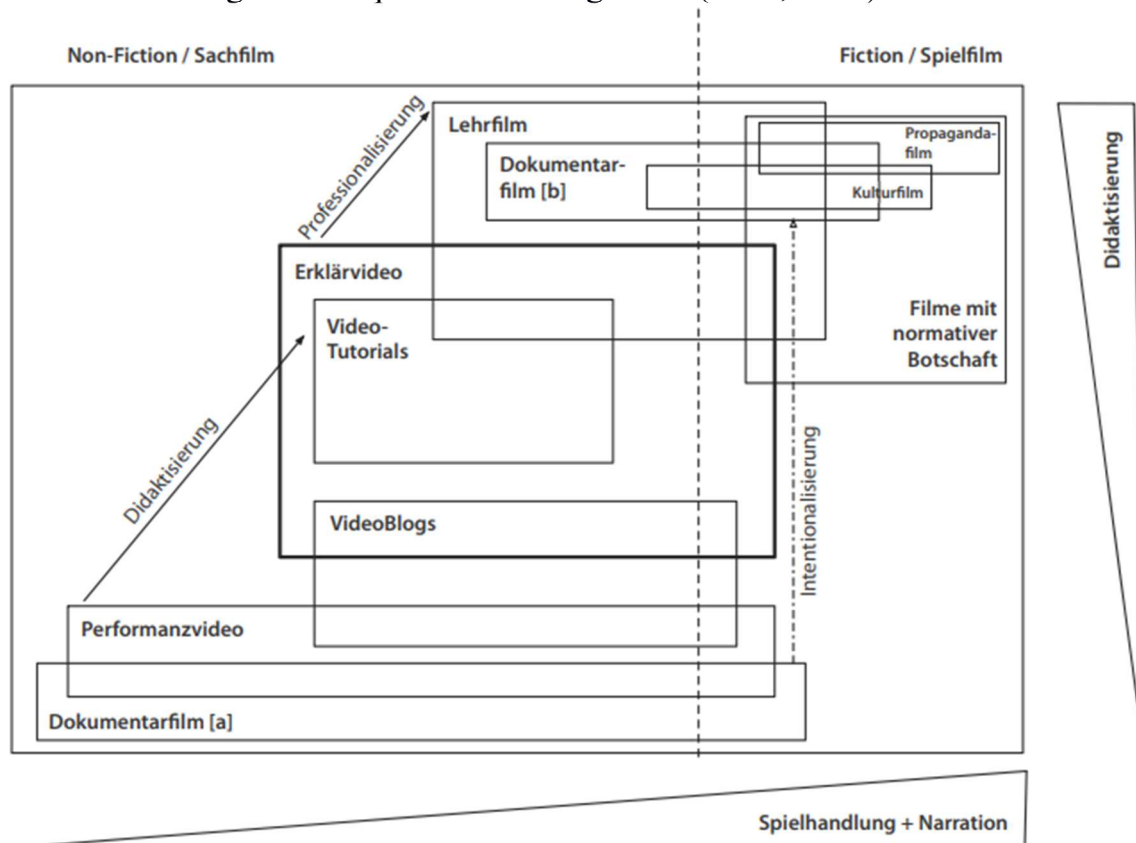


Abbildung 1: Überblick über verschiedene Videoformate (Wolf, 2015, S. 123)

In dieser häufig zitierten Quelle werden Erklärvideos als „eigenproduzierte Filme, in denen erläutert wird, wie man etwas macht oder wie etwas funktioniert bzw. in denen abstrakte Konzepte erklärt werden“ (Wolf, 2015, S. 123) definiert. Diese Definition wird insbesondere vor dem Hintergrund der Abgrenzung von Erklärvideos gegenüber anderen Videoformaten relevant (siehe Abb. 1), ist jedoch nicht vollständig tragfähig für den hier vorliegenden Beitrag. Denn die Unterteilung erfolgt nach den Parametern „Didaktisierung“ und „Spielhandlung + Narration“.

Die Dimension „Spielhandlung + Narration“ wird dabei im Rahmen des hier vorgestellten Promotionsprojektes nicht zur Definition von Erklärvideos genutzt, weil sie auch bei Wolf (2015) keine starke Einschränkung für die Erklärvideodefinition liefert. Die Eigenproduktion, die in Wolfs Definition von Erklärvideos aufgegriffen wird, ist ebenfalls nicht relevant für die Einordnung eines Video als Erklärvideo, wenn es darum geht, welches Video ein*e Schüler*in für die häusliche Unterrichtsvor- und Nachbereitung auswählt.

Die Didaktisierung findet sich auch in anderen Quellen. Findeisen et al. (2019) erweitern die Definition von Wolf um das Potential, einen Lernprozess auszulösen (Findeisen et al., 2019). Auch hier werden Erklärvideos und Lehrfilme bezüglich der Professionalisierung und dem damit verbundenen Grad an Didaktisierung unterschieden. Bezüglich der Professionalisierung greift das Argument, dass es für die Lernenden nur eine eingeschränkte Möglichkeit gibt, diese direkt bei der Auswahl des Videos zu bewerten. Außerdem könnten die Lernenden auch bewusst „nicht-professionelle Videos“ für ihren Lernprozess auswählen. Dementsprechend soll die Unterscheidung bezüglich des Grades an Professionalität in der Definition im Rahmen dieses Artikels nicht aufgegriffen werden.

Zuletzt sprechen sowohl Wolf (2015) als auch Findeisen et al. (2019) den Aspekt der Intentionalisierung an. Fey (2021) fasst diverse Beiträge, die die Erklärvideos von anderen Videoformaten (im Sinne Wolfs) abgrenzen wollen, unter dem Aspekt des intentionalisierten Lernens zusammen: Erklärvideos haben den „Anspruch, eine Sache [...] Personen erklären zu wollen“ (Fey, 2021, S. 21).

Insgesamt lassen sich die Aspekte Didaktisierung und Intentionalisierung als Besonderheiten finden, mit denen aus einer audiovisuellen Darstellungsform ein Erklärvideo im Sinne dieses Beitrags wird. Ein Erklärvideo ist hier eine audiovisuelle Darstellungsform, die in verständlicher Form einen (mathematisch) relevanten Lerngegenstand präsentiert. Im vorliegenden Artikel werden mit Erklärvideos stets mathematische Erklärvideos in den Blick genommen.

Offen bleibt, wann ein Erklärvideo hinreichend viel mathematisches Lernen ermöglicht. Die Videodauer (Zander et al., 2020) wird ebenso nicht als einschränkendes Kriterium für die Definition genutzt. Dadurch sollen keine Videos ausgeschlossen werden, die für das Mathematiklernen von Lernenden genutzt werden.

Zuletzt sei erwähnt, dass keine Unterscheidung zwischen den Begriffen Erklärvideo, Lernvideo und mathematisches Video gemacht wird und diese im Beitrag synonym verwendet werden. Denn eine weitere Ausdifferenzierung der den Begriffen zugrundeliegenden Annahmen (z. B. Instruktionsforschung, Lernpsychologie, Mediendidaktik, ...) ist nicht die Intention des hier präsentierten Projekts.

2.2 Übertrag von medienbezogenen Lerntheorien auf Erklärvideos

Als audiovisuelle Darstellungsform ist ein Erklärvideo ein Multimedien und folgt somit medienbezogenen Lerntheorien. In diesem Abschnitt werden diese Theorien in Kürze dargestellt und auf Erklärvideos bezogen.

Die Cognitive Theory of Multimedia Learning (CTML) nach Mayer (2021) nennt drei Grundannahmen für das Lernen mit Multimedia. So besagt die Dual-Channels-Annahme, dass Lernende die Informationen mit dem auditiven und dem visuellen Wahrnehmungskanal getrennt wahrnehmen. Auch Paivio (1990; 2006) spricht in seiner Dual-Coding-Theory (DCT) von zwei getrennten Subsystemen zur Informationswahrnehmung. Die weitere Verarbeitung im Kopf der Lernenden muss die entsprechenden Reize somit in Beziehung zueinander setzen. Dabei ist laut der Limited-Capacity-Annahme (Mayer, 2021) eine Beschränkung in der Aufnahmefähigkeit der Lernenden vorhanden, sodass nicht beliebig viele Reize simultan wahrgenommen werden können. Im Wesentlichen ist dies auf die menschliche Biologie zurückzuführen (Sweller, 2019). Zuletzt bedarf der Verarbeitungsprozess in den Köpfen der Lernenden eine aktive Auseinandersetzung mit den wahrgenommenen Reizen, die in Verbindung zu bestehenden Wissens-elementen gesetzt werden müssen. Dies ist die zentrale Aussage der Active-Processing-Annahme (Mayer, 2021). Der gesamte Verarbeitungsprozess beim Lernen mit Multimedia ist in Abb. 2 dargestellt. Dabei ist auch die Repräsentationsform aufgenommen, um zu verdeutlichen, dass beide Wahrnehmungskanäle Worte auffassen können, aber Bilder nur visuell wahrgenommen werden können.

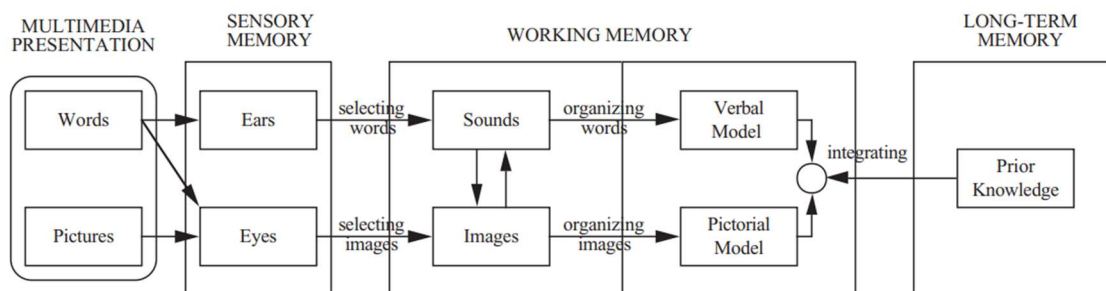


Abbildung 2: Verarbeitungsprozess beim Lernen mit Multimedia (Mayer, 2021, S. 62)

Durch die eingeschränkte Aufnahmefähigkeit von Lernenden bedingt ergibt sich eine Notwendigkeit der Fokussierung auf Relevantes. Dies beschreibt Sweller (2019) insofern, als dass er zwischen intrinsischer und extrinsischer kognitiver Belastung differenziert. Dabei ist die intrinsische kognitive Belastung auf der einen Seite durch die Informationen im Artefakt, an oder mit dem gelernt werden soll, festgelegt. Diese ist, insofern sie einen vergleichbaren Stand an Vorwissen haben, für alle Lernenden gleich. Dabei wird durch die lernbezogene kognitive Belastung, die in der intrinsischen kognitiven Belastung enthalten ist, noch einmal hervorgehoben, welche der im Artefakt enthaltenen Informationen für den intendierten Lernprozess von Relevanz sind. Auf der anderen Seite fußt die extrinsische kognitive Belastung auf einem Überfluss an teilweise nicht lernrelevanten Informationen und eine nicht lernförderliche Gestaltung der Artefakte, die den Erschließungsaufwand der Lernenden erhöhen (Sweller, 2019).

Um genauer über Erklärvideos als Medium bzw. als Artefakt sprechen zu wollen, sei zuletzt ein Blick auf die Mediendidaktik von Tulodziecki und Herzig und ins-

besondere ein Übertrag ihrer Medienkonzepte auf Erklärvideos gewagt. Im Englischen wird beim Medienbegriff zwischen “delivery system” im Sinne der technischen Gerätschaften und dem “content” im Sinne didaktisch aufbereiteter Inhalte unterschieden (Kerres, 2018). Erklärvideos können in beide Kategorien eingeordnet werden: Sie sind die didaktische Aufbereitung eines spezifischen Themas oder übernehmen die die Nachricht übertragende Rolle. In beiden Fällen können Erklärvideos in allen Konzepten der Medienverwendung interpretiert werden (Tulodziecki, 1997; Tulodziecki & Herzig, 2004):

- im Lehrmittelkonzept als situativ einzusetzendes Medium zur Steuerung des Lernprozesses,
- im Arbeitsmittelkonzept als Medium, an bzw. mit dem die Lernenden arbeiten sollen,
- im Bausteinkonzept als Entlastung der Lehrperson durch Auslagerung gewisser Elemente des Lernprozesses,
- im Systemkonzept als externe Bereitstellung diverser, für den heterogenen Lernprozess relevanter Elemente und
- im Lernumgebungskonzept als Teil des Informationspools, dessen sich Lernende bei der individuellen Wissensaneignung bedienen können (dazu auch Reich, 2014)

2.3 Kriterien guter Erklärvideos

Mit der Qualität von Erklärvideos haben sich Studien sowohl aus motivational-affektiver Sicht als auch hinsichtlich der Wirkung diverser Gestaltungselemente auseinandergesetzt. Im Folgenden sei ein Überblick gegeben, der in überfachliche und mathematikspezifische Ausführungen differenziert wird. Die abschließend aufgeführte Tabelle der Qualitätskriterien mathematischer Erklärvideos stellt die Grundlage für die fachliche Analyse häufig genutzter Videos dar und liefert einen Beitrag für die Entwicklung des Interviewleitfadens (Kap. 3.3).

2.3.1 Überfachliche Ausführungen

Ebner & Schön (2017) haben die Arbeit von Mayer auf Erklärvideos übertragen und dabei sieben Prinzipien für Erklärvideos gefunden: Das Multimediaprinzip propagiert, dass das Hinzufügen passender Bilder zu gesprochenem Text den Lerneffekt vergrößert. Dabei gelten die Prinzipien der räumlichen und zeitlichen Kontinuität, die fordern, dass Bild und Ton – wenn sie zusammengehören – räumlich und zeitlich nah beieinander liegen. Das Prinzip der visuell gespaltenen Aufmerksamkeit lenkt den Fokus auf gesprochene Worte statt geschriebene Texte, während das Prinzip der auditiv gespaltenen Aufmerksamkeit besagt, dass die kognitive Belastung auch beim Gesprochenen möglichst gering gehalten werden soll. Zuletzt werden kurze Sequenzen, eine Beschränkung auf kohärente und dem Thema zuträgliche Informationen und eine Beachtung des individuellen Vorwissens gefordert (Ebner & Schön, 2017; Mayer, 2021).

Viele dieser Prinzipien werden auch von Kulgemeyer (2019) in seiner explorativen Studie mit Schüler*innen wiedergefunden. Er nennt als „Kernideen“ für die Erklärqualität von MINT-Erklärvideos Adaption an Rezipierende, Nutzung von Veranschaulichungswerkzeugen, Verdeutlichung von Relevanz, bewusste Strukturierung, Präzision und Kohärenz in Erklärungen und Einbettung in den Unterricht, welche allesamt die Prinzipien von Mayer widerspiegeln. Neben den Prinzipien nach Ebner und Schön (2017) findet Kulgemeyer in einer Studie auch die Kernidee „Konzepte erklären“. Diese besagt, dass das im Video behandelte Thema „zu komplex zur Selbsterklärung“ (Kulgemeyer, 2019, S. 286).

In ihrer groß angelegten Studie über die Video-Nutzung von Lernenden im Rahmen eines MOOC haben Guo et al. (2014) als Einflussfaktoren auf die Qualität von Erklärvideos die Videolänge, das Zeigen der sprechenden Person, ein eher informelles und persönliches Videosetting, ein schnelles und enthusiastisches Sprechen sowie das Aufnehmen von dynamischen Visualisierungen gefunden. Diese Ergebnisse werden von Findeisen et al. (2019) in ihrer Metastudie insofern bestätigt, dass auch sie kürzere Videos als sinnvoller darstellen. Auch die Videoperspektive, der Einsatz interaktiver Elemente, das Alter der erklärenden Person und das Design der Videos haben allesamt einen Einfluss auf die kognitive Leistung oder motivational-affektive Komponenten bei den Rezipierenden (Findeisen et al., 2019), was einzelnen von Guo et al. gefundenen Erkenntnissen entspricht.

2.3.2 Mathematikspezifische Ausführungen

Bei einer Beschränkung auf die mathematikdidaktische Forschung fällt auf, dass es lange Zeit „wenig [...] domänenspezifische Perspektiven auf Erklärvideos“ (Fey, 2021, S. 21) gab. Häufig zitiert werden die Diplomarbeiten von Marquardt (2016) und Fuchs (2018), die Kriterienlisten für die Qualität von Schulbüchern auf Erklärvideos übertragen haben und diese Liste dann explorativ bezüglich eines effizienten Einsatzes durch Lehrkräfte getestet haben. Die in dieser Liste aufgeführten Kriterien fallen in fünf Bereiche: allgemein, fachdidaktisch-inhaltlich, fachdidaktisch-methodisch, medienwissenschaftlich-technisch und pädagogisch (Marquardt, 2016). Die in Kap. 2.3.1 genannten Aspekte werden in einzelnen Kriterien der Liste aufgegriffen, aufgefächert und um mathematikspezifische Kriterien wie Darstellungsformen, Vermeidung unnötiger Formalismen, Begründungen von Aussagen oder Rechentraining (Marquardt, 2016) ergänzt. Dabei sind die mathematikspezifischen Ergänzungen im Wesentlichen in einer Minimalliste für die Qualitätskriterien von Erklärvideos nicht zu finden; diese enthält weitestgehend nur allgemein- oder mediendidaktische Kriterien. Die Ausnahme hierbei ist das Begründen von Aussagen (Fuchs, 2018).

2.3.3 Zusammenfassung der Kriterien

Die Kriterien, die die verschiedenen Studien und Arbeiten hervorheben, ähneln sich in großen Teilen und lassen sich zu einer Liste zusammenfassen. Von großer Bedeutung scheint die „Passung an die Rezipierenden“ zu sein, die sowohl das individuell verfügbare Vorwissen als auch eine Differenzierung und Aspekte der

Sprachbildung umfasst. Ebenso ist eine „Strukturierung des Lerngegenstands“ als didaktische Aufbereitung des Themas notwendig. Die „Einbettung in das Unterrichtsgeschehen“ umfasst als drittes Kriterium die Einbindung in größere Unterrichtszusammenhänge, Anschlussaufgaben und aktivierende Elemente in einer Lernumgebung, in die das Erklärvideo eingebettet werden sollte. Dass es „präzise und kohärente Erklärungen“ (Kulgemeyer, 2018) geben sollte, verdeutlicht den Fokus auf den Lerngegenstand und zeigt die Bedeutung verständlich-kausaler Erklärketten für die Videos. Zuletzt sind die mathematikspezifischen Kriterien „Nutzung passender Darstellungsformen“ und „Ermöglichung des Aufbaus adäquater Grundvorstellungen“ im Sinne einer Abkehr von Kalkül- hin zu einer Verstehensorientierung (Prediger, 2009) relevant für die Qualität von Erklärvideos. Tabelle 1 zeigt einen Überblick der zusammengeführten Kriterien.

Abk.	Qualitätskriterium
Pas	Passung an die Rezipierenden
Str	Strukturierung des Lerngegenstands
Unt	Einbettung in das Unterrichtsgeschehen
Erk	Präzise und kohärente Erklärungen
Dar	Nutzung passender Darstellungsformen
Gru	Ermöglichung des Aufbaus adäquater Grundvorstellungen

Tabelle 1: Übersicht der zusammengefassten Qualitätskriterien mathematischer Erklärvideos

Die hier aufgeführte Liste ist als Zusammenfassung verschiedener Werke zu deuten und hat in der gekürzten Form nicht den Anspruch, allumfassend, trennscharf und empirisch fundiert zu sein. Eine ausführliche Form soll im Rahmen der diesem Projekt zugehörigen Dissertationsarbeit veröffentlicht werden.

2.4 Nutzung von Erklärvideos durch Lernende und Lehrende

Die Nutzung von Erklärvideos für (schulisches) Lernen wird neben der Untersuchung von Wirkung und motivational-affektiver Komponenten auch im Sinne von Nutzungsstudien in den Blick der empirischen Forschung genommen. Drijvers et al. (2021) haben herausgefunden, dass die Nutzung bereits existierender Erklärvideos durch Lehrkräfte im durch die Corona-Pandemie notwendig gewordenen Distanzunterricht in Deutschland ebenso wie die Nutzung anderer digitaler Lernprogramme und -plattformen zugenommen hat. Gerade die in den deutschen Schulen verbreiteten asynchronen Unterrichtsformen seien laut Drijvers et al. (2021) für diese Zunahme mitverantwortlich. Nach welchen Kriterien Lehrkräfte Erklärvideos für ihren Unterricht auswählen ist noch unerforscht.

Die Auswahl und Nutzung von Erklärvideos durch die Schüler*innen ist besser erforscht. Die Horizont-Studie 2019 (RkB, 2022) zeigt auf, dass auch schon vor der Pandemie etwa die Hälfte aller Schüler*innen YouTube als Videoplattform für Schulthemen als relevant empfindet. Hierbei stellen die Videos eine Hilfe beim „Wiederholen vom Unterricht, den ich nicht verstanden habe, für Hausaufgaben [...], zur Vertiefung meines Wissens aus der Schule“ (RkB, 2022, S. 28) und zur

Prüfungsvorbereitung dar. Ähnliche Befunde haben auch Wolf et al. (2021) in ihrer Nutzungsstudie über Erklärvideos herausgearbeitet: Erklärvideos werden häufig von Leistungsschwächeren aus leistungsoptimierenden Gründen und demnach kompensatorisch verwendet. Dadurch deckt sich die Videonutzung in Mathematik mit der Nachhilfeintensität im Fach (Wolf et al., 2021). Bei den Gründen für die Videonutzung haben Wolf et al. herausgefunden, dass die Schüler*innen sowohl selbst- als auch fremdbestimmte Gründe für die Videonutzung angeben und weder fremd- noch selbstbestimmte Gründe die Nutzung dominieren. Zum Zeitpunkt der Nutzung wird häufig vor Klassenarbeiten, beim Auftreten von Verständnislücken oder bei den Hausaufgaben genannt und seltener auch „wenn ein neues Thema im Unterricht kommt“ (Wolf et al., 2021, S. 397).

2.5 Forschungsdesiderat

Die meisten der hier vorgestellten, empirischen Erkenntnisse basieren nicht auf der mathematikspezifischen Videonutzung. Eine Übertragung auf die mathematikbezogene Videonutzung scheint naheliegend, aber aufgrund der fachspezifischen Kriterien (siehe Kap. 2.3.3) nicht zwangsläufig zulässig. Weiterhin bleibt es gerade hinsichtlich der mathematischen Qualitätskriterien von Erklärvideos unklar, ob es bei der Erklärvideonutzung zwischen einzelnen mathematischen Inhaltsfeldern oder auch mit der fortschreitenden „Professionalisierung“ (im Sinne eines Kompetenzerwerbes der Nutzenden) von zu unterschiedlichen Auswahl- und Nutzungsstrategien oder -intentionen kommt. Das Dissertationsprojekt, das im Rahmen dieses Beitrags vorgestellt wird, dient dazu, diese Forschungslücken zu schließen. Konkret sollen diese Forschungsfragen beantwortet werden:

- (1) Mit welchen Strategien und Intentionen nutzen Schüler*innen und Lehrkräfte mathematikspezifische Erklärvideos?
- (2) Inwieweit gibt es Unterschiede bei der Auswahl und Nutzung von Erklärvideos bezüglich der mathematischen Inhaltsfelder?
- (3) Ändern sich Auswahl- und Nutzungsstrategien für den Einsatz von Erklärvideos im Mathematikunterricht mit fortschreitender Professionalisierung?

Es wird davon ausgegangen, dass bei der ersten Forschungsfrage keine Unterschiede zu allgemeinen Strategien und Intentionen bei der Auswahl und Nutzung von Erklärvideos gefunden werden. Da Erklärvideos häufig als lebensweltnah wahrgenommen werden (RkB, 2022), wird davon ausgegangen, dass ihre Nutzung häufig unreflektiert ist und demnach keine mathematikspezifischen Gründe für die Auswahl und Nutzung bestimmter Erklärvideos gefunden werden können.

Da sowohl geeignete Darstellungsformen als auch Grundvorstellungen sich zwischen den mathematischen Inhaltsfeldern ändern, ist es naheliegend, dass Erklärvideos entlang der Kriterien in Tab. 1 in verschiedenen Inhaltsfeldern unterschiedlich gestaltet werden. Da es in verschiedenen Inhaltsfeldern häufig auch verschiedene produzierende Anbieter*innen für die Videos gibt (Bednorz & Bruhn, 2021),

werden sich auch die Auswahl und Nutzung durch die Schüler*innen und Lehrkräfte unterscheiden. Ob sich hier jedoch Unterschiede in den Nutzungstypen ergeben, ist entsprechend des Arguments im vorigen Absatz fraglich, wenngleich der Anspruch der Mathematik hier sein sollte, die Nutzenden für die mathematikspezifischen Kriterien zu sensibilisieren.

3. Methodik

Für die Beantwortung der Forschungsfragen wird einem Mixed-Methods-Design im weiteren Sinne (Buchholtz, 2021) gefolgt, bei dem qualitative und quantitative Ansätze einander ergänzen. Die Perspektiven von Schüler*innen, Lehrkräften und aus Forschungssicht sollen ermittelt und trianguliert werden, um möglichst aussagekräftige Ergebnisse zu erzielen.

Zuerst werden ähnlich zu Rezats Beforschung des Schulbuchs als Instrument des Schülers (Rezat, 2009) verschiedene Nutzungstypen unter den Schüler*innen ermittelt. Dafür wird das in Kap. 3.1 beschriebene Instrument des Erklärvideotagebuches verwendet. Anschließend werden die Nutzungstypen näher untersucht, indem interviewbasiert genauere Informationen zur Auswahl und Nutzung in den einzelnen Nutzungsgruppen gesammelt werden. Durch eine möglichst große Stichprobe sollen auch weitere Effekte wie der Einfluss von Lehrkräften auf die Erklärvideoauswahl durch die Schüler*innen untersucht werden. Dies geschieht unter anderem über Interviews mit den Lehrkräften zur Aufnahme von Rahmeninformationen über den Unterricht (siehe Kap. 3.2). Zuletzt wird die Forschungsperspektive auf die Erklärvideonutzung mit in die Triangulation aufgenommen, die auf den oben beschriebenen Kriterien aufbaut (siehe Kap. 3.3).

Insgesamt erscheint der Mixed-Methods-Ansatz im Sinne von Buchholtz (2021) hier sinnvoll, um sowohl die Nutzungstypen anhand quantitativer Kriterien zu erfassen als auch gewonnene Erkenntnisse mithilfe qualitativer Daten zu vertiefen. Durch die Vertiefung sollen genauere Kenntnisse über die Intentionen und Mikroprozesse bei Auswahl und Nutzung von Erklärvideos erhalten werden, die mithilfe der geplanten quantitativen Datenerhebung nicht erklärt werden können.

3.1 Untersuchung der Schüler*innensicht

Das zentrale Instrument des Dissertationsprojekts ist ein selbstentwickeltes Erklärvideotagebuch, mit dem die Erklärvideonutzung von Schüler*innen in Schriftform erfasst wird. Das Tagebuch fußt im Wesentlichen auf der Vorarbeit von Wolf et al. (2021), die die Nutzung von Erklärvideos durch Schüler*innen in allgemeindidaktischer Perspektive anhand des Selbstkonzepts untersucht haben.

Um im Sinne des Zwiebelmodells der Mediennutzung nach Schweiger (2007) die Medienbewertung von den Nutzungsmustern und Nutzungsepisoden zu trennen, wird mit dem Tagebuch ein Instrument entwickelt, bei dem die Schüler*innen ihre tatsächliche Videonutzung täglich über einen Zeitraum von zwei Wochen eintragen müssen. Analog zum Ansatz von Rezat (2009) wird darauf abgezielt, die „fak-

tische Nutzung“ in „authentischen Situationen“ (v. a. zuhause), das heißt „an jedem Ort und zu jeder Zeit“ der Nutzung zu erheben und dabei sowohl „situative Bedingungen“ als auch den „Zweck der Nutzung“ zu dokumentieren.

Das Tagebuch enthält 13 identische Seiten für jeden Tag im Erhebungszeitraum und drei weitere, die generelle Informationen zur Studie enthalten. Die identischen Seiten umfassen sechs teilweise optionale Fragen über (1) die Gründe, warum am Tag kein Erklärvideo für Mathematik geschaut wurde, (2) welche Erklärvideos die Schüler*innen an diesem Tag geschaut haben, (3) welche Intention sie bei der Entscheidung, ein oder mehrere Erklärvideos zu schauen, hatten, (4) warum sie sich für genau diese Videos entschieden haben, (5) was sie während des Schauens gemacht haben und (6) ob sie die Erklärvideos nach dem Anschauen als hilfreich für ihren Lernprozess empfunden haben. Abb. 3 zeigt einen Ausschnitt einer Seite des Erklärvideotagebuches, der die Fragen (3) und (4) umfasst, deren Antworten direkt aus Wolf et al. (2021) entnommen wurden.

(3) Warum hast du dir die Videos angeschaut?

- ☐ Weil ich für die Klassenarbeit gelernt habe
- ☐ Weil ich etwas im Unterricht nicht verstanden habe
- ☐ Weil ich Hilfe bei den Hausaufgaben gebraucht habe
- ☐ Weil ich mich auf die nächste Stunde vorbereitet habe

(4) Warum habe ich genau diese Videos geschaut?

...trifft zu auf Video Nr.

	1	2	3	4	5
a) Um Dinge besser zu verstehen	☐	☐	☐	☐	☐
b) Weil mein Lehrer nicht gut genug erklärt hat	☐	☐	☐	☐	☐
c) Um mich in Mathematik weiterzubilden	☐	☐	☐	☐	☐
d) Weil es mir empfohlen wurde (Lehrer, Eltern, Nachhilfe, YouTube)	☐	☐	☐	☐	☐
e) Weil ich den Kanal bzw. die Website gut finde	☐	☐	☐	☐	☐
f) Weil meine Freundinnen und Freunde mir es empfohlen haben	☐	☐	☐	☐	☐

Abbildung 3: Ausschnitt aus dem Erklärvideotagebuch

Als Analysemethode für die Auswertung der Erklärvideotagebucheinträge wird eine typenbildende qualitative Inhaltsanalyse nach Kuckartz (2014) angestrebt. Dabei sind die primären Merkmale für die Typenbildung die Häufigkeit, der Zeitpunkt und die Selbstbestimmung der Videonutzung. Diese Merkmale werden durch eine Häufigkeitszählung in den Einträgen der Erklärvideotagebücher bestimmt, wobei sich das Merkmal an der Unterteilung von Wolf et al. (2021) orientiert. Genauer wurden die Antworten a) und c) in Abb. 3 der selbstbestimmten Erklärvideonutzung (SB) zugeordnet, während b), d) und f) auf eine fremdbestimmte Videonutzung (FB) hinweisen.

In der weiteren Beforschung werden sowohl tagebuchinterne Auffälligkeiten gesucht als auch über Begleitinterviews mit prototypischen Schüler*innen der Grup-

pen mathematikspezifische Auswahl- und Nutzungsstrategien erhoben. Die Auswertung der Interviews erfolgt über eine qualitative Inhaltsanalyse nach Mayring (2015) mit einer deduktiven Kategorienanwendung (siehe Tab. 1).

3.2 Untersuchung der Lehrkräftesicht

Die Untersuchungsmethode für die Lehrkräftesicht ist noch in der Exploration. Generell werden Interviews zur Erhebung der Rahmenbedingungen in den Klassen durchgeführt, deren Schüler*innen an der Beforschung mit den Erklärvideotagebüchern teilnehmen. Vor allem soll dadurch erfragt werden, wie die generellen Vorerfahrungen der Schüler*innen mit dem Einsatz von Erklärvideos in mathematischen Lernkontexten sind. Außerdem soll der Einfluss der Lehrkraft – zum Beispiel durch das Bereitstellen eigener Erklärvideos oder von Links zu externen, „gut geeigneten“ Erklärvideos – untersucht werden kann, um die situativen Bedingungen der Erklärvideonutzung genauer zu greifen (Rezat, 2009). Zuletzt werden auch die Einstellungen der Lehrkraft bezüglich Nutzung von Erklärvideos zum Mathematiklernen und -lehren im Rahmen der Interviews erhoben, um auf die Professionalisierungsfrage eingehen zu können.

3.3 Untersuchung der Forschungssicht

Die Forschungssicht als dritte Säule der Triangulation wird in der vorgestellten Forschung über die Nutzung der Kriterienliste aus Tab. 1 als deduktives Kategoriensystem für die qualitative Inhaltsanalyse der Begleitinterviews mit Schüler*innen und Lehrkräften eingebracht. Da die Schüler*innen in den Tagebüchern außerdem konkrete Videos benennen, die sie genutzt haben, können die am häufigsten genannten Videos identifiziert werden. Nach diesem Identifikationsschritt wird die inhaltliche Qualität dieser Videos basierend auf einer ausführlicheren Darstellung der Kriterienliste aus Tab. 1, die Indikatoren für die Bewertung der sechs Kategorien enthält, bestimmt. Diese Bestimmung soll durch ein Expert*innen-Rating von wissenschaftlichen Mitarbeiter*innen und Hilfskräften geschehen, die über eine gewisse Expertise im Bereich der Erklärvideos verfügen. Außerdem werden auch Lehrkräfte gebeten, die am häufigsten genutzten Erklärvideos hinsichtlich ihrer generellen Qualität zu bewerten, um das Expert*innen-Rating aus mehreren Perspektiven zu beleuchten.

3.4 Zusammenführen der Ergebnisse

Zusammengefasst werden im Rahmen der Studie Daten auf drei Wege erhoben: über das Erklärvideotagebuch, die Begleitinterviews und die Expert*innen-Ratings der am häufigsten genutzten Erklärvideos. Dabei werden die qualitativen und quantitativen Daten nicht parallel nebeneinander gestellt, sondern integriert, indem der quantitative Anteil mit der Erhebung der Nutzungsdaten den Ausgangspunkt der weiterführenden qualitativen Studie darstellt: Erst werden quantitativ Nutzungstypen gebildet, deren Nutzungsmuster bezüglich Intentionen und Strategien dann mit der qualitativen Untersuchung genauer analysiert werden. Die quantita-

tiven Daten, die das Expert*innen-Rating darstellt, werden zuletzt als Ausgangspunkt für die weitere Beforschung des Feldes genutzt – hieran soll erkannt werden, ob und in welche Richtung Schüler*innen und Lehrkräfte geschult werden sollten, um für die eigenen Bedürfnisse passende Erklärvideos auszuwählen. Dabei soll die vorgenommene Typisierung dabei helfen, eine solche Schulung konkreter auf einzelne Schüler*innen-Typen anpassen zu können.

4. Erste Ergebnisse

Im Folgenden soll ein Überblick über die ersten Ergebnisse aus einer Pilotierungsstudie vorgestellt werden. Die Studie ist am Ende des Schuljahres 2022/23 im Mathematikunterricht von zwei Schulklassen eines Gymnasiums im ländlichen Raum nahe Bielefeld durchgeführt worden. Bei den Klassen handelt es sich um eine sechste und eine achte Klasse, die beide vom Autoren unterrichtet wurden. Insgesamt liegen die Nutzungsdaten von 34 Schüler*innen vollständig vor und können ausgewertet werden. Der Erhebungszeitraum wurde bewusst so gewählt, dass sich die Datenerhebung über eine Woche vor und eine Woche nach der jeweiligen Klassenarbeit erstreckt. Die Auswahl der Klassen erfolgte aus rein pragmatischen Gründen (identischer Klassenarbeitstermin).

4.1 Deskriptive Darstellung der Ergebnisse

Eine erste Auswertung der Nutzungsdaten zeigt eine variable Erklärvideonutzung der Schüler*innen. Während acht der Schüler*innen gar keine Videos geschaut haben, gibt es 22 Schüler*innen mit gelegentlicher (zwischen null und zwei Videos pro Woche geschaut) und vier mit häufiger Videonutzung (zwei oder mehr Videos pro Woche geschaut). Die Einteilungen der Nutzung sind an die von Zupancic & Horz (2002) angelehnt. Das Merkmal Zeitpunkt der Videonutzung ist unterteilt in „ausschließlich vor der Klassenarbeit“ (V), „vor und nach der Klassenarbeit“ (VN), „ausschließlich nach der Klassenarbeit“ (N) und „weder vor noch nach der Klassenarbeit“ (X). Die Selbstbestimmung der Videonutzung als drittes primäres Merkmal wird unterteilt in „ausschließlich selbstbestimmte Nutzung“ (SB), „fremd- und selbstbestimmte Nutzung“ (FS), „ausschließlich fremdbestimmte Nutzung“ (FB) und „keine Gründe genannt“ (KG). Wie diese primären Daten zusammenhängen, wird in den folgenden beiden Tabellen dargestellt.

Nutzung	V	VN	N	X	gesamt
Keine	0	0	0	8	8
Gelegentlich	15	7	0	0	22
Häufig	2	2	0	0	4
gesamt	17	9	0	8	34

Tabelle 2: Gegenüberstellung von Häufigkeit (links) und Zeitpunkt der Nutzung (oben)

Es wird deutlich, dass hier sowohl unter den Schüler*innen mit gelegentlicher als auch unter denen mit häufiger Erklärvideonutzung niemand mit einer Nutzung ausschließlich nach der Klassenarbeit vorkommt. Die Nutzung der Videos ausschließlich vor und sowohl vor als auch nach der Klassenarbeit tritt in beiden Gruppen auf, wobei unter den Schüler*innen mit gelegentlicher Nutzung ein deutlich höherer Anteil Videos ausschließlich vor der Klassenarbeit nutzt.

Nutzung	SB	FS	FB	KG	gesamt
Keine	0	0	0	8	8
Gelegentlich	8	10	3	1	22
Häufig	0	4	0	0	4
gesamt	8	14	3	9	34

Tabelle 3: Gegenüberstellung von Häufigkeit (links) und Selbstbestimmung der Nutzung (oben)

Bei der Gegenüberstellung der Häufigkeit und Selbstbestimmung fällt auf, dass alle Schüler*innen mit häufiger Videonutzung sowohl fremd- als auch selbstbestimmte Gründe für die Videonutzung angeben. In der Gruppe mit der gelegentlichen Nutzung hingegen finden sich auch Schüler*innen, die Erklärvideos ausschließlich selbst- oder ausschließlich fremdbestimmt nutzen. Eine Person nutzt Erklärvideos gelegentlich und hat keinen Grund für die Nutzung angegeben.

4.2 Diskussion der Ergebnisse

In einem ersten Versuch der Ergebnisdiskussion können einige Besonderheiten in den Befunden mithilfe der über die Lehrperson erhaltenen Rahmenbedingungen der Erklärvideonutzung erklärt werden. Die Schüler*innen mit ausschließlich fremdbestimmter Videonutzung sind alle in der Klasse, die von ihrer Lehrkraft zur Vorbereitung der Klassenarbeit Links zu hilfreichen Erklärvideos erhalten hat. Die Schüler*innen könnten die Erklärvideos probeweise genutzt haben, um zu eruieren, ob das Lernen mit Erklärvideos hilfreich für sie sein kann. Dass eine Person Erklärvideos nutzt, aber keine Gründe für die Nutzung angibt, kann daran liegen, dass in einer Klasse ein Erklärvideo gemeinsam in der Unterrichtsstunde rezipiert worden ist. Es wird deutlich, dass systematische Interviewdaten (vgl. Kap. 3) mit den Lernenden einen tieferen Blick auf die Zusammenhänge geliefert hätten. Leider liegen diese für die dargestellte erste Pilotierung nicht vor.

In der Verschränkung von Selbstbestimmung und Nutzungszeitpunkt fällt auf, dass die Schüler*innen mit ausschließlich selbstbestimmter Nutzung Videos eher an den Tagen schauen, an denen auch eine Mathematikstunde stattgefunden hat. Dies kann – sofern es sich bei diesen Schüler*innen eher um die Leistungsstärkeren handelt – auf die Erkenntnisse von Wolf et al. (2021) zurückgeführt werden, die herausgestellt haben, dass gerade leistungsstarke Schüler*innen Erklärvideos

zu einer Maximierung ihrer Leistung nutzen. Dies gelingt im Sinne des Kontinuitätsprinzips von Mayer (siehe Kap. 2.3.1) besser, wenn nur ein kurzer Abstand vom Lernprozess in der Schule und dem Lernen mit Erklärvideos vorliegt.

5. Ausblick und erwartete Limitationen

Die hier beschriebene Forschung, die sich zentral auf das Ausfüllen eines Erklärvideotagebuches beruft, bringt Limitationen mit sich. Nachdem in Kap. 5.1 näher auf die sich ergebenden Limitationen eingegangen wird, wird in Kap. 5.2 der weitere Forschungsplan aufgezeigt.

5.1 Limitationen

Während das Erklärvideotagebuch einige Vorteile mit sich bringt (siehe Kap. 3.1), hat es einige Nachteile, die Limitationen der Aussagekraft mit sich bringen. So ist es für einige Schüler*innen eine ungewohnte Methode und stellt eine hohe extrinsische kognitive Belastung dar, die keinen festen Platz im Alltag darstellt. Für diese Schüler*innen ist das Tagebuch als Erhebungsmethode weniger geeignet. Auch diejenigen, die sprachliche Schwierigkeiten beim Ausfüllen des Tagebuches haben, erfahren eine systematische Benachteiligung. Sollten sich in diesen Gruppen relevante Nutzungsstrategien ergeben, werden sie mit diesem Forschungsansatz vermutlich nicht gefunden. Generell kann nicht sichergestellt werden, dass alle Schüler*innen das Tagebuch regelmäßig und korrekt ausgefüllt haben, was sich ebenso limitierend auf die Aussagekraft der Ergebnisse auswirkt.

In der ersten Pilotierungsphase ist außerdem aufgefallen, dass der Einfluss der Eltern die Videonutzung von Schüler*innen moderiert. Auch hier kann es zu einer Verzerrung der Ergebnisse kommen, sollte es durch diese „Störvariable“ dazu kommen, dass die intendierte Nutzung von Schüler*innen nicht zur tatsächlichen Nutzung passt. Dies soll durch die durchzuführenden Interviews in der Hauptstudie behoben werden.

Zuletzt ist zu erwähnen, dass die Pilotierungsstudie aufgezeigt hat, dass das Erklärvideotagebuch einer geringfügigen Überarbeitung bedarf, um das Ausfüllen der Schüler*innen zu erleichtern, insofern diese regelmäßig keine Videos schauen. Außerdem ist das primäre Merkmal der Selbstbestimmung auf die grundlegenden Theorien der Selbstbestimmung zurückzuführen. In der aktuellen Version sind nur die von Wolf et al. (2021) gefundenen Gründe für die Videonutzung aufgeführt, deren Einteilung in selbst- und fremdbestimmt sinnvoll ist, aber ohne theoretische Fundierung vorliegt.

5.2 Weiterer Forschungsplan

Nach der ersten Pilotierung am Ende des Schuljahres 2022/23 ist eine weitere Pilotierung im Rahmen einer universitären Veranstaltung im Wintersemester 2023/24 geplant, in der auch die Begleitinterviews nach einer Auswertung der Er-

klärvideotagebücher durchgeführt werden. Die Hauptuntersuchung ist für das darauf folgende Wintersemester 2024/25 angedacht und soll zu mehreren Zeitpunkten durchgeführt werden, um ein breites Bild der Videonutzung zu erheben.

Literatur:

- Bednorz, D., & Bruhn, S. (2021). Mehr als nur erklären – eine Bestandsanalyse des Angebots an mathematischen YouTube-Videos. In *GDM-Mitteilungen 110* (S. 10-17)
- Buchholtz, N. (2021). Voraussetzungen und Qualitätskriterien von Mixed-Methods-Studien in der mathematikdidaktischen Forschung. *Journal für Mathematik-Didaktik* 42 (219-242)
- Drijvers, P., Thurm, D., Vandervieren, E., Klinger, M., Moons, F., van der Ree, H., Mol, A., Barzel, B., & Doorman, M. (2021). Distance mathematics teaching in Flanders, Germany and the Netherlands during COVID-19 lockdown. In *Educational Studies in Mathematics* 108 (35-64)
- Ebner, M., & Schön, S. (2017). Lern- und Lehrvideos: Gestaltung, Produktion, Einsatz. Online verfügbar [Zugriff: 13.10.2023]: https://www.researchgate.net/publication/320921379_Lern-_und_Lehrvideos_Gestaltung_Produktion_Einsatz/stats
- Fey, C.-C. (2021): Erklärvideos – eine Einführung zu Forschungsstand, Verbreitung, Herausforderungen. In Matthes, E., Siegel, S. & Heiland, T. (Hrsg.): *Lehrvideos – das Bildungsmedium der Zukunft?* Julius Klinkhardt
- Findeisen, S., Horn, S., & Seifried, J. (2019). Lernen durch Videos – Empirische Befunde zur Gestaltung von Erklärvideos. In *MedienPädagogik, (Oktober)* (16–36). <https://doi.org/10.21240/mpaed/00/2019.10.01.X>
- Fuchs, T. (2018). Praktische Erprobung des Marquardt-Beurteilungsrasters für Mathematik-Erklärvideos; Universität Wien (Diplomarbeit)
- Guo, P. J., Kim, J., & Rubin, R. (2014). How video production affects student engagement: an empirical study of MOOC videos. In *Proceedings of the first ACM conference on Learning @ scale conference (L@S '14)*. Association for Computing Machinery, (41–50). <https://doi.org/10.1145/2556325.2566239>
- Kerres, M. (2018). Mediendidaktik – Konzeption und Entwicklung digitaler Lernangebote; de Gruyter (5. Auflage)
- Kuckartz, U. (2014). Mixed Methods – Methodologie, Forschungsdesigns und Analyseverfahren; Springer Link
- Kulgemeyer, C. (2018). Wie gut erklären Erklärvideos? Ein Bewertungs-Leitfaden. In *Computer + Unterricht* 109 (8-11)
- Kulgemeyer, C. (2019). Qualitätskriterien zur Gestaltung naturwissenschaftlicher Erklärvideos. In Maurer, C. (Hrsg.), *Naturwissenschaftliche Bildung als Grundlage für berufliche und gesellschaftliche Teilhabe. Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik, Jahrestagung in Kiel 2018* (285-288)

- Marquardt, K. (2016). Beurteilungsraster für Mathematik-Erklärvideos: Chancen, Grenzen und Durchführung einer Operationalisierung mittels Resultaten aus der Schulbuchforschung; Universität Wien (Diplomarbeit)
- Mayer, R. (2021). Cognitive Theory of Multimedia Learning. In R. Mayer & L. Fiorella (Hrsg.), *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning. Cambridge Handbooks in Psychology* (57-72). Cambridge University Press. Doi:10.1017/9781108894333.008
- Mayring, P. (2015). Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken; Beltz (12. Auflage)
- Paivio, A. (2006). Dual Coding Theory and Education. Draft chapter for the conference „Pathways to Literacy Achievement for High Poverty Children“ (29.09.-01.10.2006)
- Paivio, A. (1990). *Mental Representations: A dual coding approach*, Oxford Psychology Press. <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780195066661.003.0004>
- Prediger, S. (2009). Inhaltliches Denken vor Kalkül – Ein didaktisches Prinzip zur Vorbeugung und Förderung bei Rechenschwierigkeiten. In Fritz, A. & Schmidt, S. (Hrsg.): *Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden* (213-234)
- Rat für Kulturelle Bildung e.V. [RkB] (2022). Jugend/YouTube/Kulturelle Bildung. Horizont 2019. GESIS. ZA6275 Datenfile Version 1.0.0, <https://doi.org/10.4232/1.13961>.
- Reich, K. (2014). Bausteine für eine inklusive Schule; Beltz (2014)
- Rezat, S. (2009). Das Mathematikbuch als Instrument des Schülers. Vieweg+Teubner. <https://doi.org/10.1007/978-3-8348-9628-5>
- Schweiger, W. (2007). Theorien der Mediennutzung – eine Einführung. VS-Verlag für Sozialwissenschaften
- Sweller, J. (2019). Cognitive Load Theory. In Tindall-Ford, S., Agostinho, S., & Sweller, J.. *Advances in Cognitive Load Theory. Rethinking Teaching* (1-12)
- Tulodziecki, G. (1997). Medien in Erziehung und Bildung. Grundlagen und Beispiele einer handlungs- und entwicklungsorientierten Medienpädagogik; Klinkhardt (3. Auflage)
- Tulodziecki, G., & Herzig, B. (2004). Handbuch Medienpädagogik, Band 2: Mediendidaktik. Medien in Lehr- und Lernprozessen; Klett-Cotta
- Wetzel, S. (2021). Mathematik lernen mit Hilfe von Videos. Analyse von didaktischem Aufbau und Nutzung von mathematischen Lernvideos außerhalb der Schule; WTM-Verlag (Masterarbeit)
- Wolf, K. (2015). Video-Tutorials und Erklärvideos als Gegenstand, Methode und Ziel der Medien- und Filmbildung. In Hartung, A., Ballhausen, T., Trültzsch-Wijnen, C., Barberi, A., & Kaiser-Müller, K., *Filmbildung im Wandel* (121-131), New Academic Press
- Wolf, K. D., Cwielong, I. A., Kommer, S., & Klieme, K. E. (2021). Leistungsoptimierung von Schülerinnen und Schülern durch schulbezogene Erklärvideonutzung auf YouTube. Entschulungsstrategie oder Selbsthilfe? In *MedienPädagogik 42 (Optimierung)* (380-408). <https://doi.org/10.21240/mpaed/42/2021.12.31.X>
- Wolf, K. D., & Kulgemeyer, C. (2016). Lernen mit Videos? Erklärvideos im Physikunterricht. In *Unterricht Physik 152* (36-41)

- Zander, S., Behrens, A., & Mehlhorn, S. (2020). Erklärvideos als Format des E-Learnings. In Niegemann, H., & Weinberger, A. (Hrsg.) *Handbuch Bildungstechnologie*. Springer, https://doi.org/10.1007/978-3-662-54368-9_21
- Zupancic, B. & Horz, H. (2002). Lecture Recording and its Use in a Traditional University Course; conference paper in ACM SIGCSE Bulletin

„Ich hab wieder gezählt“ – Eine Fallstudie zur Untersuchung der Zähl- und Bündelungsstrategien einer Grundschülerin mit Rechenschwierigkeiten

In diesem Beitrag werden die Zähl- und Bündelungsstrategien einer Schülerin mit Rechenschwierigkeiten bei der Anzahlerfassung einer Punktemenge untersucht. Es stellt sich heraus, dass sie auch bei kleinen Mengen die Anzahl häufig zählend ermittelt. Da die Schülerin im Rahmen der „Diagnose-Sprechstunde“ über einen längeren Zeitraum begleitet wird, besteht die Möglichkeit, Entwicklungen in diesem Bereich (u. a. auch mit Hilfe der Eye-Tracking-Technologie) zu beschreiben.

1. Einleitung und Motivation

Im Rahmen dieses Beitrages untersuchen wir die Strategien einer Grundschülerin mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen (Gaidoschik et al., 2021) bei der Anzahlerfassung von Punkten in strukturierten und unstrukturierten Punktemustern. Da es sich in diesem Fall um eine Schülerin handelt, die häufig zählend rechnet und auch in weiteren Situationen auf Zählstrategien zurückgreift, möchten wir insbesondere die Zähl- und Bündelungsstrategien der Schülerin näher betrachten. Dazu gehen wir der folgenden Forschungsfrage nach:

Welche Zähl- und Bündelungsstrategien nutzt die Grundschülerin unserer Studie zur Bestimmung von Anzahlen in strukturierten sowie unstrukturierten Punktemustern?

Um die Forschungsfrage zu beantworten, verwenden wir Daten, die im Rahmen des Projektes „Diagnose-Sprechstunde bei besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen“ (kurz: Diagnose-Sprechstunde) erhoben wurden. Ziel des Projektes ist es, Schülerinnen und Schüler mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen über einen längeren Zeitraum gezielt und ortsnahe zu unterstützen. Dazu werden Diagnoseeinheiten, sowie entsprechende Interventionseinheiten mit den Schülerinnen und Schülern durchgeführt (Knöppel & Pielsticker, 2023).

2. Theoretischer Hintergrund

2.1 Strategien bei der Anzahlerfassung von strukturierten und unstrukturierten Mengen

„Das Zählen ist für Kinder der Einstieg in die Welt der Zahlen: Sie lernen Zahlen kennen, indem sie diese beim Zählen gebrauchen“ (Gaidoschik, 2021, S. 14). Dabei spielt das Zählen unter anderem zur Ermittlung einer Anzahl von (un-)strukturierten Objekten eine Rolle. Im Kernlehrplan für das Fach Mathematik in der

Grundschule in Nordrhein-Westfalen (NRW) werden Vorläuferfähigkeiten aufgeführt, welche Schülerinnen und Schüler beim Eintritt in die Schule bereits erworben haben sollten. „Diese Vorläuferfähigkeiten werden in der Schule aufgenommen und individuell weiterentwickelt“ (Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2021, S. 81). Dazu zählt unter anderem, dass Schülerinnen und Schüler „Anzahlen bis 4 simultan erfassen, unstrukturierte Anzahlen durch Abzählen ermitteln“ und „die Zahlenwortreihe bis 10 vorwärts aufsagen, den Richtungsbegriff rückwärts erkennen“ (ebd., S. 81) können.

„Je unübersichtlicher, ungeordneter, größer eine Menge, umso entscheidender wird es, dass Kinder Zählstrategien entwickeln“ (Gaidoschik, 2021, S. 20), um die Anzahl der Objekte zu bestimmen. Dabei ist es wichtig, dass sie diese Strategien „flexibel, je nach Aufgabe“ (ebd., S. 21) anwenden können. Beispielhafte Strategien für das Abzählen von beweglichen Objekten sind z. B. das zur Seite legen von Objekten, die bereits gezählt wurden. Bei unbeweglichen Objekten eignet sich „ein geordnetes Vorgehen [...] (Reihe für Reihe, Spalte für Spalte, von außen nach innen ...)“ (ebd., S. 21). Auf Abbildungen oder Bildern lassen sich bereits gezählte Objekte ggf. markieren.

Neben der Entwicklung von Zählstrategien spielt zur Anzahlerfassung von Objekten in größeren Mengen auch die Entwicklung der Fähigkeit zur „Strukturierung und Zerlegung“ (Lorenz, 2012, S. 155) der Mengen eine wichtige Rolle. Im Rahmen dieses Beitrages fassen wir diese unter dem Begriff ‚Bündelungsstrategien‘ zusammen. Das Erkennen und Ausnutzen von Strukturen leistet einen wichtigen Beitrag zum „erfolgreiche[n] Rechnen“ (Scherer, 2012, S. 22). Dementsprechend ist es „mit Blick auf die späteren Zahlenraumerweiterungen [...] notwendig, den Kindern bei Übungen zur Anzahlerfassung das Ausnutzen effektiver Strukturen zu ermöglichen und sie schon bei kleineren Anzahlen *bewusst* dazu anzuhalten“ (ebd., S. 22). In der Regel können Mengen mit bis zu fünf Objekten simultan erfasst werden¹⁷. Dies bedeutet, dass „eine Anzahl von Objekten ‚auf einen Blick‘ [erfasst werden kann], ohne zu zählen“ (Kaufmann & Wessolowski, 2021, S. 61). Bei strukturierten Darstellungen (z. B. mit einer Fünferstruktur) ist eine quasi-simultane Erfassung größerer Anzahlen möglich (Scherer, 2012, S. 22). Insbesondere die Strategie der Simultanerfassung bzw. der quasi-simultanen Anzahlerfassung spielen „für das Verständnis von strukturierten Arbeitsmitteln (z. B. Zwanziger-Rechenrahmen, Zwanziger-Tafel und -Feld [...]) und für die Entwicklung von Rechenstrategien aus Handlungen an ihnen“ (Schipper, 2009, S. 83) eine wichtige Rolle, damit Schülerinnen und Schüler im Umgang mit den strukturierten Arbeitsmitteln nicht „immer wieder auf zählende Vorgehensweisen angewiesen“ (ebd., S. 83) sind.

¹⁷ Bei Erwachsenen liegt die Anzahl, die simultan erfasst werden kann, bei maximal sechs Objekten (± 1), Kinder können in der Regel drei bis vier Objekte simultan erfassen. Bei Kindern mit Lernschwierigkeiten kann die simultan erfassbare Anzahl an Objekten noch geringer sein (Scherer, 2012, S. 22).

Im Folgenden werden in Anlehnung an Scherer (2012) Strategien zur Anzahlerfassung von Objekten, in unserem Fall Punkte in strukturierten und unstrukturierten Punktemustern, zusammenfassend dargestellt (S. 29f.). Dazu zählen die Strategien der Simultanerfassung, das strukturierte Zählen (wie z. B. das Zählen in Schritten oder das Zählen bzw. Addieren von Bündeln¹⁸, wie „immer drei“ oder „drei plus drei sind sechs“ (ebd., S. 29)), das einzelne Abzählen oder „Alleszählen“ (Schipper, 2009, S. 103) sowie das Einprägen von Bildern. Diese sind in Abbildung 1 zusammenfassend dargestellt.

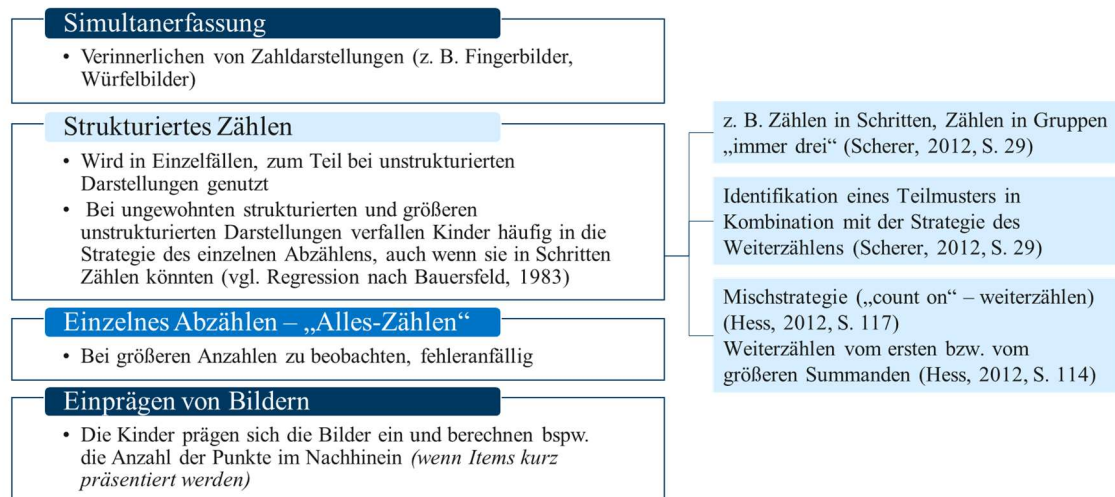


Abbildung 1: Strategien im Zusammenhang mit der Anzahlerfassung von Punktemengen

Um Strategien und entsprechende Vorgehensweisen bei der Anzahlerfassung sowie Fähigkeiten zur quasi-simultanen Anzahlerfassung von Schülerinnen und Schülern zu diagnostizieren und zu beschreiben, wurden von verschiedenen Autorinnen und Autoren entsprechende Diagnoseaufgaben entwickelt, die in Diagnoseleitfäden sowie in (informelle) Diagnoseverfahren eingebettet sind. In Tabelle 1 sind einige Beispielaufgaben aufgeführt, die im Rahmen der Diagnosesprechstunde eingesetzt werden.

	Beispielaufgaben zur Anzahlerfassung in Diagnoseleitfäden
Fingerbild-Karten	„Ich zeige dir die Karte und du sagst schnell, wie viele Finger du siehst.“ (Wartha et al., 2019, S. 17)
Strukturierte und unstrukturierte Punktemuster	„Wie viele Punkte siehst du jetzt?“ „Die Präsentationszeit der einzelnen Darstellungen wird möglichst kurz gehalten, kann aber dennoch variabel gestaltet werden“ (Scherer, 2012, S. 24) (<i>in der Regel 1-5 Sekunden</i>)

¹⁸ Um Anzahlen von Punkten strukturiert z. B. in Gruppen oder in Schritten zu zählen, ist es unter anderem notwendig, die Gesamtmenge der Punkte in Teilmengen zu zerlegen bzw. zu bündeln.

Rechenschiffchen/ Zwanzigerfeld	„Ich zeige dir nun solche Karten. Hier sind Rechenschiffchen gezeichnet. Ich zeige sie dir nur ganz kurz. Versuche zu erkennen, wie viele Steine ¹⁹ darin liegen (Präsentation der Darstellung max. 2 Sekunden)“ (Kaufmann & Wessolowski, 2021, S. 167)

Tabelle 1: Beispielaufgaben zur Diagnostik der Fähigkeiten im Bereich der quasi-simultanen Anzahlerfassung

Im Rahmen dieses Beitrages werden im Sinne der Forschungsfrage insbesondere die Diagnoseaufgaben zu strukturierten und unstrukturierten Punktemustern in den Blick genommen.

2.2 Subjektive Erfahrungsbereiche

Um die Zähl- und Bündelungsstrategien einer Schülerin zu beschreiben und diese entsprechend einzuordnen, verwenden wir im Rahmen dieses Beitrages das Konzept der subjektiven Erfahrungsbereiche (kurz: SEB) nach Heinrich Bauersfeld (1983). Das Konzept der SEB beschreibt, dass Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht häufig so handeln, „als seien ihr verfügbares Wissen, ihre Handlungsmöglichkeiten, ihr Sprachverstehen, ihre Sinnzuschreibungen usw. in getrennte Bereiche gegliedert, zwischen denen es keinen selbstverständlichen Austausch gibt“ (S. 1). Diese werden als subjektive Erfahrungsbereiche bezeichnet.

Wissen, so wie bspw. Handlungsmöglichkeiten werden in spezifischen Kontexten erworben und sind demnach kontextgebunden und bereichsspezifisch (Bauersfeld, 1983, S. 2; Rathgeb-Schnierer et al., 2023, S. 38). Für den Mathematikunterricht bedeutet dies unter anderem, dass jede Veranschaulichung und jedes Arbeitsmittel einen (neuen) Kontext darstellt und dementsprechend „zunächst einmal einen eigenen Subjektiven Erfahrungsbereich aufruft“ (Rathgeb-Schnierer et al., 2023, S. 40), der nicht unmittelbar mit (bekannten) mathematischen Strukturen und Symbolen verbunden ist. „Ein In-Beziehung-Setzen“ der spezifischen Elemente eines SEBs (z. B. Sprache und Handlungsmuster) wird erst über einen neu gebildeten, „übergeordneten“ SEB möglich (Bauersfeld, 1983, S. 7; Stoffels, 2020, S. 95). Der Konstruktionsprozess eines solchen SEBs erfordert „eigene konstruktive Tätigkeiten“ (Bauersfeld, 1983, S. 7) durch die Schülerinnen und Schüler. Lernen lässt sich im Sinne dieses Konzeptes allgemein „als Erwerb neuer SEB [...] beschreiben“ (Bauersfeld, 1983, S. 2; Rathgeb-Schnierer et al., 2023, S. 40).

SEB „werden konkurrierend aktiviert und ermöglichen mit der Entscheidung (unter gleichzeitiger Unterdrückung der Konkurrenten) die subjektive Wahrnehmung der gegebenen aktuellen Situation“ (Bauersfeld, 1983, S. 2). Während ein SEB z. B. aufgrund mangelnder Aktivierung mit der Zeit vergessen werden kann, kann „in Verbindung mit emotional besonders besetzten Situationen“ (Bauersfeld, 1983, S. 43) hingegen eine Erinnerung an frühere Entwicklungsstadien bleiben. Somit können „bestimmte ältere SEB’e recht robuste Handlungsorientierungen für

¹⁹ Im Rahmen des Beitrags wird der Begriff „Plättchen“ verwendet.

das Individuum stellen“ (ebd., S. 43). Im Mathematikunterricht können unter anderem (fachliche) Unsicherheiten, Situationen, in denen mathematische Zusammenhänge neu erlernt werden, sowie Situationen mit Handlungsdruck dazu führen, dass Schülerinnen und Schüler in frühere SEB bzw. „frühere Entwicklungsstadien“ (Bauersfeld, 1983, S. 43) zurückfallen, auch wenn z. B. die entsprechenden (Handlungs- und Lösungs-)Strategien nicht (mehr) angemessen sind (ebd., S. 44). Dies wird als *Regression* bezeichnet (ebd., S. 43).

3. Fallstudie mit einer Grundschülerin

Im vorliegenden Beitrag wird das Fallbeispiel der Grundschülerin Lara (Name geändert) näher betrachtet (Stake, 1995; Yin, 2018). Dazu wird in Kapitel 3.1 zunächst der Fall beschrieben und ein Einblick in bisherige Ergebnisse aus zuvor durchgeführten Diagnoseeinheiten gegeben, die für die Fallstudie zur Anzählerfassung von Punkten von Bedeutung sind. In Kapitel 3.2 und 3.3 wird das Vorgehen bei der Datenerhebung vorgestellt. Zum Zeitpunkt der Erhebungen ist Lara zehn Jahre alt und besucht die vierte Klasse einer Grundschule in NRW. Im Rahmen des Projektes *Diagnose-Sprechstunde* wird Lara seit Ende des Jahres 2022 wöchentlich begleitet²⁰.

3.1 Beschreibung des Falls

In den ersten Diagnoseeinheiten wurde unter anderem ein informelles Diagnoseverfahren in Anlehnung an Kaufmann und Wessolowski (2021) mit der Schülerin durchgeführt. Im Rahmen einer kompetenz- und prozessorientierten Diagnostik ging es darum, die Schwierigkeiten und Kompetenzen der Schülerin zu identifizieren. Dabei hat sich unter anderem herausgestellt, dass Lara insbesondere bei Aufgaben mit einem Zehnerübergang zählend rechnet. Als Hilfsmittel verwendet sie dabei ihre Finger. Ein weiterer Aspekt, der im Rahmen der Diagnoseeinheiten zu beobachten ist, ist, dass die Schülerin das Zählen als Überprüfungsstrategie anwendet. Wenn sie sich bspw. unsicher ist, wie viele Objekte vor ihr liegen oder auf einem Bild zu sehen sind, zählt sie diese einzeln ab. Dabei ist unter anderem ein Nicken mit dem Kopf zu beobachten (Gaidoschik, 2020, S. 34). Beim Erkennen und Ausnutzen von Strukturen im Rechenschiffchen bzw. im Zwanzigerfeld hat die Schülerin Schwierigkeiten. In einer Diagnoseeinheit Ende Oktober 2022 thematisiert die Interviewerin zunächst die Struktur des auf einer Karte abgedruckten Rechenschiffchens, indem sie fragt, wie viele Plättchen in ein Schiffchen passen. Lara meint, dass es fünf Plättchen seien. Auf Nachfrage der Interviewerin, wie viele Plättchen in zwei Schiffchen passen, zählt Lara die Plättchen einzeln ab:

Interviewerin: „Wie hast du das gemacht, wie hast du das rausgefunden“, Lara: „mhh – (lächelt) gezählt.“ (Einheit Ende Oktober 2022)

²⁰ In der Regel finden die Sprechstunden wöchentlich statt, in den Schulferien kommt es ggf. zu Ausfällen.

Auf Nachfrage der Interviewerin, wie viele Plättchen in drei Schiffchen passen, ist erneut ein Kopfnicken zu beobachten. Auf anschließende Nachfrage zur Vorgehensweise zeigt Lara, dass sie alle Plättchen nacheinander gezählt hat, um die Anzahl der Plättchen zu ermitteln. In einem letzten Schritt fragt die Interviewerin, wie viele „in dem ganzen drin“ seien. Dabei ist ebenfalls ein Kopfnicken zu beobachten, jedoch antwortet Lara etwas schneller als zuvor. Auf Nachfrage erklärt sie, dass sie „hier einfach weiter mit 16 gemacht“ habe und ergänzt: „dann muss ich nicht immer, von vorne anfangen“. Die Anzahl der Plättchen in den abgedruckten Rechenschiffchen (Kaufmann & Wessolowski, 2021, siehe Tabelle 1) werden in den drei Fällen, die besprochen werden, nicht korrekt erkannt und im letzten Fall auf Nachfragen der Interviewerin von der Schülerin korrigiert (Einheit Ende Oktober 2022). In der ersten Situation in Abbildung 2 (links), meint Lara, dass es „sechs“ Plättchen seien, bei der zweiten Darstellung seien es „achtzehn“ (Abbildung 2, rechts).

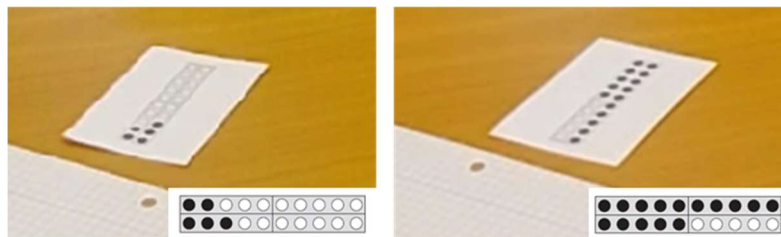


Abbildung 2: Abgedruckte Rechenschiffchen (entnommen aus Kaufmann & Wessolowski, 2021, Material zum informellen Verfahren B (Zahlenraum bis 100), M2)

Zudem lässt sich unter anderem im Umgang mit den Einerwürfeln des Dienes-Materials feststellen, dass Lara Schwierigkeiten beim Bündeln bzw. beim Ausnutzen von Strukturen der Bündel hat. Die Interviewerin legt eine Anzahl an Würfeln (25) auf den Tisch und fragt Lara, was sie machen würde, um zu bestimmen, wie viele Würfel es sind. Daraufhin bündelt Lara diese in „Gruppen“ mit jeweils zwei Würfeln und in eine Gruppe mit drei Würfeln. Im Anschluss zählt sie diese jedoch weiterhin durch Antippen der Würfel einzeln ab (Einheit Ende Oktober 2022).

In Anknüpfung an die Beobachtungen und diagnostischen Gespräche in den ersten Diagnoseeinheiten, werden weitere Diagnoseeinheiten zur Anzahlerfassung entwickelt und mit der Schülerin durchgeführt. Im Zeitraum von Ende Januar 2023 bis April 2023 werden zudem entsprechende Interventionseinheiten durchgeführt. Dazu wird unter anderem das Rechenschiffchen eingeführt und das Erfassen und Ausnutzen der Strukturen zur Anzahlerfassung von Plättchen in den Schiffchen gefördert (Kaufmann & Wessolowski, 2021, S. 61ff.).

In Abbildung 3 ist eine Übersicht über die Einheiten aufgeführt, die unter anderem zur Diagnostik der Zähl- und Bündelungsstrategien der Schülerin beitragen.

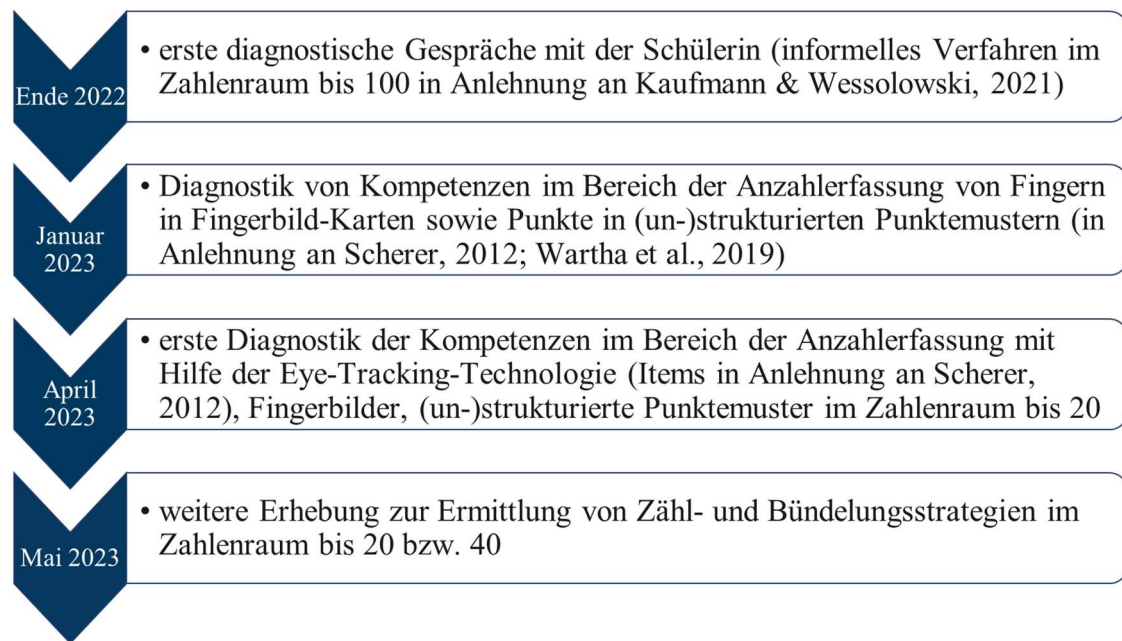


Abbildung 3: Datenerhebungen zu Zähl- und Bündelungsstrategien der Grundschülerin

Zur Diagnostik der Zähl- und Bündelungsstrategien wird unter anderem die Eye-Tracking-Technologie als Instrument für die Erhebung von Blickbewegungen an einem strukturierten bzw. unstrukturierten Punktemuster hinzugezogen (Abbildung 3). Im Rahmen dieses Beitrages liegt der Schwerpunkt jedoch auf der Beschreibung und Kategorisierung der Zähl- und Bündelungsstrategien der Schülerin in einer der ersten Einheiten im Januar 2023 (siehe Kapitel 3.3). Weitere Untersuchungsergebnisse zu der hier betrachteten Schülerin finden sich auch in Knöppel und Pielsticker (2024, erscheint).

3.2 Methoden der Datenerhebung im Rahmen der Fallstudie

Im Kontext der Diagnose- und Interventionseinheiten mit der Schülerin Lara werden insbesondere Leitfadeninterviews durchgeführt. Die Interviewerinnen orientieren sich dabei unter anderem an informellen Diagnoseverfahren (Kaufmann & Wessolowski, 2021), sowie weiteren Diagnose- und Fördermaterialien – z. B. zu Zähl- und Bündelungsstrategien (Gaidoschik, 2021; Scherer, 2012). In Abbildung 4 sind die Methoden der Datenerhebung im Rahmen der Fallstudie dargestellt.

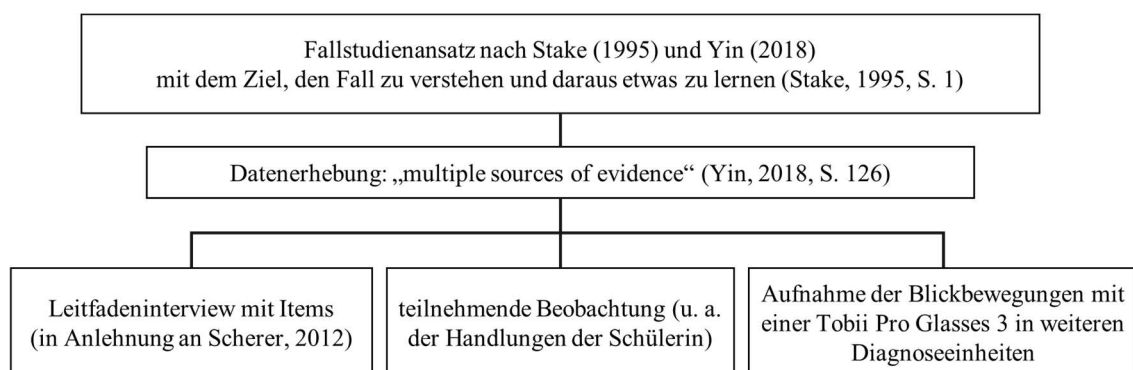


Abbildung 4: Datenerhebung im Rahmen der Fallstudie

Die Interviewsituationen mit der Schülerin werden videographiert, sodass diese im Anschluss an die Einheiten erneut angeschaut und analysiert werden können. Schlüsselszenen zu den Zähl- und Bündelungsstrategien der Schülerin werden für die Analyse ausgewählt und in Anlehnung an Meyer (2010) transkribiert (Pielsticker, 2020).

3.3 Vorgehen bei der Datenerhebung in den Interviewsituationen

In einer Einheit im Januar 2023, wird in Anlehnung an Wartha et al. (2019) und Scherer (2012) ein Interview mit Fingerbild-Karten sowie strukturierten und unstrukturierten Punktemustern im Zahlenraum bis Zehn durchgeführt. Da der Fokus darauf liegt, die Zähl- und Bündelungsstrategien der Schülerin zu identifizieren und diese zu beschreiben, werden die Items nicht für eine kurze Zeit präsentiert, sondern so lange, bis die Schülerin die Anzahl der Punkte bestimmt hat und ggf. an der ein oder anderen Stelle auf Nachfrage erläutert hat, wie sie dabei vorgegangen ist (Scherer, 2012, S. 21). An dieser Stelle muss berücksichtigt werden, dass die lange Präsentationszeit unter anderem zählende Strategien begünstigen kann (ebd., S. 21).

Zunächst werden der Schülerin die Fingerbilder und anschließend einige Punktemuster in einer zufälligen Reihenfolge präsentiert. Einige Beispiele der vorgelegten Darstellungen sowie eine entsprechende Kategorisierung werden in Tabelle 2 vorgestellt.

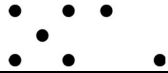
Kategorie	Beschreibung	Beispiel
Fingerbilder	Fingerbild mit zwei Händen	
Würfelbilder	ein Würfelbild	
	zwei Würfelbilder nebeneinander	
Kompakte und lineare Darstellung	linear, einzeilig, ggf. mit Fünferstruktur,	
	linear, zweizeilig, ggf. auch mit Fünferstruktur	
Weitere Muster	weitere, strukturierte Muster	
Unstrukturierte Muster	beliebige Anordnung der Punkte	

Tabelle 2: Kategorien der strukturierten und unstrukturierten Punktemuster (in Anlehnung an Scherer, 2012; Wartha et al., 2019)

4. Auswertung und Analyse der Daten

Die Anzahl ausgestreckter Finger in einem Fingerbild mit zwei Händen kann die Schülerin schnell und korrekt benennen. Auf Nachfrage der Interviewerin, wie sie

dies so schnell erkennen kann, nimmt Lara unter anderem Bezug auf die Struktur der Hände. An dem Beispiel eines Fingerbildes mit sieben ausgestreckten Fingern zeigt sie zur Erklärung ihre eigene Hand, an der alle Finger ausgestreckt sind und meint „weil, das hier ist die fünf, mit allen fünf – .. mit allen fünf Fingern an der Hand (*zeigt mit der anderen Hand zwei Finger*) und, wenn man zwei zeigt, ist dann, die zwei noch. [...] und fünf plus zwei sind sieben“. Da sie dabei scheinbar keine Schwierigkeiten hat, liegt der Fokus im Rahmen dieses Beitrages auf den strukturierten und unstrukturierten Punktemustern. Im Sinne der Forschungsfrage wird für die Identifikation der Zähl- und Bündelungsstrategien der Schülerin das Vorgehen bei der Anzahlerfassung der strukturierten und unstrukturierten Punkte in den Blick genommen.

Im Folgenden werden Szenen aus der Diagnoseeinheit im Januar 2023 vorgestellt und vor dem theoretischen Hintergrund analysiert. Dabei werden der Schülerin strukturierte sowie unstrukturierte Punktemuster in Anlehnung an Scherer (2012) in einer zufälligen Reihenfolge vorgelegt. Die Interviewerin meint, dass Lara ihr sagen darf, wie viele Punkte sie sieht. Die Handlungen bzw. Bewegungen und Erklärungen der Schülerin werden beobachtet und fließen entsprechend in die Analyse mit ein. An einigen Stellen fragt die Interviewerin neben den Beobachtungen noch einmal nach, wie Lara bei der Ermittlung der Punkteanzahl vorgegangen ist.

4.1 Qualitative Inhaltsanalyse

Um die Zähl- und Bündelungsstrategien der Schülerin zu beschreiben und diese zu analysieren, betrachten wir entsprechende Transkriptausschnitte. Im Sinne der qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2015), ordnen wir die Aussagen sowie die beobachteten Handlungen der Schülerin den in der Literatur identifizierten Kategorien zu (Abbildung 1). Somit handelt es sich im Sinne Mayrings um eine strukturierende Inhaltsanalyse. Die Kodiereinheit umfasst in diesem Fall sprachliche Ausdrücke, sowie Handlungen (z. B. nickende Kopfbewegungen), die in den Transkriptausschnitten beschrieben werden. Die Kontexteinheit stellen die jeweiligen Items mit den Antworten und ggf. den Erklärungen der Schülerin dar, die auf Nachfrage der Interviewerin folgen. Die Auswertungseinheit umfasst die Items, die im Rahmen dieser Einheit präsentiert werden (Mayring, 2015, S. 61).

Im Folgenden werden in Anlehnung an die Kategorien in Abbildung 1 einige Ankerbeispiele aus den Daten vorgestellt und vor dem theoretischen Hintergrund analysiert. Die Kategorie „Einprägen von Bildern“ (Abbildung 1) wird dabei nicht thematisiert, da die Punktebilder nicht nur kurz präsentiert werden, sondern so lange vor der Schülerin auf dem Tisch liegen, bis sie eine Anzahl nennt.

Simultanerfassung und quasi-simultane Anzahlerfassung

Im Rahmen der Datenerhebung stellt sich heraus, dass die Schülerin Anzahlen bis vier in der Regel simultan erfassen kann. Bei einem Würfelbild mit vier Punkten, sowie z. B. einer zweizeiligen, linearen Darstellung mit drei Punkten benötigt die

Schülerin wenig Zeit, um die korrekte Anzahl zu benennen (Abbildung 5) Ein Nicken des Kopfes ist dabei nicht zu erkennen.

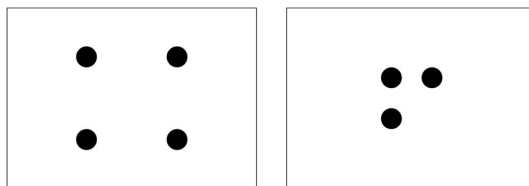


Abbildung 5: Beispielhafte Punktemuster, die simultan erfasst werden können (in Anlehnung an Scherer, 2012)

In einem Fall, in dem eine zweizeilige, lineare Darstellung mit vier Punkten präsentiert wird, wobei in der oberen Zeile drei, und in der unteren Zeile ein Punkt zu sehen sind, geht die Schülerin ihren Aussagen nach zählend vor.

Des Weiteren werden der Schülerin strukturierte Punktemuster in Form von Würfelbildern im Zahlenraum bis Zehn vorgelegt (Tabelle 2; Transkript 1).

1 [08:27] L: (*ca. 1 Sek.*) sieben.



2 [08:29] I: das ging jetzt aber schnell.

3 [08:31] L: (*lacht*) ja. (*tippt auf die linke Seite des Blattes*) weil hier sind zwei (*tippt auf die rechte Seite*) und hier sind fünf und fünf plus zwei sind sieben.

Transkript 1: Quasi-Simultanerfassung in einem strukturierten Punktemuster (Würfelbilder)

(L: Lara, I: Interviewerin)

Da die Schülerin schnell antwortet (Transkript 1, Turn 1) und kein Kopfnicken zu beobachten ist, hat die Schülerin die Anzahl in diesem Fall vermutlich quasi-simultan erfasst. Auch wenn sie in der gesamten Einheit nicht explizit erwähnt, dass sie dieses und weitere Bilder an Würfelbilder erinnern, lässt sich vermuten, dass sie diese Würfelbilder aus ihrer Erfahrungswelt (z. B. beim Spielen) kennt und sich diese entsprechend eingeprägt hat. Zudem ist in diesem Fall eine ähnliche Struktur wie bei den Fingern zu erkennen (fünf und zwei), was ihr die Ermittlung der Anzahl ggf. erleichtert. In ihrer Erklärung geht sie ähnlich vor, wie es zuvor bei den Fingerbildern zu beobachten war (Transkript 1, Turn 3; siehe Kapitel 4).

Einzelnes Abzählen – „Alles-Zählen“

Eine Vorgehensweise, die bei der Ermittlung von Anzahlen in strukturierten und unstrukturierten Punktemustern zu erkennen ist, ist das einzelne Abzählen der Punkte. In einer vorherigen Situation (zeitlich gesehen vor der in Transkript 2 dargestellten Situation) erklärt Lara, wie sie beim Zählen vorgeht und macht dabei eine nickende Kopfbewegung vor: „Ich hab den Kopf so, auf, auf den Punkten so

bewegt“ (06:06). Diese nickende Bewegung des Kopfes ist auch in der folgenden Interviewsituation zu beobachten (Transkript 2, Turn 1).

1 [07:48] L: *(nickt mit dem Kopf)* ... sechs.



2 [07:53] I: mhm - auch da würde mich interessieren was du gemacht hast.

3 [07:57] L: ich hab wieder gezählt und hab hier angefangen.
(zeigt auf einen der unteren Punkte, auf Nachfrage zeigt sie, durch Antippen der Punkte, dass sie im Uhrzeigersinn weitergezählt hat.)



Transkript 2: Alles-Zählen in einem unstrukturierten Punktemuster

Auf Nachfrage der Interviewerin, wie Lara beim Bestimmen der Anzahl der Punkte vorgegangen ist, bestätigt sich die Vermutung, dass sie die Punkte gezählt hat: „ich hab wieder gezählt und hab hier angefangen“ (Transkript 2, Turn 3). Bei ihrer Erklärung tippt sie nacheinander alle Punkte an, sodass sich vermuten lässt, dass Lara alle Punkte einzeln gezählt hat. In diesem Fall handelt es sich um ein unstrukturiertes Punktemuster mit mehr als vier Punkten²¹. Interessant ist dabei, dass die Schülerin die Punkte nicht bündelt, indem sie z. B. zwei „Dreier“ identifiziert. Sie scheint in dieser Situation den aus ihrer Perspektive sicheren SEB des einzelnen Abzählens zu aktivieren, um eine Anzahl unstrukturierter Punkte zu bestimmen. Dies ist auch in der folgenden Szene zu beobachten (Transkript 3).

1 [09:10] L: *(nickt mit dem Kopf, 4 Sek.)* sieben -



2 [09:15] I: mhm .. wie hast du das gemacht'

3 [09:19] L: *(zeigt auf die drei)* mh ich hab erstmal hier die gezählt *(zeigt auf die vier)* und dann hier die. aber ich hab so - al - aber ich hab von eins angefangen. *(auf Nachfrage zeigt sie zuerst auf den Punkt der „drei“ unten rechts und zählt dann die weiteren Punkte. Anschließend zählt sie im Uhrzeigersinn die Punkte der „vier“ und startet dabei oben links)*



Transkript 3: Alles-Zählen in einem strukturierten Punktemuster (Würfelbilder)

Das Kopfnicken deutet darauf hin, dass Lara die Punkte zählt (Transkript 3, Turn 1). Dies bestätigt sich in ihrer Erklärung, die auf Nachfrage der Interviewerin folgt.

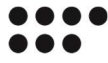
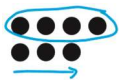
²¹ Dieses Vorgehen ist zuvor auch in einer Situation mit einem unstrukturierten Punktemuster mit fünf Punkten zu beobachten, in der Lara ebenfalls behauptet: „ich hab wieder gezählt“.

Dabei scheint sie insbesondere alle Punkte einzeln zu zählen, was sich durch ihre Aussage: „aber ich hab von eins angefangen“ (Transkript 3, Turn 3) vermuten lässt. Obgleich sie zuvor gezeigt hat, dass sie Würfelbilder (z. B. die „Fünf“ sowie die „Zwei“) quasi-simultan erkennen kann (Transkript 2), scheint sie in dieser Situation nicht auf dieses (Vor-)Wissen zurückzugreifen. Auch hier scheint der SEB des einzelnen Abzählens aktiviert zu werden. Dies kann zum einen daran liegen, dass Lara die Würfelbilder in dieser Kombination (als „Drei“ und „Vier“) nicht erkennt, oder, dass sie im Sinne des SEB-Konzeptes in der Interviewsituation auf die Strategie des einzelnen Abzählens bzw. Alles-Zählens zurückfällt (Bauersfeld, 1983, S. 44; Scherer, 2012, S. 21; Abbildung 1).

Dies ist auch in einer weiteren Situation zu beobachten, in der acht Punkte zu erkennen sind. Diese sind aus Beobachterperspektive in Form von zwei Vierer-Würfelbildern dargestellt. Hier nutzt die Schülerin jedoch das Vorwissen über das Würfelbild mit vier Punkten nicht aus (Abbildung 5), sondern zählt die Punkte von links nach rechts durch, indem sie immer zuerst den oberen und dann den unteren Punkt zählt.

Weiterzählen

In dem folgenden Transkriptausschnitt wird eine Szene dargestellt, die sich zwei Kategorien zuordnen lässt.

1	[05:00]	L:	<i>(nickt mit dem Kopf, 7 Sek.)</i> sieben -	
2	[05:09]	I:	mhm - wie hast du <u>das</u> rausgefunden'	
3	[05:12]	L:	ich musste erstmal <u>zählen</u> weil - manchmal sieht's so aus als wären hier auch <u>fünf</u> (<i>zeigt auf die obere Punktereihe</i>) und -, aber es sind <u>vier</u> und dann hab ich hier weitergezählt, also vier (<i>zeigt auf die obere Reihe, tippt dann nacheinander die Punkte in der unteren Reihe an, beginnt bei dem linken Punkt</i>) fünf sechs sieben.	

Transkript 4: Weiterzählen in einem strukturierten Punktemuster

Zum einen deutet das Kopfnicken sowie die Sprechpause von sieben Sekunden darauf hin, dass die Schülerin alle Punkte einzeln zählt (Transkript 4, Turn 1). Dies bestätigt sich in der Aussage der Schülerin, dass sie zunächst prüfen musste, ob es sich in der oberen Reihe um fünf Punkte handelt (Transkript 4, Turn 3). Vermutlich hat sie nachgezählt („ich musste erstmal zählen“), und ist zu dem Entschluss gekommen, dass es „vier“ sind. Im weiteren Verlauf, verwendet sie von sich aus den Begriff des „Weiterzählens“: „und dann hab ich hier weitergezählt, also vier (*zeigt auf die obere Reihe, tippt dann nacheinander die Punkte in der unteren Reihe an, beginnt bei dem linken Punkt*) fünf sechs sieben“ (Transkript 4, Turn 3). Dabei

zeigt sie zunächst auf die obere Reihe, in der vier Punkte zu sehen sind und zählt anschließend laut weiter. Diese Strategie des Weiterzählens wurde bereits in vorherigen Diagnosesituationen beobachtet (siehe Kapitel 3.1).

Interessant ist an dieser Stelle, dass sie die Anordnung der Punkte, die aus Beobachtersicht zu erkennen ist (z. B. „in der unteren Reihe sind drei Punkte, das ist einer weniger als oben“) nicht nutzt, um die Gesamtanzahl der Punkte, bzw. die Anzahl der Punkte in der oberen Reihe zu bestimmen, ohne diese zu zählen.

Zählen in Gruppen

Eine weitere Strategie der Schülerin lässt sich im Zusammenhang mit einer einzelnen, linearen Darstellung von sechs Punkten beschreiben, bei der eine Fünferstruktur zu erkennen ist (Transkript 5).

- 1 [09:34] L: ... sechs. ● ● ● ● ● ●
- 2 [09:38] I: *(nickt)*
- 3 [09:40] L: ich hab, *(zeigt auf den einen Punkt auf der linken Seite)* hier, erstmal hab ich, eins zwei *(tippt auf die ersten beiden Punkte)* aber dann hab ich mich doch entschieden, dann hab ich gesehen, drei plus drei. sind sechs. [...] *(auf Nachfrage der Interviewerin zeigt sie auf die Gruppen, indem sie mit dem Finger über die ersten drei, und dann über die weiteren drei Punkte fährt)* hier sind drei und hier sind drei.
- 

Transkript 5: Zählen in Gruppen bei einer linearen Darstellung

Hier scheint die Schülerin die lineare Darstellung in einem zweiten Anlauf in zwei Gruppen mit jeweils drei Punkten zu bündeln, die sie im Anschluss entsprechend zusammenrechnen kann (Transkript 5, Turn 3). Dieses Vorgehen ist in einer weiteren Situation zu beobachten, in der immer drei Punkte in drei Reihen dargestellt sind (Abbildung 6). Dabei rechnet die Schülerin zunächst „ $3 + 3 = 6$ “ und anschließend „ $6 + 3 = 9$ “.

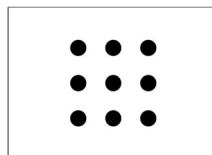


Abbildung 6: Beispielhaftes Punktemuster für die Strategie „strukturiertes Zählen“ (in Anlehnung an Scherer, 2012)

5. Fazit und Diskussion

5.1 Beantwortung der Forschungsfrage

Insgesamt geht aus der betrachteten Diagnoseeinheit hervor, dass die Schülerin Lara bereits einige Zähl- und Bündelungsstrategien bei der Erfassung von Punkteanzahlen in strukturierten und unstrukturierten Punktemustern anwenden kann. Die vorgestellten Ankerbeispiele zeigen, dass die Schülerin Anzahlen simultan bzw. quasi-simultan erfassen kann. Dies ist in der Regel bei Anzahlen bis vier, sowie bei ihr bekannten Würfelbildern zu erkennen, wenn diese eine ähnliche Struktur zu den Fingern aufweisen (Fünfer-Würfelbild). Des Weiteren wendet Lara Verfahren des strukturierten Zählens an. Dabei sind insbesondere das Weiterzählen, sowie das Zählen in Gruppen zu erkennen. Das Zählen in Gruppen wendet Lara bei strukturierten Punktemustern an, die Bündelungseinheit umfasst dabei in zwei Fällen „immer drei“ (Scherer, 2012, S. 29) Punkte.

Insgesamt ist zu beobachten, dass die Schülerin in vielen Fällen auf die Strategie des einzelnen Abzählens der Punkte in den Punktemustern zurückgreift. Dies lässt sich vermutlich damit begründen, dass das Alles-Zählen bzw. einzelne Abzählen der Punkte für die Schülerin eine sichere Vorgehensweise bzw. ein sicheres Handlungsmuster im Sinne des SEB-Konzeptes darstellt (Bauersfeld, 1983; Scherer, 2012). Ein weiterer Grund könnte die Präsentationszeit sein, die in diesem Fall nicht begrenzt wurde (Scherer, 2012, S. 21). Interessant ist dabei, dass die Schülerin in vielen Situationen ihr Vorwissen, z. B. über simultan erfassbare Anzahlen sowie Strukturen kaum verwendet, um die Anzahl an Punkten zu bestimmen. Die Würfelbilder mit „vier und vier“ bzw. „vier und drei“ Punkten werden jeweils einzeln abgezählt (Transkript 3), und auch eine Menge von fünf bzw. sechs Punkten wird nicht strukturiert oder in Gruppen gebündelt, sondern einzeln abgezählt. Dies bestärkt die zu Beginn formulierte Vermutung, dass die Schülerin das „Alles-Zählen“ als Strategie in vielen Situationen anwendet (siehe Kapitel 3.1). Des Weiteren könnte dies darauf hinweisen, dass das (Vor-)Wissen der Schülerin über Bündelungsstrategien und die entsprechenden Strategien des strukturierten Zählens an bestimmte Kontexte (z. B. lineare Darstellungen, oder strukturierte Darstellungen in Dreiergruppen) gebunden ist und es für die Schülerin (noch) nicht möglich ist, dieses Wissen bzw. diese Handlungsmuster auf Situationen mit unstrukturierten Darstellungen zu übertragen, bzw. auch in diesen Situationen anzuwenden (Bauersfeld, 1983; Rathgeb-Schnierer et al., 2023).

Im Rahmen dieser Studie wurde die Reihenfolge der vorgelegten Punktemuster beliebig gewählt. In weiteren Studien könnte darüber hinaus untersucht werden, ob und inwiefern die Reihenfolge und der entsprechende Kontext der vorgelegten Punktemuster das Vorgehen der Schülerin bei der Anzahlerfassung beeinflussen.

5.2 Ausblick

„In vorherigen Studien hatte sich gezeigt, dass Eye-Tracking – insbesondere die Analyse von Blickbewegungsvideos – als ‚hochauflösendes‘ Forschungsinstrument bei der strukturierten Anzahlerfassung großes diagnostisches Potenzial aufwies [...]“ (Schindler & Schindler, 2022, S. 76). So konnten wir aufbauend auf den Daten von Januar 2023, Eye-Tracking auch in dieser Einzelfallstudie als ergänzende Werkzeugmöglichkeit für die Diagnostik und einen aktuellen Lernstand der Schülerin nutzen (Schindler & Lilienthal, 2019) – ein Ausblick auf die in diesem Beitrag dargestellte Datenerhebung.

In Anlehnung an unsere erhobenen Daten zur Anzahlerfassung im April und Mai 2023 wurden in unserer Eye-Tracking-Studie unter anderem weitere strukturierte und unstrukturierte Punktemuster (0-40) erstellt (Scherer, 2012), zudem wurden Fingerbilder (0-20) vorgelegt. Die erhaltenen detaillierten Einblicke in den aktuellen Prozess ermöglichen zusätzlich zur Methode des „Lauten Denkens“ (Schipper, 2009) eine Evaluation der bisherigen Fördermaßnahmen und gleichzeitig eine (Weiter-)Entwicklung gezielter individueller Lerneinheiten für die betrachtete Schülerin. So können wir auf Grundlage der Eye-Tracking-Daten und einer Triangulation mit weiteren Methoden, erste Entwicklungen der Bündelungsstrategien („Dreier“ und „Fünfer“) beobachten. Wir hoffen, dass die längsschnittliche Begleitung der Schülerin Lara dazu beitragen kann, Unterstützungsbedarfe von Schülerinnen und Schülern mit Schwierigkeiten bei Zähl- und Bündelungsstrategien (schnell) zu ermitteln, um angemessene Förderkonzepte bereitzustellen (Schipper, 2005).

Literatur:

- Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In H. Bauersfeld, H. Bussmann, G. Krummheuer, J. H. Lorenz, & J. Voigt (Hrsg.), IDM-Band: Vol. 6. *Lernen und Lehren von Mathematik: Analysen zum Unterrichtshandeln II* (S. 1–56). Aulis Verlag Deubner.
- Gaidoschik, M. (2020). *Rechenschwäche - Dyskalkulie: Eine unterrichtspraktische Einführung für LehrerInnen und Eltern* (11. Aufl.). Persen.
- Gaidoschik, M. (2021). *Rechenschwäche verstehen - Kinder gezielt fördern: Ein Leitfaden für die Unterrichtspraxis* (12. Aufl.). Persen.
- Gaidoschik, M., Moser Opitz, E., Nührenbörger, M., & Rathgeb-Schnierer, E. (2021). Besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen. Special Issue *Der Mitteilungen Der Gesellschaft Für Didaktik Der Mathematik*, 47(111S). <https://ojs.didaktik-der-mathematik.de/index.php/mgdm/issue/view/46>
- Hess, K. (2012). *Kinder brauchen Strategien: Eine frühe Sicht auf mathematisches Verstehen*. Klett Kallmeyer.
- Kaufmann, S., & Wessolowski, S. (2021). *Rechenstörungen. Diagnose und Förderbausteine* (8. Aufl.). Klett Kallmeyer.

- Knöppel, J., & Pielsticker, F. (2023). Projekt Diagnosesprechstunde bei besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen. *Mitteilungen Der Gesellschaft Für Didaktik Der Mathematik*, (115), 29–33.
- Knöppel, J., & Pielsticker, F. (2024, erscheint). Argumentationsprozesse einer Grundschülerin mit Rechenschwierigkeiten – Fallstudie zur Zahlzerlegung mit der App Rechentablett. In M. Platz, S. Ladel, & C. Bierbrauer (Hrsg.), *Förderung von prozessbezogenen Kompetenzen mit digitalen Medien* (Reihe Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien in der Primarstufe; 10). WTM.
- Lilienthal, A. J. & Schindler, M. (2019). Current trends in the use of eye tracking in mathematics education research: A PME survey. In M. Graven, H. Venkat, A. A. Essien, & P. Vale (Hrsg.), *Proceedings of 43rd Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Pretoria, South-Africa: PME. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1904.12581>
- Lorenz, J. H. (2012). *Kinder begreifen Mathematik: Frühe mathematische Bildung und Förderung*. Kohlhammer.
- Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken* (12. Aufl.). Beltz.
- Meyer, M. (2010). Wörter und ihr Gebrauch – Analyse von Begriffsbildungsprozessen im Mathematikunterricht. In G. Kadunz (Hrsg.), *Sprache und Zeichen. Zur Verwendung von Linguistik und Semiotik in der Mathematikdidaktik* (S. 49–82). Franzbecker.
- Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen. (2021). *Lehrpläne für die Primarstufe in Nordrhein-Westfalen* (1. Aufl. 2021). https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/upload/klp_PS/ps_lp_sammelband_2021_08_02.pdf
- Pielsticker, F. (2020). *Mathematische Wissensentwicklungsprozesse von Schülerinnen und Schülern: Fallstudien zu empirisch-orientiertem Mathematikunterricht mit 3D-Druck*. Springer.
- Rathgeb-Schnierer, E., Schuler, S. & Schütte, S. (2023). *Mathematikunterricht in der Grundschule: Lernangebote fachorientiert, kindorientiert und differenziert gestalten*. Springer.
- Scherer, P. (2012). *Produktives Lernen für Kinder mit Lernschwächen: Fördern durch Fordern: Band 1: Zwanzigerraum* (7. Aufl.). Persen.
- Schindler, M., Schovenberg, V., & Schabmann, A. (2020). Enumeration processes of children with mathematical difficulties: An explorative eye-tracking study on subitizing, groupitizing, counting, and pattern recognition. *Learning Disabilities: A Contemporary Journal*, 18(2), 192–211.
- Schindler, M., & Schindler, F. (2022). Förderung der strukturierten Anzahlerfassung bei Kindern mit Schwierigkeiten im Rechnenlernen: Eine explorative Eye-Tracking Studie zur Evaluation schulischer Förderung in Klasse 5. In P. Klein, N. Graulich, J. Kuhn, & M. Schindler (Hrsg.), *Eye-Tracking in der Mathematik- und Naturwissenschaftsdidaktik: Forschung und Praxis* (S. 75–90). Springer Spektrum.
- Schipper, W. (2005). *Lernschwierigkeiten erkennen - verständnisvolles Lernen fördern*. IPN Leibniz.
- Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Westermann Schroedel.
- Stake, R. E. (1995). *The Art of Case Study Research*. Sage Publications.

- Stoffels, G. (2020). *(Re-)Konstruktion von Erfahrungsbereichen bei Übergängen von empirisch-gegenständlichen zu formal-abstrakten Auffassungen: Eine theoretische Grundlegung sowie Fallstudien zur historischen Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und individueller Entwicklungen mathematischer Auffassungen von Lehramtsstudierenden beim Übergang Schule-Hochschule*. universi.
- Wartha, S., Hörhold, J., Kaltenbach, M., & Schu, S. (2019). *Grundvorstellungen aufbauen Rechenprobleme überwinden: Zahlen, Addition und Subtraktion bis 100*. westermann.
- Wartha, S., & Schulz, A. (2019). *Rechenproblemen vorbeugen* (6. Aufl.). Cornelsen.
- Yin, R. K. (2018). *Case Study Research and Applications: Design and Methods* (6. Aufl.). Sage.

Jacqueline Köster, Felicitas Pielsticker, Jonalyn Margaux Smith

Universität Siegen, koester@mathematik.uni-siegen.de, pielsticker@mathematik.uni-siegen.de, jonalyn.smith@student.uni-siegen.de

Problemlösungsprozesse in homogenen und heterogenen Gruppen unter Nutzung eines CAD-Programms – Eine Fallstudie im außerschulischen MINT-Projekt "MINT ins Land"

*CAD-Software hat in unserem (Mathematik-)Unterricht an einigen Stellen bereits Einzug gehalten. Dabei unterscheidet sich die Nutzung von digitalen Werkzeugen wie einem CAD-Programm für unterschiedliche Bediener*innen. In dieser Fallstudie wird daher untersucht, wie sich hinsichtlich einer Nutzung und der Bedeutung für den individuellen mathematischen Wissensaufbau Unterschiede zwischen den Geschlechtern ergeben können.*

1. Motivation für die Forschung – "MINT ins Land"

Im Jahr 2021 lag der Frauenanteil in NRW in beruflichen Ausbildungen zu MINT-Berufen laut dem BMFSI (Bundesministerium für Familien, Senioren, Frauen und Jugend) bei 9,2%. Eine Frage ist, wie wir das Interesse für MINT (Mathematik, Informatik, Naturwissenschaften und Technik) bei Mädchen und jungen Frauen langfristig steigern können. Das Projekt "MINT ins Land" wurde im Jahr 2019 im Kontext des vom Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) initiierten "MINT-Clusters" ins Leben gerufen. Der MINT-Cluster verfolgt das Ziel, das Interesse von Schüler*innen an MINT-Fächern zu fördern und die Zusammenarbeit verschiedener Akteure zu stärken, um die Qualität und Effektivität der MINT-Förderung in Deutschland zu steigern. Dabei soll nicht nur das allgemeine Interesse an MINT-Fächern gefördert werden, sondern auch gezielt Mädchen und junge Frauen angesprochen und die Vielfältigkeit des MINT-Bereichs aufgezeigt werden. So soll dem Mangel an weiblichen Fachkräften in den naturwissenschaftlichen Bereichen entgegen gewirkt werden.

„In der naturwissenschaftlichen Bildung wird der Mathematik eine besondere Rolle zuteil. Sie ist einerseits eine eigene Wissenschaft mit besonderen Grundlagen und Methoden, und sie ist andererseits die zentrale Bezugswissenschaft aller Naturwissenschaften und der Technik.“ (Siller & Weigand, 2023, S. 2)

In diesem Sinne wird "MINT ins Land" aus der Mathematikdidaktik heraus gedacht und inhaltlich geplant.

2. Theoretische Einbettung

2.1 Bedarfsgerechte Bildung

Ein bedeutender Wert unserer Demokratie ist Geschlechtergerechtigkeit. Dies spiegelt sich in der ständigen Betonung von Gleichberechtigung und Geschlechtergerechtigkeit in den Medien und Diskussionen wider.

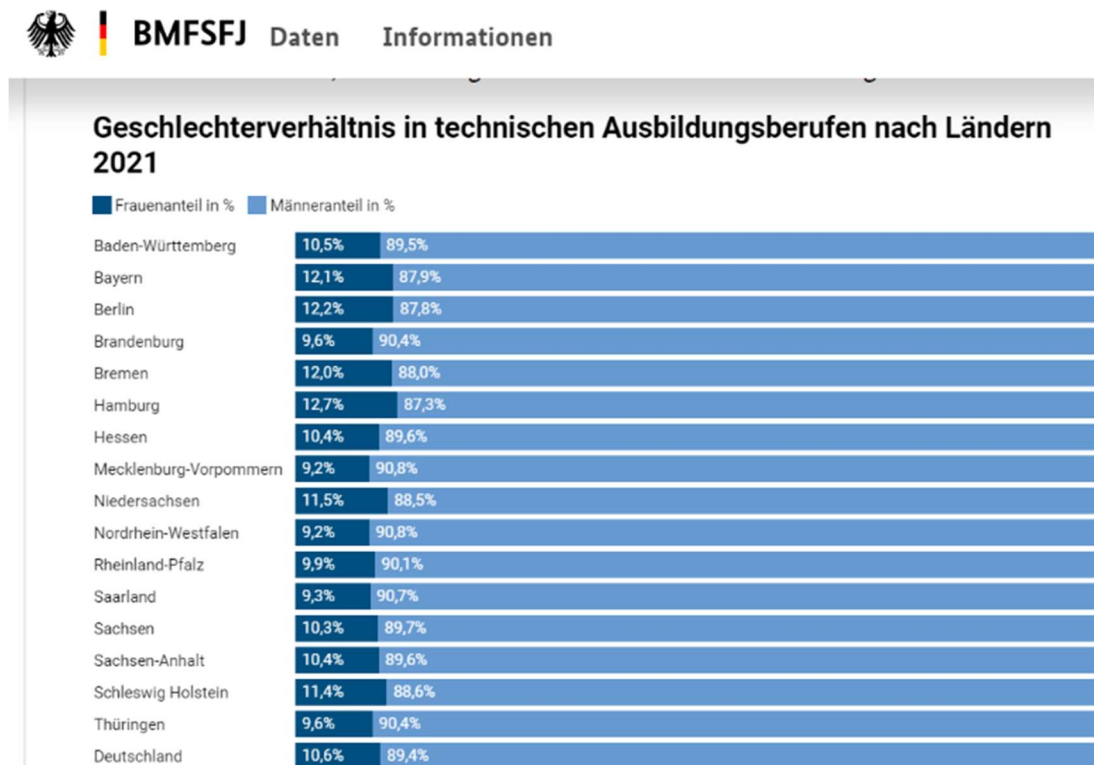


Abbildung 12: Geschlechterverhältnis in technischen Ausbildungsberufen nach Ländern 2021 (BMFSFJ, 2023)

In den letzten Jahren hat die Gesellschaft Fortschritte bei der Weiterentwicklung gesellschaftlicher Rollenbilder gemacht, und die Chancen, ein selbstbestimmtes Leben unabhängig vom Geschlecht zu führen, haben sich verbessert. Dennoch sind nach wie vor Unterschiede in Bezug auf die Berufswahl festzustellen, wie bereits im vorangegangenen Kapitel erwähnt wurde (**Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.**). Ebenso bleiben Einkommensunterschiede zwischen Männern und Frauen im gleichen Beruf ein relevantes Thema (Ministerium für Schule und Bildung NRW, 2022). Der geschlechtersensiblen Bildung liegen zwei Hauptziele zugrunde. 1. Das alle heranwachsenden Menschen ihre individuellen Potenziale ohne geschlechtsspezifische Einschränkungen entfalten können. Dies erfordert die Schaffung von Lernumgebungen, die von vornherein Benachteiligungen aufgrund des Geschlechts verhindern. Dieses Ziel beinhaltet auch die Berücksichtigung von Faktoren wie sozialer oder kultureller Herkunft, Alter oder individuellen Beeinträchtigungen, um sicherzustellen, dass die Schule an die verschiedenen Ausgangssituationen der Heranwachsenden anknüpfen kann. 2. Das den

heranwachsenden Menschen eine Werterhaltung der Geschlechtergleichberechtigung und der selbstbestimmten Lebensgestaltung vermittelt wird. Sowohl innerhalb als auch außerhalb der Schule sollen sie geschlechtsbezogene Benachteiligungen erkennen und die Sensibilität entwickeln, diesen entgegenzutreten (Ministerium für Schule und Bildung NRW, 2022). Durch die Kombination dieser beiden Ziele und ihre erfolgreiche Vermittlung im schulischen Kontext kann ein schrittweiser Rückgang von Geschlechterklischees, Rollenzuschreibungen und Vorurteilen erreicht werden (QUA-LiS NRW Schulentwicklung, 2023). Die konstruktivistisch-interaktionistische Geschlechtertheorie geht davon aus, dass Geschlecht nicht als angeborene Eigenschaft betrachtet wird, sondern vielmehr als erlernte Zugehörigkeit, die kontinuierlich konstruiert und praktiziert wird. Dieser Prozess wird als "Doing Gender" bezeichnet. Demnach werden Geschlechtsunterschiede nicht als naturgegeben angesehen, sondern als Ergebnis sozialer Interaktionen und individueller Handlungen. Geschlecht wird aktiv konstruiert und durch das tägliche Handeln und Verhalten einer Person kontinuierlich ausgeübt (Faulstich-Wieland, 2008). Um die geschlechterspezifischen Anforderungen im Bildungsbereich zu reduzieren und die oben genannten Ziele zu erreichen, werden ein impliziter und ein expliziter Ansatz unterschieden (QUA-LiS NRW Schulentwicklung, 2023). Beim impliziten Ansatz werden Geschlechtsunterschiede zwischen den Lernenden nicht explizit thematisiert – dennoch ist sich die Lehrkraft dieser Unterschiede bewusst und berücksichtigt diese. Beim expliziten Ansatz wird das Geschlecht bewusst betont und thematisiert – nach Faulstich-Wieland (1996) auch als "Dramatisierung" (neutraler Begriff) bezeichnet.

2.2 Problemlösen

Das Problemlösen ist einer der zentralen Ansatzpunkte für mathematisches Denken. In der mathematikdidaktischen Literatur wird diesem Bereich daher eine intensive Forschung gewidmet. Bekannte Beiträge zum Thema Problemlösen stammen von Pólya (1995) und Schoenfeld (1985) und hinsichtlich aktueller Literatur von Rott (2020). Die unterschiedlichen Phasenmodellen von Problemlöseprozessen beschreiben den Ablauf des mathematischen Problemlösens. Dabei fasst Schoenfeld für die Definition eines Problems zusammen: „The problem solver does not have easy access to a procedure for solving a problem – a state of affairs that would make the task an exercise rather than a problem – but does have an adequate background with which to make progress on it [...]” (Schoenfeld, 1985, S. 11). Problemlösen bleibt damit jeder Fachdisziplin offen und „kann deshalb auch Strategien und Wissen aus verschiedenen Fachbereichen einbeziehen“ (Dilling & Volger, 2022). Rotts (2013) Definition von Problemlösen betont (ähnlich wie bei Bruder & Collet, 2011) das Überwinden von Hindernissen, um ein Ziel zu erreichen, wobei verschiedene Strategien und Techniken eingesetzt werden, die das erfolgreiche Lösen ermöglichen.

„Eine Aufgabe ist für ihren Bearbeiter (genau) dann eine (mathematische) Problemaufgabe, wenn bei ihrer Bearbeitung ein Prozess des

Problemlösens stattfindet (im Gegensatz zu einem Routineprozess)“ (Rott, 2013, S. 32)

Rotts Problemlösemodell basiert unter anderem auf den Erkenntnissen von Pólya und Schoenfeld. Das vierstufige Phasenmodell von Pólya verläuft linear. Das deskriptive Modell von Rott ermöglicht eine flexible Kombination und Verschiebung der verschiedenen Phasen des Problemlöseprozesses. Dies fördert Kreativität und Flexibilität bei der Bearbeitung von Aufgaben. Das englischsprachige Modell, auf das Rott Bezug nimmt, startet nach der Offenlegung damit das Problem zu verstehen („Analysis“), gefolgt von der Planung des Prozesses („Planing“) sowie die Umsetzung („Implementation“) und endet mit der Überprüfung („Verification“). In der Phase der "Exploration" erfolgt das Erforschen und Ausprobieren. Dieses Modell betont, dass der Problemlöseprozess nicht linear verläuft und Übergänge zwischen den Phasen möglich und anpassbar sind (Rott et al., 2021). Interessant sind in diesem Zusammenhang auch Arbeiten, die hinsichtlich des Problemlösen Schnittstellen unter den MINT-Fächern in den Blick nehmen. Bspw. betrachten Dilling und Vogler (2022) Schnittstellen zwischen Problemlöseprozessen von Mathematik und Informatik am Beispiel des Programms Tinkercad™. In der analysierten Lernumgebung betrachten Dilling und Vogler, wie Schüler*innen unter Nutzung des Programms Tinkercad einen explorativen Zugang zur Programmentwicklung entdecken und welche Problemlöseprozesse dabei durchlaufen werden. Es wird deutlich, dass ein Auffinden und Lösen von Problemstellungen sowohl in der Mathematik als auch in der Informatik eine wichtige Rolle spielen. Nach einer Formulierung eines Problems mit darauffolgender Analyse folgt das Entwerfen eines Algorithmus mit Überprüfung. Anschließend wird der Aufwand zur Durchführung eingeschätzt, bevor dann im letzten Schritt die eigentliche Programmierung stattfindet (Müller & Weichert, 2013). Ziel eines solchen Problemlöseprozesses ist die Entwicklung eines Algorithmus. Mit algorithmischem Denken beim Problemlösen ergibt sich dadurch wieder eine Verbindung zur Mathematikdidaktik (Walter et al., 2020). Am Beispiel von Blockprogrammierung in Bezug auf Tinkercad wird deutlich, dass ein Algorithmus eine individuelle Problemlösung darstellen kann und sich auf diese Weise interessante Aspekte hinsichtlich einer Betrachtung von Schnittstellen innerhalb der MINT-Fächer für eine Betrachtung von Problemlöseprozessen ergeben können. Dennoch liegt der Fokus dieses Beitrags auf einer Betrachtung der Fallstudie von einem mathematikdidaktischen Standpunkt aus und die Problemlöseprozesse werden hinsichtlich des identifizierbaren mathematischen Wissens analysiert.

3. Datenerhebung und Methodik

Die folgende Fallstudie wurde innerhalb des Projekts "MINT ins Land" durchgeführt. Die Entscheidung für die Verwendung von 3D-Druck und Tinkercad basiert darauf, dass in diesem Workshop mathematische Problemlöseprozesse an der Schnittstelle zu MINT im Vordergrund stehen. Die Fallstudie konzentriert sich auf

die Analyse des Verhaltens und der Kommunikationsprozesse von zwölf Lernenden im Alter von elf bis zwölf Jahren bei mathematischen Problemlöseprozessen unter Verwendung von Tinkercad. Somit ergibt sich die zentrale Forschungsfrage:

„Welche gendersensiblen Aspekte lassen sich hinsichtlich der Bearbeitung von MINT-Problemstellungen in Zusammenhang mit der CAD-Software Tinkercad identifizieren und beschreiben?“

Um diese Forschungsfrage zu Problemlöseprozesses in unterschiedlichen Gruppen zu untersuchen, haben wir uns für ein qualitatives Forschungsdesign entschieden. Die Datengrundlage bilden Videosequenzen, die schließlich transkribiert und analysiert werden. Die Videoaufzeichnungen werden gemäß vordefinierten Transkriptionsregeln umgesetzt, die an Meyer (2010) angelehnt sind. Die erstellten Transkripte erfassen die verbalen und nonverbalen Handlungen in der zeitlichen Abfolge, in der sie auftreten. Die Namen der Teilnehmenden werden anonymisiert und sind frei erfunden. Die Erhebung der Daten erfolgte an zwei verschiedenen Tagen für jeweils 60min. Insgesamt wurden vier Gruppen (bezeichnet als A, B, C und D) beobachtet. Die Gruppenzusammensetzung ergab sich zufällig aus dem Projekt heraus, da die Kinder freiwillig daran teilnehmen. Gruppe A und C waren homogene Gruppen mit jeweils drei weiblichen Probandinnen. Die übrigen Gruppen (B und D) waren heterogen zusammengesetzt. Gruppe B bestand aus zwei weiblichen Probandinnen und einem männlichen Probanden, während in Gruppe D eine weibliche Probandin und zwei männliche Probanden vertreten waren. Sowohl Gruppe A und B als auch Gruppe C und D bearbeiteten ähnliche Aufgaben. Um die Verallgemeinerbarkeit der Ergebnisse zu gewährleisten, wurde Probandengruppe 1 (Gruppe A und B) einer anderen Aufgabe zugewiesen als Probandengruppe 2 (Gruppe C und D). Die Gruppenzusammensetzung war bis auf das Geschlecht willkürlich gewählt. Die Gruppen A und B widmet sich dem Thema "der gezinkte Würfel". Für dieses Experiment verwenden die Gruppen die Konstruktionssoftware Tinkercad, um einen manipulierten Würfel zu entwerfen. Die Art der Manipulation bleibt den Teilnehmer*innen selbst überlassen. Nachdem der Würfel konstruiert und mithilfe eines 3D-Druckers hergestellt wurde (Abbildung 2), treten die verschiedenen Teams in einem Wettbewerb gegeneinander an. In jeder Runde werden die Augenzahlen aus fünf Würfeln addiert. Ein Wurf mit einer Eins führt zu null Punkten für die gesamte Runde. Das Team, das als erstes 100 Punkte erreicht, gewinnt das Spiel. Die Teilnehmer*innen haben Zugang zu einem Tablet sowie einem Arbeitsblatt, das eine detaillierte Aufgabenbeschreibung enthält und Platz für Skizzen und Notizen bietet.

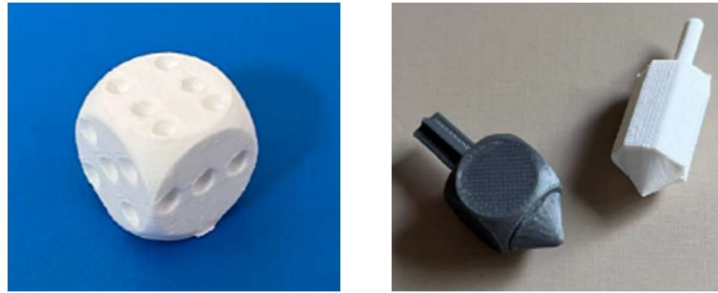


Abbildung 2: Der gezinkte Würfel und die Würfelkreisel (eigene Darstellung)

Die Gruppen C und D widmen sich der Aufgabe "Würfelkreisel" (Abbildung 2). Bei dieser Aufgabe besteht die Herausforderung darin, mithilfe von Tinkercad einen Würfel zu konstruieren, der nicht nur geworfen, sondern auch von einem Kreisel bedient wird. Die Art der Konstruktion und die Anzahl der Seiten des Würfels liegen im Ermessen der Teilnehmenden. Auch hier erhalten die Teilnehmenden ein Aufgabenblatt mit einer Aufgabenbeschreibung und Platz für Skizzen und Notizen. Die Analyse der Videos erfolgt durch eine Kategorienzuweisung im Sinne einer qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2015). Die ersten fünf Kategorien werden deduktiv auf bereits vorhandener theoretischer Grundlage – dem Problemlösungsansatz von Rott gebildet. Ergänzt durch vier induktive Kategorien aus dem Material.

<i>Kategorie</i>	<i>Definition</i>	<i>Ankerbeispiel</i>	<i>Kodierregel</i>
<i>K1 Analysis</i>	Alle Äußerungen, die darauf ausgerichtet sind, das Problem zu verstehen und erste Gedanken bezüglich möglicher Lösungsansätze zu äußern.	„Warte mal, wir müssen ja auch gar keine eins machen.“ (liest erneut die Spielregeln) (Transkript 2, Turn 92, Louis)	K1, wenn keine Informationen aus K2 bis K4 enthalten sind und wenn noch keine konkreten Handlungen erkennbar sind.
<i>K2 Exploration</i>	Alle Äußerungen, die auf ein ungeplantes Ausprobieren abzielen.	„Müssen wir ausprobieren, ob die Punkte dann draufpassen.“ (Transkript 1, Turn 26, Anna)	K2, wenn keine Informationen aus K1, K3, K4 enthalten sind und wenn keine Absicht eines gezielten Handelns zu erkennen ist.
<i>K3 Planing</i>	Alle Äußerungen, die die Entwicklung eines Plan darstellen.	„zeichnet“ (Transkript 1, Turn 9, Anna)	K3, wenn keine Informationen aus K1, K2, K4, K5 enthalten sind. K3, wenn die Proband*innen an einem Plan arbeiten.
<i>K4 Implementation</i>	Alle Aussagen, die die Ausführung des zuvor entwickelten Plans (K3) zeigen.	„Ich probier es einfach mal, so, wie kann man das umstellen?“ (Transkript 1, Turn 32, Leni)	K4, wenn Äußerungen erkennbar sind, die die konkrete Umsetzung des zuvor entwickelten Plans (K3) zeigen oder darauf Bezug nehmen.
<i>K5 Verification</i>	Alle Aussagen, die einen Rückblick auf die Aufgabe zeigen.	„Sollen wir das jetzt so lassen?“ (Transkript 1, Turn 160, Victoria)	K5, wenn keine Informationen aus K1-K4 enthalten sind.

			ten sind und die Proband*innen auf ihre Arbeit zurückblicken.
<i>K6 Beschreibung</i>	Alle Äußerungen, die sich auf visuelle Eigenschaften beziehen.	„Vielleicht kann man das farbiger machen“ (Transkript 1, Turn 47, Leni)	K6, wenn es sich um Äußerungen zur visuellen Wahrnehmung oder Farbe handelt.
<i>K7 Sprache</i>	Alle Äußerungen, die Besonderheiten in der Art der Ausdrucksweise enthalten.	„Exportieren ist speichern.“ (Transkript 2, Turn 136, Clara)	K7, wenn bestimmte Fachbegriffe verwendet werden oder umgangssprachlich gesprochen wird.
<i>K8 Soziales</i>	Alle Aussagen die emotional-gemeinschaftliche Aspekte enthalten.	„Du bist so organisiert.“ (Transkript 3, Turn 245, Tina)	K8, wenn Gespräche inhaltlich nichts mit der Aufgabe zu tun haben. K8, wenn private Unterhaltungen stattfinden.
<i>K9 Herausforderungen</i>	Alle Aussagen, die generell Schwierigkeiten äußern.	„Wie machen wir da jetzt Löcher drauf?“ (Transkript 2, Turn 16, Finn)	K9, wenn Fragen gestellt werden oder Unsicherheiten auftreten.

Tabelle 3: Kategoriensystem zur Analyse des Datenmaterials

4. Analyse

4.1 Ergebnisdarstellung heterogene Gruppen

Die Untersuchung der Videodaten dokumentiert die einzelnen Phasen des Problemlösungsprozesses bei den Teilnehmer*innen. Die Analyse zeigt wie bei Rott et al. (2021), dass die Mädchen und Jungen den Problemlösungsprozess nicht linear durchlaufen. Sie wechseln stetig zwischen den Phasen, wobei sie während der Implementierung oft zur Exploration zurückkehren. Diese beiden Phasen lassen sich nicht immer streng voneinander trennen, da spontanes Ausprobieren oft ein integraler Bestandteil des Lösungsweges und damit der Durchführung ist.

Kategorie	Kategorienname	Häufigkeit		Kategorie	Kategorienname	Häufigkeit	
		Mädchen	Jungen			Mädchen	Jungen
K1	Analysis	9	1	K6.2	Aussehen	17	30
K2	Exploration	1	9	K7	Sprache		
K3	Planing	12	11	K7.1	Fachbegriffe	1	4
K3.1	Skizze	7	0	K7.2	Umgangssprache	1	3
K4	Implementation	42	51	K8	Soziales	46	40
K5	Verification	3	4	K8.1	Aufforderungen	9	22
K6	Beschreibung			K9	Herausforderungen	13	20
K6.1	Farbe	15	29				

Tabelle 4: Evaluation Kategoriensystem (Gruppen B und D)

Die Jungen agieren oft als Hauptakteure und nutzen das Tablet eigenständig. Wie aus einem Ausschnitt des Transkripts der Gruppe D in Tabelle 3 ersichtlich ist, findet dennoch kontinuierlich eine Kommunikation zwischen den Gruppenmitgliedern statt, wobei die Mädchen Hinweise und Verbesserungsvorschläge geben.

-
102	Kai das muss noch ein bisschen größer oder? Warum schwebt dahinten noch so ein Ding?
103	Maja Weil wir das noch nicht gelöscht haben.
104	Kai so jetzt aber. Das ist nicht genau mittig. Aber ist egal.
105	Maja Ich würd das Dings unten ein bisschen größer machen.
106	Kai Ja würde ich auch sagen.
107	Svenja Das sieht noch ein bisschen komisch aus.
108	Maja Oder halt das kleiner.
-

Tabelle 5: Auszug aus dem Transkript der Gruppe D

Durch kontinuierlichen Austausch gleichen sich die Häufigkeiten in den meisten Schritten weitgehend aus. Die Phase der „Exploration“ dominiert mit neun Aussagen der Jungen. Dies erscheint durchaus nachvollziehbar, wenn man bedenkt, dass diese die meiste Zeit am Tablet arbeiten. Der letzte Schritt im Problemlösungsprozess beinhaltet das Überprüfen der Aufgabenstellung und die Verifizierung der Lösung. Häufig wird diesem Schritt wenig Beachtung geschenkt oder er wird komplett ignoriert.

-
102	Finn Reicht das?
103	Clara Öhm ja
104	Louis Kleiner
-

Tabelle 4: Auszug aus dem Transkript der Gruppe B

In Gruppe B und D lassen sich insgesamt drei Äußerungen von Mädchen und vier Äußerungen von Jungen erkennen, die auf eine Rückschau schließen lassen. Dies geschieht teilweise am Ende der Bearbeitungsphase und teilweise beim Übergang zwischen den Phasen. Wie in Tabelle 4 zu sehen, wird die Rückschau in der Regel durch kurze Interaktionen und Rückfragen begleitet. Ein deutlicher Unterschied zeigt sich in der Kategorie 3.1. In Gruppe B äußert Clara zunächst den Wunsch, eine Skizze anzufertigen, während ein solches Verhalten bei den Jungen nicht beobachtet wird. Diese beginnen sofort mit der Konstruktion und empfinden die Aufgaben als einleuchtend, ohne tiefergehend über die Aufgabenstellung nachzudenken oder die Durchführung im Voraus zu planen. Die Tabelle 5 verdeutlicht das ungleiche Verhalten der Gruppenmitglieder. Clara versucht in Segment fünf und zehn einen Plan zu erstellen. Sie ist die einzige Person, die das Aufgabenblatt erneut betrachtet (Zeile 15).

-
3	Finn wir müssen erstmal einen Würfel, wir müssen- ein Würfel ist doch einfach zu erstellen. Ein Würfel ist doch einfach zu erstellen.
4	Finn Äh an, an an an (schaltet das Tablet wieder ein)
5	Clara (erstellt eine Skizze)
-

- 6 **Finn** Wie macht man das Ding an?
- 7 **Louis** (beugt sich über das Tablet, versucht zu helfen) Zeig mal.
- 8 **Clara** (schaut, steht auf) Da ist doch ein Knopf.
- 9 **Finn** Oh, ich bin dumm.
- 10 **Clara** Jetzt warte mal Sekunde. Wir müssen erstmal ne Skizze machen.
- 11 **Finn** Äh aber, öhm ok also ein Würfel ein Würfel (erstellt einen Würfel) da Würfel, fertig! (lacht und dreht das Tablet zu Clara)
- 12 **Finn** Also ich meine das ist ein Würfel.
- 13 **Louis** Ja das ist ein Würfel.
- 14 **Finn** Jetzt müssen wir nur noch irgendwie die Zahlen da drauf kriegen.
- 15 **Clara** Hier steht ja keine Anleitung drauf. (betrachtet die das Blatt mit der Aufgabenstellung) Darf ich mal? (greift nach dem Tablet) Ich hab ne Idee.

Tabelle 5: Auszug aus dem Transkript der Gruppe B

Die deutlich unterschiedliche Verteilung der Handlungen in K2 Exploration und K3.1 Skizze kann darauf zurückzuführen sein, dass Mädchen üblicherweise mit Stift und Papier (K3.1) arbeiten, während Jungen ihre Ideen direkt mit einem Tablet umsetzen (K2). Der Problemlösungsprozess in den heterogenen Gruppen verläuft größtenteils ausgeglichen. Geringfügige Abweichungen lassen sich insbesondere in den Vorarbeiten beobachten. Während die Mädchen zunächst einen detaillierten Plan erstellen und sich wiederholt darauf beziehen, beginnen die Jungen sofort mit der Umsetzung und überdenken die Aufgabenstellung erst in einem späteren Schritt (Tabelle 6, Zeilen 226, 228).

- 226 **Svenja, Linus** (greifen zu den Blättern)
- 227 **Svenja** Für jeden einen (gibt ihren Zettel auch ab)
- 228 **Linus** Wir recherchieren im Internet.
- 229 **Svenja** Ja recherchiert ihr mal im Internet.
- 230 **Linus** [zu Interviewer] Dürfen wir auch auf YouTube?

Tabelle 6: Auszug aus dem Transkript der Gruppe D

Die Kategorie 6 beschäftigt sich mit den Beschreibungen der zu konstruierenden Figur. Diese Kategorie ist in K6.1, die die Farbbeschreibungen, und K6.2, die die allgemeinen Beschreibungen des Aussehens, unterteilt. Wenn wir mit der Betrachtung der Farbwahl beginnen, wird deutlich, dass die Farbe der konstruierten Figuren für alle Gruppenmitglieder von großer Bedeutung ist. Sowohl Mädchen als auch Jungen nehmen aktiv an Diskussionen darüber teil, welche Farbe gewählt werden sollte, und im Anschluss daran, welche Größenverhältnisse als ideal angesehen werden. Es ist festzustellen, dass weder bei den Jungen noch bei den Mädchen eine klare Tendenz zur Vorliebe einer bestimmten Farbe erkennbar ist. In Bezug auf die Farbwahl (K6.1) und die sozialen Interaktionen (K8) zeigt sich in folgendem Ausschnitt, dass Kai eine dominante Rolle in seiner Gruppe einnimmt. Für ihn hat die Farbwahl grundsätzlich eine hohe Bedeutung. So äußert er an einer Stelle: "Die Farbwahl ist das Wichtigste." Entgegen der zuvor getroffenen Vereinbarung, die besagte, dass die Farbwahl gemeinsam getroffen wird, äußert Kai eigenständig die Entscheidung, dass die Farben Gelb und Schwarz gewählt werden sollen. Die anderen Gruppenmitglieder lehnen diese Vorschläge jedoch ab, und die

Auswahl geht weiter. Anfangs sind alle vier Mitglieder an der Entscheidungsfindung beteiligt. Zuerst ziehen sich Linus und anschließend Maja aus der Diskussion zurück. Schließlich treffen Kai und Svenja die endgültige Entscheidung.

-
- 149 **Kai** Ok dann machen wir gelb. Gelb schwarz.
 150 **Svenja** Nein.
 151 **Kai** Das das ist gut. [hellblau, dunkelblau]
 152 **Svenja** Ja das sieht wirklich gut aus.
-

Tabelle 7: Auszug aus dem Transkript der Gruppe D

Es lässt sich aus den Beobachtungen nicht eindeutig ableiten, ob Kai eine spezielle Verbindung zu den Farbkombinationen Gelb und Schwarz (Tabelle , Zeile 149) oder Hellblau und Dunkelblau (Tabelle , Zeile 151) hat. Es fällt auf, dass die Mädchen sich insgesamt 17-mal zum Aussehen äußern, während die Jungen dies 30-mal tun. Beide Geschlechter bemühen sich um präzise Beschreibungen, aber gelegentlich verwenden sie den Begriff "Ding", um Begriffe zu kompensieren, wie in den Transkripten der Gruppe D, Segment 102 und 105 zu sehen ist (Tabelle).

-
- 102 **Kai** das muss noch ein bisschen größer oder? Warum schwebt dahinten noch so ein Ding?
 103 **Maja** Weil wir das noch nicht gelöscht haben.
 104 **Kai** so jetzt aber. Das ist nicht genau mittig. Aber ist egal.
 105 **Maja** Ich würd das Dings unten ein bisschen größer machen.
-

Tabelle 8: Auszug aus dem Transkript der Gruppe D

Im folgenden Ausschnitt (Tabelle) wird deutlich, dass Finn Schwierigkeiten mit den Begriffen "klein" bzw. "niedrig" hat. Aus den Beobachtungen geht jedoch hervor, dass eigentlich "flach" gemeint ist, da es darum geht, die Zahlen von außen auf dem Würfel zu platzieren.

-
- 57 **Finn** Ja aber trotzdem, das ist dann ganz klein. Nein ich meinte klein, also niedrig.
-

Tabelle 9: Auszug aus dem Transkript der Gruppe B

In der Kategorie 8 wird deutlich, dass die Mädchen in dieser Gruppenarbeit trotz ihrer Zurückhaltung aktiv um Kommunikation bemüht sind. Die 46 Äußerungen der Mädchen handeln nur selten von privaten Gesprächen. Die Mädchen kommentieren ihren Arbeitsprozess und suchen nach Bestätigung. Die Kategorie 8.1 beschäftigt sich mit Aufforderungen und Befehlen zwischen den Gruppenmitgliedern. Dabei fällt auf, dass Kai oft Anweisungen gibt, die von den anderen Mitgliedern befolgt werden. Weitere Anzeichen für Kai als Teamleiter zeigen sich, insbesondere wenn es um die Anzahl der Ecken des Würfelkreisels geht. Ohne Rücksprache bestimmt er, dass sie sieben Ecken verwenden sollen.

-
- 155 **Kai** Jetzt machen wir sieben.
-

Tabelle 10: Auszug aus dem Transkript der Gruppe D

Häufig fällt er durch sein unruhiges und provokantes Verhalten auf, obwohl er gleichzeitig maßgeblich an der Lösung der Aufgabe interessiert ist und sich dafür engagiert.

273	Kai Welche Klasse seid ihr?
274	Svenja , Maja Sechste
275	Kai Auf?
276	Svenja , Maja Köln
277	Kai Ja was für Streber
278	Kai So so so. Wir lassen das jetzt einfach so, wir können es nur noch schlechter machen. Können wir das irgendwie abspeichern.

Tabelle 11: Auszug aus dem Transkript der Gruppe D

In der letzten Kategorie geht es um Herausforderungen, die während der Bearbeitung der Aufgabe auftreten. Diese Kategorie steht in enger Verbindung mit der Exploration und Implementation (Kapitel 2.2). In den gemischten Gruppen gab es zwischen Jungen und Mädchen mit jeweils 20 und 13 Äußerungen keine signifikanten Unterschiede. Die Schwierigkeiten beziehen sich hauptsächlich auf technische Probleme und weniger auf das Verständnis der Aufgabe (Tabelle).

310	Finn Ist doch egal.
311	Clara [unzufrieden]
312	Finn Guck. Das hasse ich an diesem Computer

Tabelle 12: Auszug aus dem Transkript der Gruppe B

4.2 Ergebnisdarstellung homogene Gruppen

Kategorie	Kategoriennamen	Häufigkeit Mädchen	Kategorie	Kategoriennamen	Häufigkeit Mädchen
K1	Analysis	12	K6.2	Aussehen	34
K2	Exploration	17	K7	Sprache	
K3	Planing	17	K7.1	Fachbegriffe	5
K3.1	Skizze	5	K7.2	Umgangssprache	8
K4	Implementation	36	K8	Soziales	65
K5	Verification	5	K8.1	Aufforderungen	10
K6	Beschreibung		K9	Herausforderungen	15
K6.1	Farbe	9			

Tabelle 13: Kategoriensystem (Gruppe A und C)

Für Gruppe A sind zu Beginn der Arbeitsphase Unterschiede festzustellen. Insbesondere zeigt sich Leni, die zwischen Anna und Tina sitzt, vertieft in den Arbeitsprozess. Sie kommentiert und koordiniert die Arbeitsabläufe, während die übrigen Teilnehmerinnen zu Beginn überwiegend passiv sind. Im Verlauf der Arbeit zeigt sich jedoch eine zunehmende Aktivität und Beteiligung aller Mädchen. Im Gegensatz dazu offenbaren die Mädchen der Gruppe C von Anfang an eine gleichmäßige und engagierte Beteiligung am Arbeitsprozess. In beiden Gruppen sind die Kategorien 1 bis 3 von erheblicher Bedeutung. Während Leni aus Gruppe A einen Fokus auf manuelles Zeichnen legt und vorerst das Tablet lediglich zur explorativen Erprobung nutzt, strebt die andere Gruppe nach einer präzisen verbalen Beschreibung des gewünschten Endergebnisses des Würfelkreisels. Zudem machen sie intensiven Gebrauch von digitalen Anwendungsmöglichkeiten. Hierbei scannen sie

zunächst QR-Codes und nutzen das Internet zur Recherche über die Konstruktion, bevor sie sich im Menü von Tinkercad an bereits vorhandenen Formen orientieren. Die divergierenden Herangehensweisen sind durch den Vergleich der Transkriptausschnitte in Tabelle 14 und Tabelle 15 ersichtlich. Zur Vollständigkeit sei angemerkt, dass in Gruppe C der Interviewer regelmäßig interveniert und den Arbeitsprozess aktiv begleitet.

4	Leni [zu Anna] Also wir müssen einen Würfel machen, kannst du mal dein Mäppchen rausholen?
5	Anna Was soll ich machen?
6	Leni Dein Mäppchen rausholen
7	Leni Wir brauchen einen Stift, wie wir das machen (<i>nimmt den Stift, zeichnet</i>)
8	Victoria Hier sind auch noch Blätter, vielleicht für Skizzen (<i>zeigt Anna die Blätter</i>)
9	Anna [unverständlich] (<i>zeichnet, (...) murmelt vor sich hin, erste Versuche am Tablet</i>)
10	Victoria, Leni (<i>schauen sich um</i>)
11	Leni Wie groß müssen wir den denn machen?
12	(...)
13	Leni Warte also (<i>nimmt sich das Blatt</i>) soll ähm, wir sollen einen Würfel machen (<i>zeichnet</i>) ich hab mich gefragt, ich verstehe selber nicht
14	Anna (<i>zeigt auf den Entwurf im Tablet</i>)
15	(...6)
16	Leni So soll der aussehen.
17	Leni So muss man sich das vorstellen, (<i>zeigt es den anderen das Blatt</i>) aber da steht ja -
18	Anna Wir müssen da Punkte drauf machen.
19	Leni Ja (...) Meine Überlegung ist gerade wie wir das unauffällig machen, sodass da überhaupt kein einzelner Punkt da ist, weißt du?

Tabelle 64: Auszug aus dem Transkript der Gruppe A

Die Teilnehmerinnen der anderen Gruppe überlegen gemeinsam, wie sie den Würfelkreisel konzipieren. Sie diskutieren ihre Gedanken und streben dabei eine präzise Beschreibung an.

3	Tina Mh ja mit so ner Spitze.
4	Interviewer Ja also nen Kreisel kennt ihr. Du drehst, der dreht sich und irgendwann fällt er um.
5	Lena, Maria (<i>betrachten das Aufgabenblatt</i>)
6	Maria Also ich würde das so machen, dass da halt so ne Kreiselspitze ist und darauf ist dann -
7	Tina Wir können auch den Kreisel aus einem Würfel bauen.
8	Interviewer Ja einen Kreisel der ein Würfel ist, versteht ihr? Falls nicht, zum Beispiel und ihr könnt euch überlegen wie ihr den macht. Ob der 6 Flächen hat oder oder wie auch immer. Das wär das Arbeitsblatt dazu. Wollt ihr auch zu zweit eins haben? Ist vielleicht besser oder?
9	Lena Sollen wir mal gucken, wie das überhaupt aussieht?
10	Maria Also wir sollen ja erstmal machen wie wir denken wie der aussieht.
31	Maria Ok also wir brauchen auf jeden Fall einen Würfel (<i>zeigt im Menü auf den Würfel</i>)
32	Lena Also wir müssen die Spitze -
33	Tina Ich weiß nicht ob man das umgedreht kriegt.
34	Lena Und dann auf den Würfel.
35	Tina Warte wir versuchen erstmal das Liliane Teil zu drehen oder?
36	Maria Kann man das drehen?
37	Tina (<i>zieht die Spitze auseinander</i>) Oder wir stellen den einfach dadrauf.
38	Lena Vielleicht gibts irgendwo ein anderes Teil. (<i>Scrollt im Menü</i>)

Tabelle 75: Auszug aus dem Transkript der Gruppe C

Ähnlich wie bei der Analyse der heterogenen Gruppen lässt sich auch hier keine klare Abgrenzung beim Übergang von den Kategorien 1-3 zu der konkreten Umsetzung (K4) feststellen. Eine weitere Auffälligkeit betrifft die Rückschau. Selbst

in den homogenen Gruppen sind lediglich fünf Äußerungen identifizierbar, die auf eine Rückschau hindeuten. Die Mädchen setzen sich intensiv dafür ein, möglichst präzise Beschreibungen des Aussehens der zu konstruierenden Figur zu liefern. Ihr Redeanteil in der Kategorie 6 liegt mit 43 Äußerungen etwas höher als in den gemischten Gruppen. Die Farbwahl erfolgt hier gemeinschaftlich, und alle Handlungen werden in Absprache getroffen. Es fällt auf, dass die Mädchen für den Würfel bevorzugt natürliche Farben wählen möchten. Dies zeigt sich sowohl in Gruppe A (Tabelle 16) als auch in Gruppe C (Tabelle 17), wo Äußerungen darauf hinweisen, dass ein weißer, standardisierter Spielwürfel verwendet wird. Besonders im Transkript der Gruppe A wird deutlich, dass die Mädchen während des Bearbeitungsprozesses generell weniger Wert auf die Farbe legen. Stattdessen liegt der Fokus eher auf der realitätsgetreuen Anordnung der Zahlen, wie im Segment 106 und folgenden Abschnitten ersichtlich ist.

47	Leni Vielleicht kann man das farbiger machen, aber ein Punkt würde ja auch erstmal reichen, oder in weiß das sieht natürlicher aus
69	Leni Ich änder mal die Farbe, das sieht natürlicher aus.
106	Leni Oben können wir zum Beispiel ne zwei hinmachen.
107	Leni Sollen wir oben die zwei hinmachen?
108	Anna Ja oder? Ist das wie beim echten Würfel?
109	Leni Die sechs.
110	Anna Ja dann die sechs.

Tabelle 16: Auszug aus dem Transkript der Gruppe A

48	Tina Gelb auf keinen Fall. Ich überleg halt zwischen dem weißen.

Tabelle 17: Auszug aus dem Transkript der Gruppe C

Dem allgemeinen Aussehen der Figuren wird hingegen umso mehr Aufmerksamkeit gewidmet, was sich in insgesamt 34 Äußerungen zeigt (Tabelle 16). Dieser Aspekt geht eng mit der Vorarbeit und der Entwicklung eines Plans ein. Die Mädchen beschreiben konkret, wie groß, klein, spitz oder rund die Konstruktionen sein sollen. Die Sprache der Gruppe zeigt keine besonderen Auffälligkeiten. Die Begriffe "Körper" und "duplizieren" werden als Fachbegriffe häufig verwendet. Auf der anderen Seite fehlt den Mädchen offenbar der Fachbegriff für einen Zylinder, wie im folgenden Auszug aus dem Transkript der Gruppe A zu erkennen ist. Stattdessen greifen sie wiederholt auf die Begriffe "Ding" oder "Dinger" zurück.

144	Leni Anna Wir haben einen Punkt und machen gerade die anderen - duplizieren (<i>erstellen weitere Zylinder</i>)
145	Leni Du musst gar nicht da drauf klicken, du kannst die ganze Zeit auf das Ding da [Zylinder] klicken

Tabelle 88: Auszug aus dem Transkript der Gruppe A

Die vorletzte Kategorie zeigt die ausgeprägte Kommunikation in den beiden homogenen Gruppen. Mit insgesamt 75 Äußerungen wird erneut deutlich, dass die Mädchen in ihren Arbeitsschritten eng miteinander abstimmen. Hier ist zu erkennen, dass Leni in Gruppe A die Arbeitsschritte leitet und gelegentlich Anweisungen gibt. Von den zehn Äußerungen in der Kategorie 8.1 entfallen sieben auf

Gruppe A und fünf auf Leni. Schwierigkeiten oder Herausforderungen sind in den homogenen Gruppen insbesondere zu Beginn des Arbeitsprozesses zu finden. Während in den gemischten Gruppen die Schwierigkeiten oft im technischen Verständnis der Aufgabe lagen, liegt es in Gruppe A eher an der Aufgabenstellung selbst oder an Ideen zur Umsetzung. In Gruppe A (Tabelle 19) erkennt man, dass Anna eine Verbindung zu einer vorherigen Aufgabe in einer anderen Sitzung herstellt und versucht, die Inhalte zu verknüpfen. Sie folgt einem deduktiven Lösungsweg.

61 **Anna** Wie ging das denn nochmal? Bei dem Schlüsselanhänger mussten wir ja auch ein Loch machen.

Tabelle 19: Auszug aus dem Transkript der Gruppe A

Trotzdem ist in den homogenen Gruppen eine gewisse Unsicherheit bei der Arbeit spürbar. Allen Teilnehmenden wurde im Voraus gesagt, dass sie sich selbst ausprobieren und ihrer Kreativität keine Grenzen setzen sollen. Dennoch melden sich die Mädchen oft, um sich zu vergewissern. Anstatt selbst etwas auszuprobieren, fragen die Teilnehmerinnen und warten auf Hilfe vom Interviewer.

4.2 Zusammenfassung der Forschungsergebnisse und Ausblick

Folgende Frage soll beantwortet werden: „Welche gendersensiblen Aspekte lassen sich hinsichtlich der Bearbeitung von MINT-Problemstellungen in Zusammenhang mit der CAD-Software Tinkercad identifizieren und beschreiben?“ Als erste Erkenntnis lässt sich festhalten, dass in keiner der Gruppen wertende oder nicht-wertende Äußerungen über das Geschlecht gemacht wurden. Wie von Faulstich-Wieland (2008) erwähnt, werden Geschlechterunterschiede nicht als naturgegeben angesehen, sondern als Ergebnis von sozialen Interaktionen und individuellen Handlungen betrachtet (wobei dies den Schüler*innen nicht bewusst sein muss). Das Konzept des "Doing Gender" ist in dieser Forschung nicht erkennbar und wird nicht beobachtet. Obwohl es Verhaltensunterschiede gibt, werden diese nicht auf ein bestimmtes Geschlecht projiziert. Die Mädchen zeigen in allen vier Gruppen ein ruhigeres Verhalten als die Jungen. Es ist jedoch nicht sicher zu sagen, ob dies auf das Selbstvertrauen zurückzuführen ist. Wie von Faulstich-Wieland (2008) angemerkt, sind Geschlechtsunterschiede nicht auf das Geschlecht selbst zurückzuführen, sondern auf das Selbstvertrauen, das geschlechtsbedingt sein kann. Die Ursachen dafür können durch andere Sozialisationsinstanzen verstärkt werden, aber dies bleibt an dieser Stelle Spekulation. Es ist auch fraglich, ob das teilweise richtungsweisende Verhalten der Probanden auf Charaktermerkmale oder geschlechtliche Zuweisungen zurückzuführen ist, und dies kann an dieser Stelle nicht bestätigt werden. Basierend auf den Konzepten des Problemlösemodells von Rott, ist es von Bedeutung zu bestätigen, dass die einzelnen Schritte des Problemlöseprozesses in Erscheinung treten. Bei genauerer Betrachtung wird deutlich, dass die Schritte bei den Teilnehmer*innen nicht klar voneinander abgegrenzt sind. Die Jugendlichen nutzen kontinuierlich sowohl vorwärts- als auch rückwärtsgerichtete Ansätze. Sowohl Rott als auch Pólya sprechen von Strategien, die zur Bewältigung

von Problemen eingesetzt werden können. Das Anwenden heuristischer Strategien von Pólya ist teilweise erkennbar. Insbesondere in den Phasen der Analyse und Planung zeigen die Teilnehmer*innen Anzeichen dafür, dass sie auf bereits bekannte Probleme verweisen. Zudem sind Mädchen in diesen Phasen aktiver als Jungen. Letztere beginnen in den meisten Fällen direkt mit der Bearbeitung, während Mädchen häufig zuerst einen Plan oder eine Skizze erstellen. Die Verifizierung wird oft ausgelassen. Die Jugendlichen erkennen keine Notwendigkeit dieses Schrittes und reflektieren ihre Arbeitsschritte nicht bewusst. Daher ist es möglich, dass dieser Schritt nicht deutlich sichtbar ist, da wenig darüber gesprochen wird. In den verbalen Äußerungen gibt es keine eindeutigen Muster in eine bestimmte Richtung. Sowohl Jungen als auch Mädchen verwenden teilweise korrekte mathematische Begriffe zur Beschreibung ihrer Arbeit. Gleichzeitig fehlen ihnen jedoch gelegentlich Wörter, die sie durch Füllwörter kompensieren. Es könnte sein, dass dies nicht nur auf das Geschlecht zurückzuführen ist, sondern auch auf Unterschiede im mathematischen Vorwissen der Teilnehmer*innen. Es gibt keine pauschale Tendenz in Bezug auf ein bestimmtes Geschlecht. Die Mädchen legen besonderen Wert auf präzise Beschreibungen ihrer Konstruktionen. Sie versuchen, das Aussehen im Voraus so genau wie möglich festzulegen und bemühen sich um eine genaue Beschreibung (z. B. der Körper). Bei der Farbwahl ist ihnen ein realistisches Erscheinungsbild wichtig. Sie wählen Farben, die einem echten Spielwürfel ähneln. Mädchen in anderen Gruppen äußern Farbwünsche wie lila, gelb, weiß und rot. Jungen äußern Präferenzen für Farben wie blau, weiß, schwarz, grau, bunt, rot und gelb. Daher neigen Jungen häufiger zu dunklen Farben, sind aber auch positiv gegenüber bunten Farben eingestellt. Abschließend kann in Bezug auf die Forschungsfrage, folgende Schlussfolgerungen gezogen werden: Die Fallstudie hat gezeigt, dass es in den untersuchten Gruppen keine genderspezifischen Verhaltensmuster oder Vorlieben in Bezug auf die Bearbeitung von MINT-Problestellungen am Beispielprogramm Tinkercad gibt. Geschlecht allein scheint keinen signifikanten Einfluss auf das Verhalten und die Herangehensweise der Teilnehmenden zu haben. Stattdessen werden individuelle Unterschiede und Selbstvertrauen als relevanter angesehen. Es ist wichtig zu betonen, dass die Ergebnisse dieser Fallstudie auf die spezifischen Bedingungen und die Altersgruppe (elf bis zwölf Jährige) der Teilnehmenden zutreffen und nicht pauschal auf alle Situationen im MINT-Bereich übertragen werden können. Wichtig zu betonen ist, dass es sich um eine Untersuchung von Problemlöseprozessen in außerschulischen MINT-Workshops unter Verwendung der CAD-Software Tinkercad handelt. Die Kinder haben sich dabei in der Regel bewusst für eine Teilnahme entschieden. Diese Selbstselektion könnte zu einer Beeinflussung der Ergebnisse geführt haben, da die Teilnehmenden bereits ein gewisses Interesse und Engagement für MINT-Themen mitbrachten. Dennoch gibt dieser Beitrag Hinweise, wie Schüler*innen in außerschulischen MINT-Workshops in unterschiedlichen Gruppenkonstellationen agieren. Gleichzeitig unterstreicht die Forschung die Bedeutung umfassender, langfristiger Maßnahmen, um das Interesse von Mädchen an MINT-Fächern und -Berufen nachhaltig zu fördern. Unsere Ergebnisse können als Ausgangspunkt für

weitere Untersuchungen dienen. Zum Beispiel eine Untersuchung, bei denen die gleichen Teilnehmenden über einen längeren Zeitraum begleitet werden, um präzisere Schlüsse über ihr Verhalten in Gruppenarbeitsphasen ziehen zu können.

Literatur:

- BMFSFJ. (24. Februar 2023). *Anteil von Frauen und Männern in beruflichen Ausbildungen zu MINT-Berufen*. Abgerufen am 18. Oktober 2023 von Bundesministerium für Familie, Senioren, Frauen und Jugend: <https://www.daten.bmfsfj.de/daten/daten/anteil-von-frauen-und-maennern-in-beruflichen-ausbildungen-zu-mint-berufen-131752>
- Bruder, R., & Collet, Ch. (2011). *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht*. Cornelsen Scriptor.
- Faulstich-Wieland, H. (1996). *Abschied von der Koedukation?* In E. Kleinau, & C. Opitz, *Geschichte der Mädchen- und Frauenbildung* (S. 386-400). Frankfurt a. M.
- Faulstich-Wieland, H. (2008). *Schule und Geschlecht*. In H. Faulstich-Wieland, W. Helsper, & J. Böhme, *Handbuch der Schulforschung* (S. 673f.). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.
- Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken*. Weinheim und Basel: Beltz Verlag.
- Meyer, M. (2010). *Wörter und ihr Gebrauch - Analyse von Begriffsbildungsprozessen*. In G. Kadunz, *Sprache und Zeichen. Zur Verwendung von Linguistik und Symbolik in der Mathematikdidaktik* (S. 49-82). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.
- Ministerium für Schule und Bildung NRW. (2022). *Pädagogische Orientierung für eine geschlechtersensible Bildung an Schulen in Nordrhein-Westfalen*.
- Pólya, G. (1995). *Schule des Denkens: Vom Lösen mathematischer Probleme* (4. Ausg.). Francke: Sammlung Dalp.
- QUA-LiS NRW Schulentwicklung. (2023). *Geschlechtersensible Bildung und Erziehung in der Schule*. (Q. u. Schule, Hrsg.) Abgerufen am 11. Oktober 2023 von Geschlechtersensible Bildung und Erziehung in der Schule: <https://www.schulentwicklung.nrw.de/q/gendersensible-bildung-und-erziehung/grundlagen/ziele-und-strategien/index.html>
- Rott, B. (2020). *Teachers' Behaviors, Epistemological Beliefs, and Their Interplay in Lessons on the Topic of Problem Solving*. International Journal of Science and Mathematics, 18(5), 903-924. <https://doi.org/10.1007/s10763-019-09993-0>
- Rott, B., Specht, B., & Knipping, C. (2021). *A descriptive phase model of problem-solving processes*. Köln: Springer.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando.
- Siller, H.S., & Weigand, H.-G. (2023). *Ohne Mathe geht es nicht. MINT-Bildung: Chancen für den Mathematikunterricht*. mathematiklehren, 237, 2–7.
- Walter, D., Ladel, S., Schreiber, C., & Rink, R. (2020). *Forschung zu und mit digitalen Medien: Befunde für den Mathematikunterricht der Primarstufe*. Münster: WTM-Verlag.

Sabine Kowalk, Ute Sproesser & Kerstin Frey

Pädagogische Hochschule Ludwigsburg, sabine.kowalk@ph-ludwigsburg.de

Förderung des Funktionalen Denkens durch digital-gestützte Lernumgebungen und Embodiment

Digitale Technologien für den Mathematikunterricht entwickeln sich schnell und verändern das Lehren und Lernen von Mathematik. Beim Umgang mit Funktionen können digitale Werkzeuge den Erwerb konzeptuellen Wissens begünstigen und in Kombination mit Embodiment die Interaktionsmöglichkeiten beim „Begreifen“ mathematischer Konzepte unterstützen. Vor diesem Hintergrund wurden im Projekt „LernelF“ digital gestützte Lernumgebungen unter Einbezug des Embodiments zur Förderung Funktionalen Denkens entwickelt. Im Beitrag wird die digital-gestützte Lernumgebung „Graphen gehen digital“ im Kontext von Embodiment vorgestellt. Die dazugehörige Forschung wird als Ausblick skizziert.

1. Einleitung

Bewegung lässt sich mit dem eigenen Körper erzeugen und als Kontext nutzen, um Funktionen läuferisch zu erfahren (Hußmann & Laakmann, 2011). Die Idee Funktionale Zusammenhänge durch Bewegung im Unterricht erlebbar zu machen, wurde bereits mehrfach aufgegriffen, z.B. von Bärbel Barzel (2002) „Ich bin eine Funktion“, von Uli Brauner (2008) „Graphen gehen“, von Hußmann und Laakmann (2011) „Funktionen läuferisch selbst erfahren“ oder Tim Lutz (2022) „Funktionsgraphen-Lauf“. Laufvorgänge lassen sich z.B. mithilfe eines Ultraschallmessgeräts in Echtzeit im Klassenzimmer dynamisch-graphisch visualisieren. Bewegt man sich vor einem Sensor, kann man Start- und Endposition sowie die Laufgeschwindigkeit festlegen und dabei wahrnehmen, wie die eigene Bewegung im Graphen dargestellt wird. Graphische Verläufe auf einen Blick zu erfassen, fördert das funktionale Denken, eine für den Umgang mit Funktionen typische Denkweise (Vollrath, 1989). Deren Entwicklung ist ein zentrales Unterrichtsziel, wird aber offenbar nicht ohne weiteres erreicht, wie zahlreiche Schülerschwierigkeiten in diesem Bereich zeigen (Sproesser et al., 2020). Als Indikator für entwickeltes Funktionales Denken gilt ein flexibler Darstellungswechsel mit dazugehöriger Aktivierung von Grundvorstellungen des Funktionsbegriffs (Engelhardt et al., 2023). Insbesondere bei der Arbeit mit einer Vielzahl an unterschiedlichen Funktionsdarstellungen in Schulbüchern erscheint es als problematisch, dass Funktionsdarstellungen von Lernenden oftmals nicht per se als verständlich erlebt werden. Sie müssen zunächst eine entsprechende Wahrnehmung und Handlungsmöglichkeiten erlernen, um die mathematische Bedeutungen in verschiedenen Darstellungen zu erkennen (Shvarts & van Helden, 2023).

Bewegung und Wahrnehmung, oder einfach ausgedrückt Körper und Geist, werden in dem noch relativ neuen Paradigma „Embodiment“ für das Lehren und Ler-

nen von Mathematik nicht als separate Bereiche aufgefasst (Abrahamson & Baker, 2016; Bikner-Ahsbahs, 2022). Vielmehr ist Kognition grundlegend mit körperlichen Erfahrungen verflochten, so dass sich beide Bereiche gegenseitig bedingen. Derartige Annahmen einer komplexen Geist-Körper-Verbindung und damit zusammenhängende Unterrichtskonzepte werden in diesem Beitrag unter dem Begriff „Embodiment“ gefasst. Dabei wird unter diesem Begriff eine Vielzahl an unterschiedlichen körpergestützten Zugängen zu mathematischen Konzepten (z.B. action-based embodied design, perception-based embodied design, incorporation-based etc., Wei et al., 2023) subsumiert. Allen gemein ist, dass Schüler*innen mit mathematischen Konzepten über sensomotorische Aufgabenstellungen konfrontiert werden, in denen sie Bewegungen mit dem ganzen Körper oder nur mit Teilen des Körpers (z.B. dem Finger) ausführen und dabei bestimmte Merkmale eines mathematischen Konzepts wahrnehmen können (Duijzer, 2020). Schüler*innen lernen zunächst eine Bewegung intuitiv auszuführen, bevor analytische Prozesse diese intuitiven Bewegungen validieren bzw. verbessern (Abrahamson et al., 2020). Ein solcher Zugang kann das konzeptuelle Verständnis für mathematische Konzepte unterstützen und das Verständnis für Funktionsgraphen verbessern (Duijzer, 2020). Zur Nutzung dieses Potentials gilt es, derart ganzheitliche Lerngelegenheiten im Mathematikunterricht zu etablieren. Allerdings dominieren im Unterricht der Sekundarstufe nach wie vor tradierte Arbeitsweisen wie das Arbeiten mit Papier und Bleistift (Göbel & Barzel, 2021), was die Entfaltung lernförderlicher Features digitaler Technologien gerade im Umgang mit Funktionen ausschließt. Zudem ist der Unterrichtsgang beim Thema Funktionen meist algebraisch geprägt (Büchter, 2008), dies erscheint jedoch mit Blick auf die Tendenz zum Fokus auf graphische Funktionsprototypen (Hadjidemetriou & Williams, 2002; Leinhardt et al., 1990) ungünstig. Auch hierbei können qualitative Zugänge mittels digitaler Werkzeuge und unter Einbezug von Embodiment den Blick weiten und nichtprototypische Graphenverläufe modelliert werden. Es besteht Grund zur Annahme, dass Änderungen in diesen zwei Bereichen positive Wirkungen auf die Entwicklung Funktionalen Denkens haben können.

Vor diesem Hintergrund wurden im Projekt „LernelF“ digital gestützte Lernumgebungen für die Unterrichtseinheit „Lineare Funktionen“ in Klasse 7 und 8 entwickelt. Bei der Konzeption der Lernumgebungen waren der Einsatz von digitalen Werkzeugen, Embodiment, situierte Lernanlässe sowie entdeckendes Lernen wesentliche Gestaltungselemente. In diesem Beitrag wird exemplarisch die digital gestützte Lernumgebung „Graphen gehen digital“ vorgestellt, in welcher Lerngelegenheiten zur Förderung Funktionalen Denkens unter Einbezug von Embodiment und digitalen Werkzeugen umgesetzt wurden.

2. Theoretischer Hintergrund

2.1 Funktionales Denken fördern – gegenständlich oder/und digital?

Die Entwicklung des Funktionalen Denkens stellt ein zentrales Ziel des Mathematikunterrichts dar (Dreher et al., 2021; Vollrath, 1989) und beinhaltet die Fähigkeit

mit Funktionen gedanklich umgehen zu können, weshalb Funktionales Denken auch als typische Denkweise im Umgang mit Funktionen beschrieben wird (Vollrath, 1989). Ein flexibler Darstellungswechsel wie auch die Aktivierung und Anwendung von Grundvorstellungen gelten als Indikatoren für entwickeltes Funktionales Denken (Lichti, 2019). Grundvorstellungen zu Funktionen werden durch den Zuordnungs-, Kovariations- und Objektaspekt (Nitsch, 2015; Vollrath, 1989; Wei et al., 2023) sowie durch die Input-Output-Vorstellung beschrieben (Wei et al., 2023). Am Funktionsgraphen erworbene Vorstellungen lassen sich besonders gut auf andere Darstellungen übertragen. Daher gilt der Funktionsgraph als besonders lerneffizient bei der Ausbildung von Grundvorstellungen (Rolfes, 2018). Der Aufbau eines verständnisvollen Umgangs mit Funktionsgraphen ist besonders bedeutsam für die Entwicklung Funktionalen Denkens (Lichti & Roth, 2021), scheint jedoch mit Herausforderungen einherzugehen. Studien zeigen, dass Schüler*innen Schwierigkeiten mit Funktionsgraphen haben, welche durch Fehlertypen wie Graph-als-Bild-Fehler oder die Tendenz zu Funktionsprototypen dokumentiert sind (Leinhardt et al., 1990). Als mögliche Ursachen sind eine unzureichende dynamische Sichtweise auf funktionale Zusammenhänge (Hoffkamp, 2012) sowie – in Bezug auf Übergeneralisierungstendenzen – eine Fokussierung auf idealisierte lineare Beispiele naheliegend, welche durch die Positionierung linearer Funktionen zu Beginn der formalen Auseinandersetzung mit Funktionen begünstigt erscheint (Leinhardt et al., 1990). Um Übergeneralisierungen bestimmter Funktionstypen zu vermindern, sollten Schüler*innen zuerst vielfältige Erfahrungen zu verschiedensten funktionalen Zusammenhängen sammeln und Grundvorstellungen festigen, bevor dann spezielle Funktionstypen und deren Eigenschaften behandelt werden (Lichti & Roth, 2021).

Erfahrungen mit vielfältigen funktionalen Zusammenhängen lassen sich sowohl gegenständlich als auch durch den Einsatz digitaler Werkzeuge in den Mathematikunterricht integrieren. Der durch die induzierte jeweilige Lernvorteil hängt davon ab, wie passend entsprechende Werkzeuge für den Erwerb mathematischer Konzepte geeignet sind und damit den Wissensaufbau unterstützen (Digel et al., 2023; Ruchniewicz, 2022). Entsprechend der Instrumental Genesis wird ein künstlich geschaffenes Artefakt (z.B. eine Simulation) erst durch die Ausbildung von Nutzungsschemata zum Instrument für den Erwerb mathematischer Konzepte. Unterschiedliche Artefakte führen demnach zur Ausbildung unterschiedlicher Nutzungsschemata (Digel et al., 2023). Die Arbeit mit gegenständlichen Materialien befördern durch Messprozesse statische Nutzungsschemata und fördern daher vermehrt den Zuordnungsaspekt. Im Gegensatz dazu begünstigen Simulationen dynamische Sichtweisen und Argumentationen über Änderungsverhalten (Kovariation) (Digel et al., 2023).

Digitale Werkzeuge unterstützen unter anderem den Aufbau der Kovariationsvorstellung. Diese gilt grundsätzlich als ausgebildet, wenn sich Schüler*innen eine kontinuierliche Veränderung zweier funktional zusammenhängender Größen gleichzeitig vorstellen können (Ruchniewicz, 2022, S. 58). Im Rahmen der schulischen Ausbildung scheinen Schüler*innen diese Fähigkeit nicht ausreichend zu

erlangen (Carlson et al., 2002; Nitsch, 2015). Da die Kovariationsvorstellung das Verständnis für dynamische Prozesse benötigt, kann sie besonders durch Lernsituationen gefördert werden, die Bewegung beinhalten.

2.2 Embodiment

Embodiment (bzw. embodied design, embodied learning) ist ein relativ neues Paradigma im Kontext des Lehrens und Lernens von Mathematik (Abrahamson, 2017). Es bricht mit einer dualistischen Auffassung von Körper und Geist (Abrahamson & Bakker, 2016, S. 2; Bikner-Ahsbahr, 2022) und eröffnet neue Möglichkeiten körperliche Erfahrungen im Lernprozess zu verankern. Bewegung ist dabei eng mit Wahrnehmung verknüpft und wird als sensomotorische Aktivität aufgefasst. Es geht nicht darum, mit dem Körper eine Bewegung (motor) beliebig auszuführen und etwas danach wahrzunehmen (sensor), sondern darum, dass Schüler*innen gleichzeitig lernen, wie sie sich bewegen müssen, während sie herausfinden, was sie dabei wahrnehmen können (und umgekehrt). Um das zu erreichen, werden Lernende mit sensomotorischen Interaktionsaufgaben konfrontiert, zu denen sie eine passende Bewegung erzeugen sollen. Die richtige Bewegung kann nur erzeugt werden, wenn die Schüler*innen Merkmale eines zugrundeliegenden mathematischen Konzepts erkannt haben (Abrahamson & Bakker, 2016).

Um sensomotorische Interaktionsaufgaben in den Unterricht integrieren zu können, benötigt man Technologien mit einer spezifischen Funktionsweise: die Entwicklung bestimmter sensomotorischer Schemata muss als Voraussetzung für die Lösung einer bestimmten Aufgabenanforderung eingefordert und zugleich ausgebildet werden.

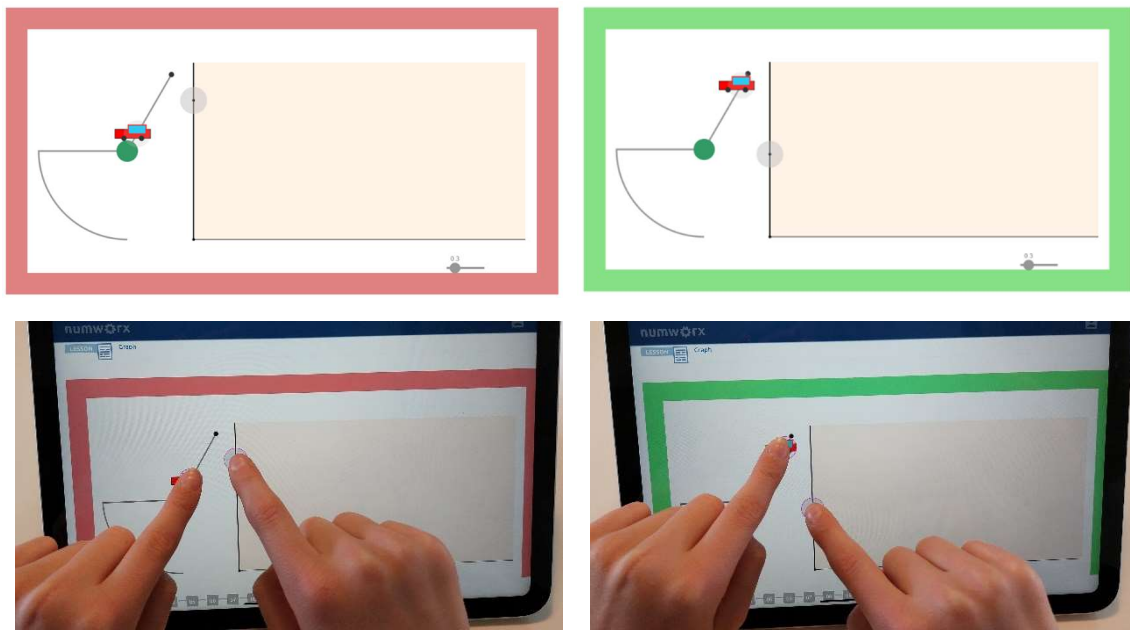


Abbildung 1: Beispiele sensomotorischer Interaktionsaufgaben aus Numworx

Auf der Lernplattform Numworx wurden Lernumgebungen unter Einbezug dieser Merkmale konzipiert, die beispielhaft körpergestützte Unterrichtsdesigns illustrieren. Abbildung 1 zeigt eine sensomotorische Interaktionsaufgabe einer Lernumgebung zum Entdecken funktionaler Zusammenhänge im Kontext situativ-graphischer Darstellungswechsel (<https://t1p.de/my08v>). In der dargestellten exemplarischen Aufgabenstellung können Lernende die Lage des grauen Punktes auf der y-Achse sowie die Position des Autos auf dem vorgegebenen Streckenzug gleichzeitig verändern. Die auf der y-Achse dargestellte Größe ist nicht bekannt, sondern muss durch Bewegung der veränderbaren Punkte und unter Einbezug des Feedbacks durch eine grüne Rahmenfarbe erschlossen werden. Bewegt man den grauen Punkt auf der y-Achse, kann man durch die Veränderung der Farbe des Rahmens von rot auf grün erkennen, dass die Lage des grauen Punktes auf der y-Achse dem Abstand des Autos vom grünen Punkt (Kreis) in der linken Skizze entspricht. Die sensomotorische Interaktionsaufgabe ist, die Farbe des Rahmens dauerhaft grün zu halten, während das Auto den gesamten Streckenzug abfährt.

Bewegungen bzw. körperliche Handlungen sind beim Embodiment eine wichtige Ressource für konzeptuelles Lernen (Abrahamson & Bakker, 2016). Um Begriffsbildungsprozesse zu unterstützen, sind Lernumgebungen häufig nach einem didaktischen Dreischritt konzipiert: (1) ein motorisches Problem, bei dem die Schüler*innen lernen, sich auf eine neue Art zu bewegen, (2) eine Reflexion über diese Bewegung, (3) eine Beschreibung der Bewegung mit mathematischen Mitteln und Abstraktion der zugrunde liegenden Regel (Alberto et al., 2022). An die in Abbildung 1 dargestellte Aufgabenstellung gliedern sich daher Reflexionsfragen an, wie „What is your rule to keep the frame green?“. Lernende werden aufgefordert ihre gefundene sensomotorische Strategie zu erläutern sowie unter vorgegebenen Strategien passende auszuwählen. Abbildung 2 zeigt an die Bewegung anschließende Reflexionsaufgaben.

Wenn es Schüler*innen gelingt, ihre Handlungen mit mathematischen Mitteln zu beschreiben, bringen sie ihr (neu erworbenes) konzeptuelles Verständnis zum Ausdruck. Dann kann die Bewegung des Autos auf der vorgegebenen Strecke mit dem Graphenverlauf in Zusammenhang gebracht werden und Überlegungen folgender Art können verbal beschrieben werden:

- „Wo ist der Start- wo der Endpunkt?“ (Zuordnung)
- „Bewegt sich das Auto gleichmäßig?“ (Kovariation)
- „Wo kann diese gleichförmige Bewegung im Graph gesehen werden?“ (Funktion als Ganzes)

Sensomotorische Erfahrungen umfassen eine Vielzahl an körperlichen Aktivitäten, die von der Beobachtung und Beeinflussung fremder Bewegungen bis hin zur Ausführung eigener Bewegungen reichen (Duijzer, 2020).

Reflect:

Did you manage to keep the frame green the whole time?
What could be a rule to determine the frame color?

Here is Sam's rule:
"I keep the point on the graph as high as the car."

Will Sam's frame stay green the whole time?

You can go back to the activity and explore.

yes

no

CHECK

What is your rule to keep the frame green?
Go back to the activity and investigate.

Then write down your rule.

Below are five rules.
Choose the rule that fits best with your rule.
You can go back to the activity and explore.

Choose

Choose

1) I move the point up and down, as quickly as the car moves
2) When the point is higher up, the car is further from the green circle
3) When the point is higher up, the car is closer to the green circle
4) The height of the point is equal to the distance from the car to the green circle
5) I move the point down and then up. Then I keep the point at the same place

Below are five rules.
Some rules help to keep the frame green. Some do not help.
Choose rules that help to keep the frame green.
You can go back to the activity and explore.

Click the box to check your work.

1) I move the point up and down, as quickly as the car moves

2) When the point is higher up, the car is further from the green circle

3) When the point is higher up, the car is closer to the green circle

4) The height of the point is equal to the distance from the car to the green circle

5) I move the point down and then up. Then I keep the point at the same place

CHECK

Abbildung 2: Reflexionsaufgaben

Embodiment geht davon aus, dass mithilfe von Bewegung und der Bearbeitung von sensomotorischen Interaktionsaufgaben mathematische Konzepte entdeckt, erforscht und erworben werden können (Abrahamson & Bakker, 2016; Alberto et al., 2022). Darin unterscheiden sich digitale Anwendungen mit einem Fokus auf Embodiment von anderen digitalen Zugängen, die schon in Form von Visualisierungen *ready-made*-Lösungen vorgeben (Alberto et al., 2022). Embodiment muss nicht zwingend in Verbindung mit digitalen Technologien zum Einsatz kommen, diese erweitern jedoch die Möglichkeiten maßgeblich.

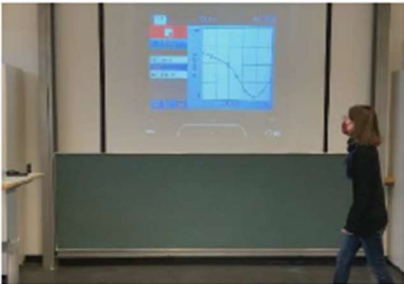
3. Lernumgebung „Graphen gehen digital“

Es gibt eine Vielzahl an Möglichkeiten, Embodiment in den mathematischen Lernprozess zu integrieren. Viele davon verlangen den Einsatz des gesamten Körpers, z.B. wenn Lernende sich vor einem Ultraschallmessgerät (Sensor) bewegen (Duijzer et al., 2019). Allerdings ist die Anschaffung einer solchen Technologie mit Kosten verbunden und bedingt durch die eher aufwendige und zeitintensive Umsetzung im Unterricht kann nicht für alle Schüler*innen die Möglichkeit gewährleistet werden, mit dem eigenen Körper funktionale Zusammenhänge zu erkunden. Die Entwicklung von Applets (z.B. in GeoGebra) ist einfach umsetzbar und ermöglicht jeder Schülerin und jedem Schüler mit dem Finger oder anhand von manipulierbaren Elementen (wie z.B. Schieberegler oder Zugmodus) funktionale Zusammenhänge zu erkunden (vgl. Göbel & Barzel, 2021).

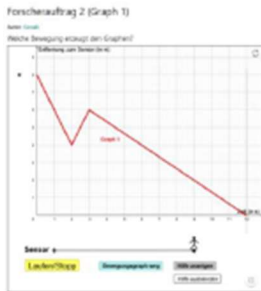
Das GeoGebra-Applet „Graphen gehen digital“ (<https://www.geogebra.org/m/xqhb2efu>) ist eine Weiterentwicklung der bereits bekannten Aufgabenstellungen „Ich bin eine Funktion“ von Bärbel Barzel (2002) sowie des Unterrichtsmaterials „Graphen gehen“ von Uli Brauner (2008). Das GeoGebra-Applet ist eingebunden in eine 90-minütige Lernumgebung für Klasse 7 oder 8. Dabei arbeiten die Schüler*innen in Partnerarbeit an vier verschiedenen Forscheraufträgen. Beim GeoGebra-Applet „Graphen gehen digital“ können Laufbewegungen vor einem Sensor simuliert und automatisch in einen Graphen transformiert werden. Optimalerweise wird ein reales Experiment vorangestellt, bei welchem Schüler*innen direkt vor einem Sensor laufen können. Der Vorteil des Voranstellens eines realen Experiments ist die geteilte Erfahrung und unmittelbare Visualisierung der Auswirkungen einer Bewegung auf den Graphenverlauf.

Forscherheft „Graphen gehen“

Stell dir vor, du bewegst dich vor einem Sensor, der die Entfernung in Abhängigkeit von der Zeit misst. Deine Bewegung wird als Graph im Koordinatensystem dargestellt.



Real: Vor einem Sensor gehen



Digital: In GeoGebra „Graphen gehen digital“

Heute entdeckst du, wie du mithilfe der Bewegungen deines Körpers verschiedene Graphen erzeugen kannst. Du lernst wie Graphen und Bewegungen zusammenhängen und wie du den Zusammenhang beschreiben kannst.

Abbildung 3: Deckblatt zum Forscherheft „Graphen gehen“

Im Anschluss daran arbeiten die Schüler*innen in GeoGebra weiter. Beim GeoGebra-Applet „Graphen gehen digital“ gehen die Vorteile der analogen Version von „Graphen gehen“ (Erfahrbarkeit von spezifischen Funktionseigenschaften wie der Eindeutigkeit und Grundvorstellungen) nicht verloren, sondern werden ergänzt durch den unmittelbaren Darstellungswechsel im Multirepräsentationssystem und der einfachen Zugänglichkeit zum GeoGebra-Applet. Verschiedene Forscheraufträge im Forscherheft strukturieren die Arbeit mit dem Applet (Abbildung 2). Jeder Forscherauftrag verlangt die Ausführung von Bewegungen. Dabei stattfindende Erkenntnisprozesse werden durch die schriftliche Bearbeitung konkreter Aufgaben begleitet.

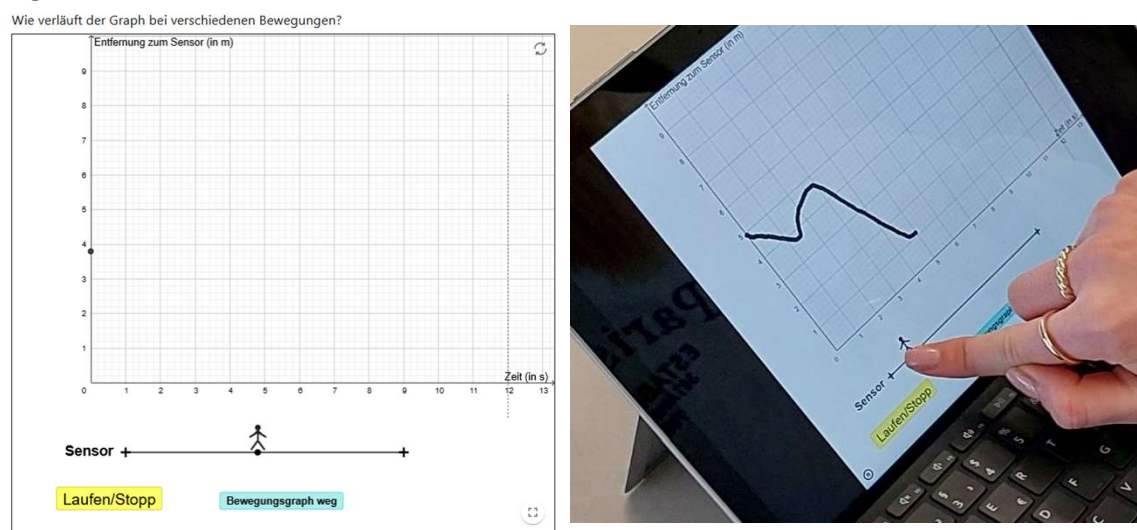
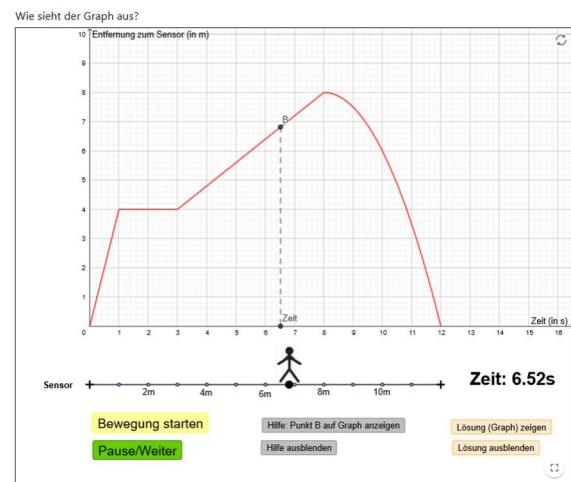
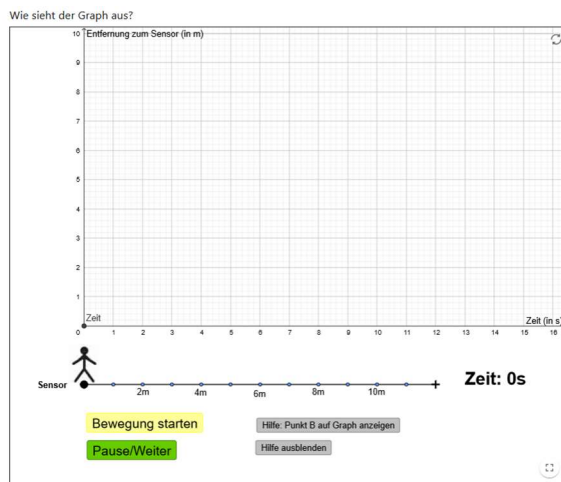


Abbildung 4: Forscherauftrag 1 zu „Graphen gehen digital“

Zu Beginn (Forscherauftrag 1) können Schüler*innen explorativ erkunden, wie sich verschiedene Bewegungen auf den Verlauf des Funktionsgraphen auswirken. Dabei wird ein Darstellungswechsel zwischen der Bewegung und dem Graphen durch gezielte Aufgabenstellungen unterstützt. In einem nächsten Schritt (Forscherauftrag 2) ist jeweils ein Graphenverlauf vorgegeben. Die Schüler*innen bewegen das Männchen mit dem Finger entsprechend dem Verlauf des Graphen und beschreiben ihre Bewegung. Daran schließt sich Forscherauftrag 3 an (Abbildung 3). Bei diesem Forscherauftrag bewegt sich eine Figur automatisch vor dem Sensor. Die Schüler*innen sind dabei aufgefordert, die Bewegung zu beobachten und den entsprechenden Graphenverlauf zu zeichnen. Im Anschluss kann der korrekte Graphenverlauf eingeblendet werden, wodurch ein Feedback zur individuellen Aufgabebearbeitung zur Verfügung gestellt wird.

Der Lehrprozess wird durch eine Handreichung sowie Folien und Bewegungskarten für den Unterricht unterstützt. Der Lernprozess wird durch das Forscherheft und die Nutzung des Applets moderiert. Der Einsatz des Applets ermöglicht Schüler*innen in Plenumsphasen, eigene Überlegungen und Begründungen durch das Ausführen von Laufbewegungen sichtbar zu machen, wodurch etwaige Sprachbarrieren reduziert werden können.



Forscherauftrag 3: Wie sieht der Graph aus?

a) Öffne in GeoGebra Forscherauftrag 3 (Graph 1).

Beobachte die Bewegung der Person. Welcher Graph entsteht dabei?
Zeichne zuerst den Graphen in rot. Kontrolliere danach deine Lösung.



b) Öffne Forscherauftrag 3 (Graph 2). Arbeite wie bei a). Zeichne den Graphen in blau.

c) Vervollständige den Lückentext mithilfe folgender Begriffe: *flacher, steiler, steigt, parallel, senkrecht, fällt*. (Zwei Begriffe bleiben übrig)

- ① Je schneller man sich bewegt, desto _____ verläuft der Graph.
- ② Wenn man stehen bleibt, verläuft der Graph _____ zur x-Achse.
- ③ Wenn man sich vom Sensor wegbewegt, dann _____ der Graph.
- ④ Wenn man sich zum Sensor hinbewegt, dann _____ der Graph.

c) Kannst du die Aussage ① begründen? Warum ist das so?

Abbildung 5: Forscherauftrag 3, ohne und mit Lösung (<https://t1p.de/honmw>)

4. Weiterarbeit und Ausblick

Die Lernumgebung „Graphen gehen digital“ ist Teil einer modular entwickelten Unterrichtseinheit und wurde im Schuljahr 2022/23 in 14 Klassen des Gymnasiums und der Realschule implementiert. Die damit verbundene Forschung untersucht, wie sich Änderungen tradierter Arbeitsweisen (Arbeiten mit Papier und Bleistift vs. digitale Stützung; Variation in der unterrichtlichen Abfolge) auf die Kompetenzen der Schüler*innen auswirken. Insbesondere interessiert, welche Wirkung ein analoger Unterricht im Vergleich zu einem digital gestützten Unterricht auf funktionenspezifische Fähigkeiten sowie motivationale Variablen der Schüler*innen haben (Teilstudie 1). Dazu wurden in den Experimentalklassen die digital gestützten Lernumgebungen durchgehend eingesetzt. In den Kontrollklassen wurden keine digitalen Werkzeuge eingesetzt und es wurde klassisch mit dem Schulbuch unterrichtet. Zudem interessiert, welche Wirkung die Variation in der unterrichtlichen Abfolge auf funktionenspezifische Fähigkeiten sowie motivationale Variablen der Schüler*innen hat (Teilstudie 2). Dazu wurde der Unterrichtsgang in zwei experimentellen Treatments angeboten: Anstelle einer sukzessiven Behandlung von Funktionstypen (erst proportional, dann linear) in Treatment 1 wurden in Treatment 2 proportionale Funktionen als Spezialfall linearer Funktionen unterrichtet. Der Studie liegt ein Pre-Post-Follow-up-Forschungsdesign zugrunde. Aktuell werden die erhobenen Daten ausgewertet.

Literatur:

- Abrahamson, D. (2017). Embodiment and Mathematics Learning. In K. A. Peppler (Hrsg.), *The Sage encyclopedia of out-of-school learning* (S. 248–252). SAGE Publications, Inc. <https://doi.org/10.4135/9781483385198.n98>
- Abrahamson, D. & Bakker, A. (2016). Making sense of movement in embodied design for mathematics learning. *Cognitive Research: Principles and Implications*, 1(1), 33. <https://doi.org/10.1186/s41235-016-0034-3>
- Abrahamson, D., Nathan, M. J., Williams-Pierce, C., Walkington, C., Ottmar, E. R., Soto, H. & Alibali, M. W. (2020). The Future of Embodied Design for Mathematics Teaching and Learning. *Frontiers in Education*, 5, Artikel 147. <https://doi.org/10.3389/educ.2020.00147>
- Alberto, R., Shvarts, A., Drijvers, P. & Bakker, A. (2022). Action-based embodied design for mathematics learning: A decade of variations on a theme. *International Journal of Child-Computer Interaction*, 32, 100419. <https://doi.org/10.1016/j.ijcci.2021.100419>
- Barzel, B. (2002). Ich bin eine Funktion. In H. Wilfried & E. Lehmann (Hrsg.), *Neue Materialien für den Mathematikunterricht mit dem TI-83/89/92 in der Sekundarstufe I: Quadratische Funktionen* (S. 60–70). Schroedel.
- Bikner-Ahsbahs, A. (2022). Mathematiklehren und -lernen digital - Theorien, Modelle, Konzepte. In G. Pinkernell, F. Reinhold, F. Schacht & D. Walter (Hrsg.), *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule: Aktuelle* (S. 7–36). Springer.

- Brauner, U. (2008). Graphen gehen. Ein Gefühl für Diagramme entwickeln. *mathematik lehren* (148), 20–23.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. & Hsu, E. (2002). Applying Covariational Reasoning While Modeling Dynamic Events: A Framework and a Study. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol.33(No.5), 352–378.
- Digel, S., Engelhardt, A. & Roth, J. (2023). Digital gerahmte Experimentierumgebungen als dynamischer Zugang zu Funktionen. In J. Roth, M. Baum, K. Eilerts, G. Hornung & T. Trefzger (Hrsg.), *Die Zukunft des MINT-Lernens – Band 2* (S. 1–16). Springer Berlin Heidelberg.
- Dreher, U., Klinger, Marcel & Lichti, M. (2021). Vielfältige Perspektiven auf die Entwicklung Funktionalen Denkens. *mathematica didactica*, 44. Jahrgang, 1–4.
- Duijzer, C. (2020). *Moving towards understanding: Reasoning about graphs in primary mathematics education*. <https://doi.org/10.33540/250>
- Duijzer, C., van den Heuvel-Panhuizen, M., Veldhuis, M. & Doorman, M. (2019). Supporting primary school students' reasoning about motion graphs through physical experiences. *ZDM*, 51(6), 899–913. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01072-6>
- Engelhardt, A., Digel, S. & Roth, J. (2023). Fähigkeit zur Beurteilung dynamischer Arbeitsblätter - Wie lässt sie sich fördern? In J. Roth, M. Baum, K. Eilerts, G. Hornung & T. Trefzger (Hrsg.), *Die Zukunft des MINT-Lernens – Band 1* (S. 139–154). Springer Berlin Heidelberg.
- Göbel, L. & Barzel, B. (2021). Parameter digital entdecken - wirklich so easy? *mathematik lehren* (226), 20–24.
- Hadjidemetriou, C. & Williams, J. (2002). Children's graphical conceptions: *Research in Mathematics Education*, 4(1), 69–87. <https://doi.org/10.1080/14794800008520103>
- Hoffkamp, A. (2012). Funktionales Denken mit dem Computer unterstützten - Empirische Untersuchungen im Rahmen des propädeutischen Unterrichts der Analysis. In U. Kortenkamp (Hrsg.), *Zur Zukunft des Analysisunterrichts vor dem Hintergrund der Verfügbarkeit Neuer Medien (und Werkzeuge)* (S. 51–56). Franzbecker.
- Hußmann, S. & Laakmann, H. (2011). Funktionen läuferisch selbst erfahren - Grundvorstellungen erlebbar machen. *Praxis der Mathematik*, 53(38).
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1–64. <https://doi.org/10.3102/00346543060001001>
- Lichti, M. (2019). *Funktionales Denken fördern*. Springer Fachmedien Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-23621-2>
- Lichti, M. & Roth, J. (2021). Einstieg in Funktionen: Darstellungsform und passendes Medium. *mathematik lehren* (226), 10–14.
- Lutz, T. (2022). Funktionsgraphen-Lauf: Vorgegebene und eigene Graphen im Raum selbst erlaufen mittels Kamera. *digital unterrichten MATHEMATIK* 4(4), 6–7.
- Nitsch, R. (2015). *Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge*. Springer Fachmedien Wiesbaden.
- Rolfes, T. (2018). *Funktionales Denken*. Springer Fachmedien Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-22536-0>

- Ruchniewicz, H. (2022). *Sich selbst diagnostizieren und fördern mit digitalen Medien*. Springer Fachmedien Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-35611-8>
- Shvarts, A. & van Helden, G. (2023). Embodied learning at a distance: from sensory-motor experience to constructing and understanding a sine graph. *Mathematical Thinking and Learning*, 25(4), 409–437. <https://doi.org/10.1080/10986065.2021.1983691>
- Sproesser, U., Vogel, M. & Dörfler, T. (2020). Typische Lernschwierigkeiten mit Darstellungswechsel bei elementaren Funktionen - Welche Schwierigkeiten kennen Lehrkräfte und wie schätzen sie Aufgabenbearbeitungen ihrer Klassen ein? *mathematica didactica* (43), 1–24. http://www.mathematica-didactica.com/Pub/md_2020/2020/ges/md_2020_Sproesser.pdf
- Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik* (10), 3–37. <https://www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/history/vollrath/papers/052.pdf>
- Wei, H., Bos, R. & Drijvers, P. (2023). An Embodied Approach to Abstract Functional Thinking Using Digital Technology: A Systematic Literature Review. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 30(2), 75–94. https://doi.org/10.1564/tme_v30.2.2

Förderung digitaler Lehrkompetenz im Projekt 4 digit.L

Die Digitalisierung erweitert zweifelsohne die Möglichkeiten guten Mathematikunterricht digital-gestützt umzusetzen. Um diese Möglichkeiten in der Schule zu nutzen, braucht es jedoch engagierte Lehrkräfte, die im Rahmen von Aus- und Weiterbildung fachdidaktische Potenziale digitaler Werkzeuge diskutieren und dabei ihre professionellen Wissensbestände um technologiebezogene Aspekte erweitern, mit dem Ziel, digitale Werkzeuge gewinnbringend in den Unterricht zu integrieren. Im Beitrag werden Potenziale digitaler Werkzeuge am Beispiel dynamischer Visualisierungen mathematischer Zusammenhänge beleuchtet, sowie Möglichkeiten berufsbegleitender Fortbildungsmaßnahmen zur Entfaltung professioneller Kompetenzen von Lehrkräften zum Einsatz digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht (digitale Lehrkompetenz) in den Blick genommen. Darauf aufbauend wird das Fortbildungsprojekt „4 digit.L“ zur Förderung digitaler Lehrkompetenz vorgestellt.

1. Einleitung

Den Unterricht um die Möglichkeiten, welche die Digitalisierung mit sich bringt, zu erweitern, erfordert von Lehrkräften z.B. digital-gestützte Lehr-Lernmaterialien bezogen auf ihr Potenzial u.a. für Begriffsbildungsprozesse didaktisch begründet auszuwählen und diese zielgerichtet in den Unterricht zu integrieren (KMK 2016, 2021; Huwer et al. 2019). Überlegungen, wie der Einsatz digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht sinnvoll die Entwicklung mathematischer Kompetenzen unterstützt, untermauern die Notwendigkeit der Erweiterung fachdidaktischer Fragestellungen um technologiebezogene Aspekte (Roth et al. 2023). Daraus ergibt sich ein um derartige Aspekte erweitertes Kompetenzprofil von Lehrkräften (KMK 2016), wie es etwa im weit verbreiteten *Technological Pedagogical Content Knowledge Modell* (Mishra und Koehler 2006) als zusätzliche Facette von Professionswissen integriert ist. Im Kontext von politisch erwünschten kontinuierlichen Professionalisierungsprozessen im digitalen Bereich (KMK 2021; 2016) sind fachlich spezifizierte Beschreibungsmodelle notwendig, die für konkrete Anforderungssituationen aufzeigen, welches Wissen und welche Kompetenzen für Mathematiklehrkräfte besonders bedeutsam sind (Ostermann et al. 2022; Huwer et al. 2019).

Eine Möglichkeit, Professionswissen von Lehrkräften zu erweitern, stellen berufsbegleitende Fortbildungsmaßnahmen dar. Empirische Befunde zur Wirkung adäquater Lerngelegenheiten in Form von effektiven Fortbildungen für Lehrkräfte in diesem Bereich sind jedoch rar und stellen daher ein dringendes Desiderat dar (Barzel 2019; Thurm 2020; Ostermann et al. 2022). Vor dem skizzierten Hintergrund wird in diesem Beitrag eine zweiteilige Fortbildung für Mathematiklehrkräfte zur Förderung ihrer digitalen Professionalität im Kontext digital gestützten

Unterrichtens funktionaler Zusammenhänge vorgestellt. Das durch die *Professional School of Education* Stuttgart-Ludwigsburg (PSE) geförderte Fortbildungsprojekt “4 digit. L“ unterstützt Mathematiklehrkräfte an Sekundarschulen in Baden-Württemberg bei der Umsetzung digital gestützter Lernumgebungen im eigenen Unterricht und der Reflexion ihrer Potenziale für mathematische Lehr-Lernprozesse.

2. Theoretischer Hintergrund

In diesem Abschnitt wird zunächst der Einsatz digitaler Werkzeuge am Beispiel dynamischer Darstellungen und ihrer Potenziale für die Ausbildung funktionalen Denkens dargestellt. Anhand des TPACK-Modells (Mishra und Koehler 2006) und eines mathematikspezifischen Modells von Tabach und Trgalova (2020) wird Professionswissen von Mathematiklehrkräften in den Blick genommen. Abschließend werden die Möglichkeiten zur Gestaltung von Fortbildungen zur Entfaltung professioneller Kompetenzen von Lehrkräften zum Einsatz digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht illustriert.

2.1 Potenziale dynamischer Darstellungen für die Ausbildung funktionalen Denkens

Den verständigen Umgang mit Funktionen charakterisiert Vollrath (1989) als funktionales Denken. Indikatoren für diese Denkweise sind die situationsangemessene Aktivierung von Grundvorstellungen zu Funktionen sowie ein flexibler Wechsel zwischen verschiedenen Funktionsdarstellungen (Engelhardt und Roth 2022; Günster und Weigand 2022). Der Einbezug von digitalen Werkzeugen wie GeoGebra ermöglicht reale Situationen wie Weg-Zeit-Verläufe digital zu visualisieren (dynamische Darstellung). Dynamische Darstellungen erweitern dadurch das Repertoire an bereits bekannten Funktionsdarstellungen (Arzarello et al. 2012). Besonders bei mathematischen Lerngegenständen mit dynamischem Gehalt, wie die Konstruktion von Weg-Zeit-Graphen, bietet eine dynamische Darstellung funktionaler Zusammenhänge Unterstützungspotenziale für die Ausbildung funktionalen Denkens.

Multi-Repräsentations-Systeme (GeoGebra) erzeugen simultan verschiedene Darstellungen einer Funktion und ermöglichen diese derart zu vernetzen, dass sich Änderungen innerhalb einer Darstellung unmittelbar auf eine andere Darstellung auswirken und so Funktionsdarstellungen deutlich dynamischer erlebt werden können (Günster und Weigand 2022; Barzel et al. 2021). Dabei kommen interaktive Elemente wie Schieberegler, verschiebbare Punkte oder Zahleneingaben zum Einsatz, wodurch Änderungen an einem dargestellten Objekt leicht vorgenommen werden können (Grünig und Vogel 2019). Derartige Dynamisierungen lassen sich im Kontext von zeitbezogenen Graphen nutzen, wenn in den Blick genommen werden soll, wie beispielsweise die Größen Zeit und Weg miteinander im Wechselspiel stehen, d. h. kovariieren. Dabei wird die Kovariationsvorstellung als eine Grundvorstellung von Funktionen angesprochen, welche „die Beziehung zwischen

Wertepaaren und damit das Wechselspiel von unabhängiger und abhängiger Größe über einen gewissen Bereich“ fokussiert (Barzel et al. 2021, S. 82).

Der Vorteil dynamischer Darstellungen bei der Ausbildung der Kovariationsvorstellung gegenüber statischen Repräsentationen ist bereits empirisch belegt (Lichti 2019; Digel et al. 2023; Rolfes 2018). Nach Rolfes (2018, S. 210) bieten dynamische Repräsentationen bei mentalen Simulationen dynamischer Vorgänge Lernvorteile, da sie hier „eine Art Scaffolding für die Konstruktion von adäquaten mentalen Modellen“ darstellen. Für die Entfaltung des Lernpotenzials dynamischer Darstellung ist allerdings deren didaktische Einbettung im Unterricht entscheidend (Digel et al. 2023). Dynamische Darstellungen wirken sich nicht per se auf den Lernerfolg aus, sondern müssen entsprechend didaktisch begründet gestaltet, ausgewählt und methodisch sinnvoll im Unterricht eingesetzt werden (Digel et al. 2023). Einerseits kann dies durch die Einbindung in eine digital-gestützte Lernumgebung umgesetzt werden. Dabei gilt es Qualitätskriterien wie kognitiv aktivierende Aufgabenstellungen, Unterstützung entdeckenden Lernens sowie multimediale Gestaltungsprinzipien zu berücksichtigen (Engelhardt und Roth 2022). Andererseits sollte kognitive Überforderung, insbesondere bei der simultanen Darstellung verschiedener Repräsentationen, vermieden werden. Zur Entlastung des visuellen Kanals dienen u.a. Hilfen, welche die Aufmerksamkeit der Lernenden auf wichtige Aspekte des Materials lenken („Fokussierungshilfe“, Roth 2006, S. 121), eine entsprechend hilfreiche Farbgebung sowie eine dynamische Verknüpfung zwischen verschiedenen Repräsentationsformen („Dyna-Linking“, Ainsworth 2006, S. 14). Obgleich des geschilderten Potenzials birgt der Einsatz dynamischer Darstellungen aber auch potenzielle Risiken für den Lernprozess. Gelingt die gleichzeitige Verarbeitung verschiedener Repräsentation und deren Verknüpfung nicht, kann es beim Verbleib auf einer oberflächigen Beobachtungsebene (Weigand, 1999), zu Fokussierungen auf eine bevorzugte Darstellung (Thurm 2020) sowie zur Wahrnehmung eines Graphen als Bild kommen (Weigand 1999).

Um dynamische Darstellungen sinnvoll in den Mathematikunterricht zu integrieren, braucht es diesbezügliches Wissen und Kompetenzen von Mathematiklehrkräften.

2.2 Digitale Kompetenzen von Mathematiklehrkräften

Lehrkräfte schätzen im Allgemeinen ihre Kompetenzen im Umgang mit digitalen Werkzeugen (digitale Kompetenzen) als eher unzureichend ein und stehen digital-gestütztem Unterricht eher skeptisch gegenüber (Drossel et al., 2019). Dabei gelten sie als entscheidender Innovationsmotor für einen digitalen Wandel in der Schule, z.B. wird ihrem professionellen Wissen bezüglich digitaler Lehr-Lernprozesse eine bedeutsame Rolle zugeschrieben (Seifert et al. 2022). So ist das Gelingen digitaler Lehr-Lernprozesse an den Erwerb digitaler Professionalität von Lehrkräften gekoppelt (Vogelsang et al. 2019; Ostermann et al. 2022). Wenngleich das Konstrukt einer digitalen Professionalität bislang definitorisch unscharf ist, besteht oftmals die Auffassung, dass traditionelle Wissensfacetten wie das von Shulman

(1986) beschriebene pädagogische (PK), fachliche (CK) und fachdidaktisches Wissen (PCK) um die Komponente eines technischen Wissens (TK) ergänzt werden müssen. Daraus resultieren die Schnittmengen TPK, TCK und TPACK, welche im fachunspezifischen Lehrkräftewissensmodell TPACK (Abb. 1) beschrieben werden (Koehler und Mishra 2009).

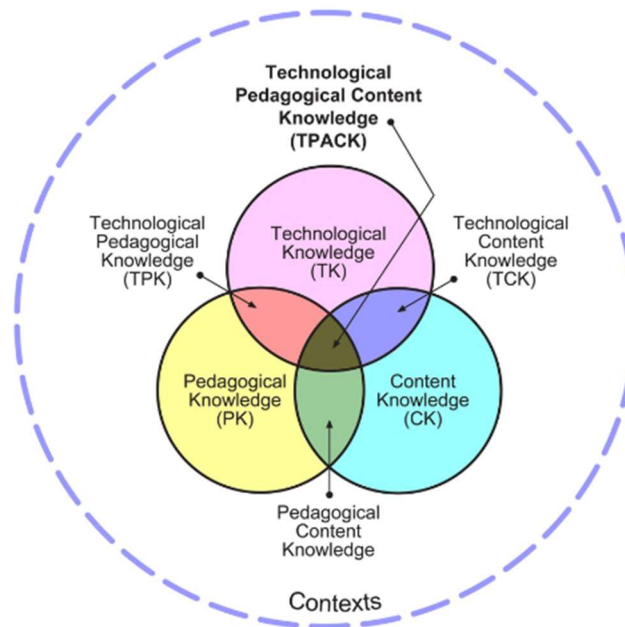


Abbildung 1: TPACK-Modell (Koehler und Mishra 2009, S. 63)

Ein fachdidaktisches Wissen ergänzt um technologiebezogene Aspekte steht im Zentrum des TPACK-Modells. Dieses Konstrukt sehen Mishra und Koehler (2006) als ein Bündel an verschiedenen Fähigkeiten und Wissensfacetten an. Zentral dabei ist das Verständnis, wie technische, inhaltsbezogene und pädagogische Aspekte miteinander verknüpft werden, um guten Unterricht mit Technologien umzusetzen. TPACK beschreibt daher einen Wissenskomplex, bei dem die Gestaltung von Technologie gestützten Lernumgebungen sinnvoll mit dem Wissen um fachspezifische Vermittlungsprozesse kombiniert wird (Schmid und Petko 2020). Es bezieht sich also auf fachdidaktisches Wissen zum Einsatz von Technologien im Fachunterricht (Huwer et al. 2019). Als konkrete Wissensanforderungen im Bereich von TPACK nennen Mishra und Koehler (2006) u.a. das Wissen, wie Technologien konstruktiv in fachspezifische Lehr-Lernprozesse integriert werden können, oder das Wissen, wie Technologie eingesetzt werden kann, um Lernhürden/Schwierigkeiten in konkreten Inhaltsbereichen konstruktiv zu begegnen.

Die Stärke des TPACK-Modells liegt insbesondere in seiner theoretischen Anschlussfähigkeit an bereits bestehende Modelle professionellen Wissens von Lehrkräften sowie seiner leichten visuellen Zugänglichkeit (Schmid und Petko 2020; Voogt et al. 2013). Ungeklärt ist die Frage nach dem Verhältnis der Wissensfacetten zueinander (Kosiol & Ufer, 2020; Schmid & Petko, 2020). So kann TPACK als um technologiebezogene Aspekte erweitertes Wissen, als eigenständige Wissenskomponente oder als ein Zusammenspiel aus den drei Wissensfacetten (TK, PK &

CK) sowie ihren Schnittstellen verstanden werden (Voogt et al. 2013). Insbesondere fehlen im Modell affektiv-motivationale Merkmale wie Selbstwirksamkeitsüberzeugung oder Einstellung gegenüber digitalen Medien, welche in einer positiven Ausprägung nachweislich digital gestütztes Unterrichten unterstützen (Reinhold und Reiss 2020; Ostermann et al. 2022; Thurm 2020).

Zur Beforschung digitaler Kompetenzen von Mathematiklehrkräften gibt es in der deutschsprachigen Literatur Ansätze, spezifische Fähigkeiten im Umgang mit digitalen Werkzeugen in konkreten Anforderungssituationen herauszuarbeiten. So liegt von Engelhardt & Roth (2022) ein theoretisches Modell zur Beschreibung der Fähigkeit zur Beurteilung interaktiver Arbeitsblätter zu funktionalen Zusammenhängen vor. Im Zentrum dieses Modells steht die Frage, inwieweit eine didaktische, methodische oder gestalterische Entscheidung zum Erreichen von Lernzielen beiträgt. Die Fähigkeit zur Beurteilung interaktiver Arbeitsblätter zu funktionalen Zusammenhängen umfasst daher bereichsspezifisches fachdidaktisches Wissen wie auch Wissen zum Aufgabendesign, zu GeoGebra und zudem als Rahmung das Wissen zu multimedialen Gestaltungsprinzipien. Die Beurteilung eines interaktiven Arbeitsblatts erfordert dabei die Fähigkeit alle Wissensfacetten zueinander in Beziehung setzen zu können (Engelhardt und Roth 2022).

Neben dem Herausarbeiten einzelner Fähigkeiten ergeben sich vielversprechende Ansätze zur Erforschung digitaler Kompetenzen von Mathematiklehrkräften durch umfassende Strukturmodelle, die an bereits bestehende Modelle und Theorien anknüpfen und diese erweitern. So entwarfen Tabach und Trgalova (2020) ein Rahmenmodell (Abb. 2) zur Beschreibung digitaler Kompetenzen für technologiegestützten Mathematikunterricht. Ein Vorteil dieses Modells ist die Anschlussfähigkeit an die bereits bestehende Typologie des fachspezifischen Wissens von Mathematiklehrkräften von Ball et al. (2008) ergänzt um digitale Aspekte, die persönliche Orientierung und Ziele, wie Überzeugungen und Selbstwirksamkeitserwartungen sowie die Betrachtung tätigkeitstheoretischer Grundlagen bei der Nutzung von Technologien. Bei letztgenannter Betrachtungsperspektive wird Technologienutzung als Entwicklungsprozess aufgefasst, bei dem künstlich geschaffene Artefakte durch damit ausgeführte Handlungen und dabei entwickelte mentale Schemata zu Instrumenten für die Bewältigung verschiedener Arten von Aufgaben und Problemstellungen verwandelt werden. Ein Instrument ist demnach als psychologisches Konstrukt zu verstehen, welches das Artefakt mit aufgabenbezogenen Schemata verknüpft. Der Entwicklungsprozess vom Artefakt zum Instrument wird durch die instrumentelle Genese (*instrumental genesis*, Drijvers et al. 2010, S. 214) beschrieben. Dabei wirken zwei Entwicklungsprozesse zugleich: Die Instrumentation (Wirkung vom Artefakt auf das Subjekt) und die Instrumentalisation (Wirkung vom Subjekt auf das Artefakt). Für Lehrkräfte gilt das Konzept der doppelt instrumentellen Genese. Lehrkräfte müssen einerseits selbst verstehen, wie eine Technologie in Grundzügen funktioniert und diese bei konkreten Aufgaben anwenden (*personal instrumental genesis*). Andererseits müssen sie Technologien auch als didaktische Instrumente nutzen (*professional instrumental genesis*) (Tabach und Trgalova 2020), d. h. Artefakte didaktisch begründet auswählen, in den Unterricht

mit geeigneten Problemstellungen integrieren und während des Unterrichts digital gestützte Lernprozesse begleiten können (vgl. *instrumental orchestration*, (Drijvers et al. 2010, S. 214).

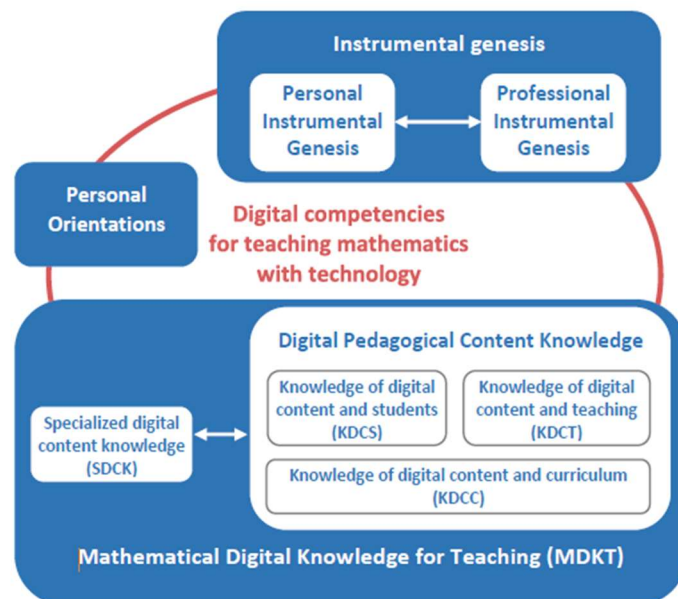


Abbildung 2: Digital competencies for teaching mathematics with technology (Tabach und Trgalova 2020, S. 239)

Vier von sechs Facetten mathematikspezifischen Professionswissens nach Ball et al. (2008) wurden im Modell von Tabach und Trgalova (2020) adaptiert. Dabei wird unter *knowledge of digital content and students* (KDCS), das Wissen zu Lernschwierigkeiten und dem Denken von Schüler*innen im Zusammenhang mit dem Einsatz von Technologien verstanden. Im Gegensatz dazu umfasst *knowledge of digital content and teaching* (KDCT) das Wissen wie Technologien und dabei erzeugte Repräsentationen Lernprozesse unterstützen. Beide Wissensaspekte beschreiben ein fachdidaktisches Wissen im Zusammenhang mit dem Einsatz von Technologien im Mathematikunterricht.

Um bereits praktizierende Lehrkräfte bei der Entwicklung ihrer digitalen Kompetenzen zu unterstützen, bedarf es passender Lerngelegenheiten an Schulen.

2.3 Gestaltungsmerkmale für Fortbildungen zur Förderung digitaler Kompetenzen

Berufsbegleitende Qualifizierungsangebote sind an Schulen dringend notwendig und politisch erwünscht (KMK 2016), bislang aber noch ausbaufähig (Ostermann et al. 2022). Einige Hinweise zur Gestaltung von Fortbildungen mit Fokus auf digitale Kompetenzen von Lehrkräften liefert Thurm (2020). Er führte eine mehrteilige Fortbildung zum Einsatz des grafikfähigen Taschenrechners in der Einführungsphase der gymnasialen Oberstufe durch und schätzt Lernangebote als besonders vorteilhaft ein, die eigenständiges Experimentieren mit digitalen Werkzeugen ermöglichen und theoriebezogen vermitteln, warum und wie digitale Medien und

Werkzeuge Lernaktivitäten unterstützen können. Fortbildungen mit fachdidaktischem Fokus sollten dabei auf ein didaktisch wertvolles Zusammenspiel zwischen klassischem und digitalem Arbeiten eingehen, damit beide Arbeitsweisen nicht als gegensätzlich wahrgenommen werden (ebd.). Dabei untermauert Thurm (2020) die Notwendigkeit, Professionalisierungsmaßnahmen als Teil einer Implementationsstrategie umzusetzen, um Schwierigkeiten gerade zu Beginn eines Implementationsprozesses entgegenzuwirken. Dabei erhöht sich die Chance, Hürden beim digital-gestützten Unterricht als Teil eines natürlichen Lernprozesses anzunehmen. Hierbei sollten insbesondere Selbstwirksamkeitsüberzeugungen durch positive Handlungserfahrungen gefördert werden. Die Implementation digitaler Medien in den Unterricht wird überdies durch die Begleitung von Digitalassistent*innen oder Lehramtsstudierenden höheren Semesters begünstigt. Im groß angelegten Fortbildungsprojekt DigiMath4Edu arbeiten Digitalassistent*innen und Lehrkräfte zusammen an der Umsetzung digitaler Unterrichtskonzepte. Empirische Befunde deuten auf eine positive Wissensentwicklung auf beiden Seiten (Witzke und Dilling 2023). Aus einer Studie von Engelhardt und Roth (2022) zur Förderung digitaler Kompetenzen von Mathematiklehramtsstudierenden bei der Analyse interaktiver Arbeitsblätter ist zudem bekannt, dass Lehramtsstudierende sich danach unterscheiden wie tiefgehend sie verschiedene Wissensfacetten miteinander verknüpfen und in Bezug auf das Lernziel setzen können. Tendenziell scheint ein rein theoretischer Input für die Vernetzung einzelner Wissens Elemente nicht zu genügen, wohingegen die Auseinandersetzung mit *Best- und Worst-Practice*-Beispielen und das Entwickeln eigener interaktiver Arbeitsblätter sich tendenziell positiv auf Beurteilungsprozesse auswirkt (Engelhardt und Roth 2022).

Zusammenfassend stellen sich folgende Merkmale als positiv für die Gestaltung einer Fortbildung zur Förderung digitaler Kompetenzen dar: der Einbezug von Experimentierphasen, die praxisbezogene Vermittlung von fachdidaktischen Theorien zur sinnvollen didaktischen Nutzung digitaler Werkzeuge, die Ermöglichung von Handlungserfahrungen im eigenen Unterricht, die Begleitung/Coachingphasen durch Digitalassistenten sowie die Reflexion über *Best & Worst-Practice*-Beispiele.

3. Das Projekt „4 digit.L“

Das Projekt „4 digit.L“ setzt am Bedarf an berufsbegleitenden Professionalisierungsmaßnahmen für Lehrkräfte und deren Beforschung an. Ziel des Projekts ist die Konzeption, Implementation und Evaluation einer Fortbildung zur Unterstützung digitalen Lehren und Lernens im Mathematikunterricht. Dabei wird untersucht, welchen Einfluss die entwickelte Fortbildung auf die Selbstwirksamkeitserwartungen von Mathematiklehrkräften und auf ihr fachdidaktisches Wissen ohne/mit technologiebezogenem Teil (PCK und TPCK) hat.

3.1 Die Gestaltung der Fortbildung

Die Fortbildung gliederte sich – getrennt von einer Distanzphase – in zwei Teile mit einer Länge von jeweils 180 Minuten. Sie wurde von zwei Hochschul-Mitgliedern mit Forschungsschwerpunkt in der Mathematikdidaktik sowie einem Schulleiter entwickelt und durchgeführt.

Teil 1 (180 min): Grundlagen zum Lehren und Lernen mit digitalen Mathematikwerkzeugen	Lehrkräfte... • analysieren theoriebezogenen GeoGebra-Applets für den Mathematikunterricht (MU) • nennen Kriterien für einen didaktisch sinnvollen Einsatz digitaler Werkzeuge im MU • erkunden digital-gestützte Lernumgebungen und diskutieren ihren didaktischen Mehrwert
Distanzphase (2 Monate): Lehrkräfte setzen Lernumgebungen/Apps im eigenen Unterricht ein.	
Teil 2 (180 min): Unterrichtsentwicklung mit digitalen Werkzeugen	Lehrkräfte... • erkunden weitere digital-gestützte Lernumgebungen und Apps sowie Möglichkeiten digitalen Assessments • diskutieren den Aufbau einer systematischen Nutzung digitaler Werkzeuge im MU als Teil des Schulentwicklungsprozesses

Tab.1: Übersicht der Fortbildungsstruktur und -inhalte

Die Fortbildung richtete sich an Sekundarstufenlehrkräfte, die Interesse an der Umsetzung eines digital-gestützten Mathematikunterricht hatten. Der erste Fortbildungsteil fokussierte eine theoriebezogene Auseinandersetzung mit verschiedenen Aspekten des Lehrens und Lernens von Mathematik mit digitalen Werkzeugen. Nach der eigene Positionierung, wie und in welcher Intensität bereits digitale Werkzeuge im eigenen Mathematikunterricht zum Einsatz kamen, wurden online verfügbare GeoGebra-Applets mithilfe bestehender Theorien zum digitalen Lehren und Lernen (z.B. Cognitive-Load-Theorie) analysiert. Auf dieser Grundlage wurden mögliche Gefahren für den Lernprozess diskutiert und Leitfragen für die Auswahl didaktisch sinnvoller digitaler Mathematikwerkzeuge formuliert. Einen großen Teil der Fortbildung verbrachten die Lehrkräfte mit dem Erkunden von „ready to use“ – digital-gestützten Lernumgebungen zur Förderung funktionalen Denkens. Ein Teil dieser digital-gestützten Lernumgebungen sind unter www.fun-think.eu abrufbar. In der Distanzphase sollte jede Lehrkraft ein digitales Werkzeug im eigenen Unterricht einsetzen. Daher standen bei den Überlegungen zur Planung des Werkzeugeinsatzes fachdidaktische Fragestellungen wie „Wie hilft der Werkzeugeinsatz beim Erreichen von spezifischen fachlichen Inhalts- und Prozesszielen?“ im Fokus.

Im zweiten Teil der Fortbildung wurde ein Austausch über die eingesetzten Werkzeuge angeregt. Am Beginn konnten die Lehrkräfte nochmals, digital-gestützte Lernumgebungen sowie nützliche Apps für den Mathematikunterricht ausprobieren. Ebenso wurden wissenschaftlich fundierte Diagnosetools und die Idee eines

Makerspace vorgestellt sowie der Aufbau einer systematischen Nutzung digitaler Werkzeuge als Teil eines Schulentwicklungsprozesses diskutiert. Während der gesamten Fortbildung wurde zudem darauf geachtet, die Fortbildung mithilfe digitaler Medien (z.B. H5P zur interaktiven Wiederholung von Grundvorstellungen zu Funktionen) zu gestalten.

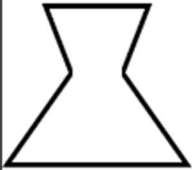
3.2 Instrumente zur Evaluation der Fortbildung

In der fortbildungsflankierenden Befragung wurden Selbstwirksamkeits-erwartungen sowie Aspekte fachdidaktischen Wissen von Mathematiklehrkräften ohne/mit technologiebezogenem Teil (PCK & TPCK) erhoben.

Die Selbstwirksamkeitserwartung wurden mittels Selbstberichten in einem Fragebogen (4-stufiges Antwortformat: 1 = „stimmt nicht“, 4 = „stimmt genau“) erhoben. Dazu wurde eine bestehende Skala von Ostermann et al. (2021) zu Aspekten der Planung und Durchführung von Unterricht mit digitalen Medien allgemein mit sechs Items eingesetzt. Pro Item wurde durchgehend ein Aspekt digitalen Unterrichtens mit einer potenziellen Schwierigkeit bei dieser Handlung verknüpft (z. B. „Ich kann den Einsatz eines digitalen Mediums im Fachunterricht didaktisch begründen, auch wenn ich dieses digitale Medium noch nicht selbst eingesetzt habe.“).

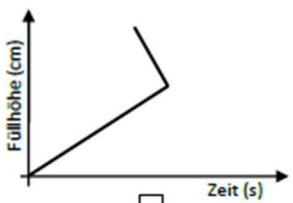
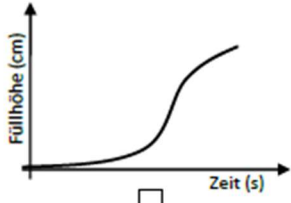
Zur Operationalisierung fachdidaktischen Wissens ohne technologiebezogenen Teil (PCK) wurde auf Items von Sproesser et al. (2020) zurückgegriffen. Dabei wurden Items eingesetzt, die das Wissen bezüglich möglicher Lernschwierigkeiten im Bereich elementarer Funktionen (KCS) sowie das Wissen über den didaktischen Umgang mit Lernschwierigkeiten in diesem Bereich (KCT) erfassen. Anhand einer konkreten Aufgabe wurde eine offene Frage nach erwarteten Fehlern/Lernschwierigkeiten gestellt (Abb. 3) sowie typische Fehler (Graph-als-Bild-Fehler & Überbetonung der Textreihenfolge) vorgelegt, zu denen Lehrkräfte Stellung nehmen sollten.

Aufgabe



Eine Blumenvase mit Einbuchtung (siehe Abbildung) wird durch einen gleichmäßigen Wasserstrahl gefüllt.

Welcher Graph drückt den Zusammenhang zwischen Zeit und Füllhöhe am besten aus?



Welche typischen Fehler/ Lernschwierigkeiten erwarten Sie aus Ihrer Erfahrung bei dieser Aufgabe?

Abbildung 3: Beispielimitem KCS (Sproesser et al. 2020)

Zur Operationalisierung fachdidaktischen Wissens mit technologiebezogenem Teil (TPCK) wurden neue Items zur Erfassung von KDCS und KDCT entwickelt. Abbildung 4 zeigt ein Item zur Erfassung von KDCS. Dabei werden Lehrkräfte aufgefordert, in Bezug auf das Applet „Graphen gehen“ zu überlegen, zu welchen möglichen Schwierigkeiten es bei der Nutzung dieses Applets kommen kann.

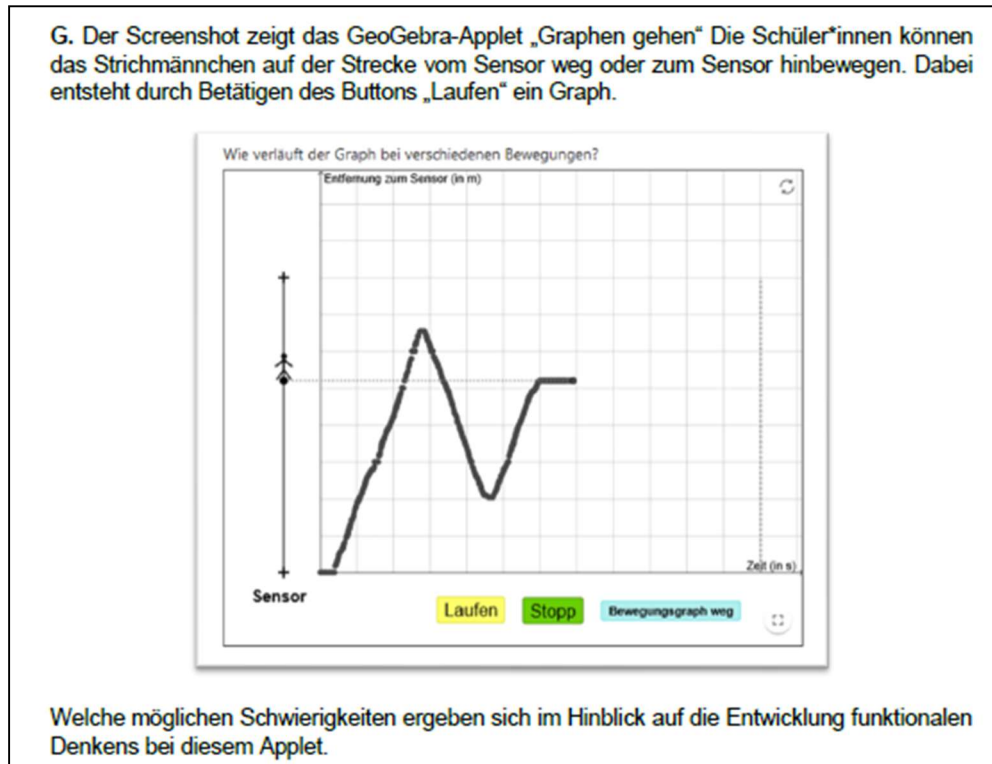


Abbildung 4: Beispielitem KDCS (Eigenentwicklung)

Pilotierungen dieses Applets haben gezeigt, dass einige Lernende in einer spontanen Aufgabenstellung einer Lehrkraft („Erstellt einen Graphen und überlegt euch eine Geschichte dazu“) dazu neigten, die typische Fehlvorstellung „Graph-als-Bild-Fehler“ zu aktivieren. Dabei handelt es sich um einen Interpretationsfehler beim situativ-graphischen Darstellungswechsel, der im Kontext von Bewegungsabläufen und allgemein bei dynamischen Prozessen häufig durch die dargestellte Situation und ihre visuellen Merkmale provoziert wird (Ruchniewicz 2022). Das Auftreten dieses Fehlers wird u.a. im Zusammenhang mit unzureichenden Alltagsvorstellungen in Bezug auf die in einer konkreten Situation dargestellten Größen und deren gemeinsame Veränderung gesehen (Ruchniewicz 2022). Bei der beschriebenen Umsetzung einer spontanen Aufgabenstellung hat beispielsweise ein Schüler/eine Schülerin einen Graphen als reales Abbild einer Parcours-Strecke interpretiert. Die Realsituation („Ein Schüler läuft vor einen Sensor“) wurde dabei umgedeutet in die Situation eines Parcourlaufs. Die Verharrung des Strichmännchens auf einem Punkt der Strecke wurde dabei nicht als Pausieren, sondern als gerade laufen interpretiert. Es besteht die Annahme, dass hierbei neben Missachtung der verwendeten Größen, die Fokussierungshilfe durch die gestrichelte Linie

den Graph-als-Bild-Fehler provoziert. Ungünstig erscheint die zur y-Achse parallele Lage der Strecke, auf der sich ein Punkt bewegen lässt. Anstelle einer vertikalen Darstellung wäre eine horizontale Darstellung daher günstiger.

4. Erste Eindrücke und Ausblick

Die Rückmeldung zur Fortbildung war positiv, wenngleich die Umsetzung digital-gestützter Lehr-Lernprozesse in der Distanzphase den meisten Mathematiklehrkräften nicht gelang. Oft wurde der Wunsch nach einem niedrigschwelligen Einstieg in das digital-gestützte Unterrichten von Mathematik geäußert, der wenig Veränderung an der eigenen Unterrichtsweise mit sich bringt. Die Überarbeitung der Fortbildungen sieht daher eine kooperative Zusammenarbeit zwischen Lehramtsstudierenden und bereits praktizierenden Lehrkräften vor. Gemeinsam soll ein Konzept für eine digital-gestützte Mathematikstunde entwickelt und umgesetzt werden. Ausgangspunkt für das Unterrichtskonzept ist dabei immer die Frage: Wie hilft der Einsatz eines digitalen Werkzeugs beim Erwerb inhaltsbezogener und prozessbezogener Kompetenzen? In der Distanzphase haben Lehrkräfte dann die Möglichkeit bei der Umsetzung von digitalen Unterrichtskonzepten durch Lehramtsstudierende begleitet zu werden. Derartige kooperative Strukturen wirken sich nachweislich positiv auf die professionelle Kompetenzentwicklung bei Lehrkräften aus (Witzke und Dilling 2023).

In diesem Beitrag wurde aufgezeigt, wie eine Fortbildung zur Förderung digitaler Lehrkompetenz gestaltet werden kann. Dabei wurden verschiedene Modelle und Konzepte aus der nationalen und internationalen Forschung zur Beschreibung digitaler Kompetenzen von Mathematiklehrkräften integriert. Bei der Operationalisierung des Wissens zum Schüler*innendenken und zu geeigneten Lehrprozessen im Zusammenhang mit dem Einsatz von GeoGebra-Applets mit dynamischem Gehalt, wurde auf das Modell von Tabach und Trgalova (2020) zurückgegriffen und entsprechende offene Items entwickelt. Zur Auswertung der offenen Items wurden Kategoriensysteme deduktiv und induktiv erstellt. In einem nächsten Schritt werden diese überarbeitet und fertiggestellt.

Besonderer Dank gilt den Lehrkräften und der Schulleitung der Matern-Feuerbacher-Realschule in Großbottwar und Thomas Laudes für die Mitwirkung an der Fortbildung. Zudem sei der *Professional School of Education* Stuttgart-Ludwigsburg (PSE) und dem Ministerium für Wissenschaft, Forschung und Kunst Baden-Württemberg für die finanzielle Förderung dieses Projekts gedankt.

Literatur:

- Ainsworth, Shaaron (2006): DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. In: *Learning and Instruction* 16 (3), S. 183–198. DOI: 10.1016/j.learninstruc.2006.03.001.
- Arzarello, F.; Ferrara, F.; Robutti, O. (2012): Mathematical modelling with technology: the role of dynamic representations. In: *Teaching Mathematics and its Applications* 31 (1), S. 20–30. DOI: 10.1093/teamat/hrr027.
- Barzel, Bärbel (2019): Digitalisierung als Herausforderung an Mathematikdidaktik - gestern. heute. morgen. In: Guido Pinkernell und Florian Schacht (Hg.): Digitalisierung fachbezogen gestalten. Arbeitskreis Mathematikunterricht und digitale Werkzeuge in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Herbsttagung vom 28. bis 29. September 2018 an der Universität Duisburg-Essen. 1. Auflage. Hildesheim: Verlag Franzbecker, S. 1–10, zuletzt geprüft am 05.10.2023.
- Barzel, Bärbel; Glade, Matthias; Klinger, Marcel (2021): Algebra und Funktionen. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Digel, Susanne; Engelhardt, Alex; Roth, Jürgen (2023): Digital gerahmte Experimentierungsumgebungen als dynamischer Zugang zu Funktionen. In: Jürgen Roth, Michael Baum, Katja Eilerts, Gabriele Hornung und Thomas Trefzger (Hg.): Die Zukunft des MINT-Lernens – Band 2. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, S. 1–16.
- Drijvers, Paul; Doorman, Michiel; Boon, Peter; Reed, Helen; Gravemeijer, Koen (2010): The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. In: *Educ Stud Math* 75 (2), S. 213–234. DOI: 10.1007/s10649-010-9254-5.
- Engelhardt, Alex; Roth, Jürgen (2022): Beurteilungsprozesse angehender Lehrkräfte bei der Analyse interaktiver Arbeitsblätter. In: Frank Reinhold und Florian Schacht (Hg.): Digitales Lernen in Distanz und Präsenz: Herbsttagung 2021 des Arbeitskreises Mathematikunterricht und digitale Werkzeuge in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik am 24.09.2021. Unter Mitarbeit von DuEPublico: Duisburg-Essen Publications online, University of Duisburg-Essen, Germany, Frank Reinhold und Florian Schacht: DuEPublico: Duisburg-Essen Publications online, University of Duisburg-Essen, Germany, S. 33–40, zuletzt geprüft am 04.10.2023.
- Grünig, Fabian; Vogel, Markus (2019): Aufgabenanalyse zur Bestimmung des Unterstützungspotenzials von dynamisierten Darstellungsumgebungen - Theoriebasierte Entwicklung einer Entscheidungsheuristik für Lehrkräfte. In: Guido Pinkernell und Florian Schacht (Hg.): Digitalisierung fachbezogen gestalten. Arbeitskreis Mathematikunterricht und digitale Werkzeuge in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Herbsttagung vom 28. bis 29. September 2018 an der Universität Duisburg-Essen. 1. Auflage. Hildesheim: Verlag Franzbecker, S. 39–54, zuletzt geprüft am 05.10.2023.
- Günster, Stephan Michael; Weigand, Hans-Georg (2022): Der Beitrag digitaler Werkzeuge zur Entwicklung des Funktionsbegriffs und des funktionalen Denkens. In: Guido Pinkernell, Frank Reinhold, Florian Schacht und Daniel Walter (Hg.): Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, S. 163–188.
- Hill, Heather C.; Ball, Deborah Loewenberg; Schilling, Stephen G. (2008): Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-

- Specific Knowledge of Students. In: *Journal for Research in Mathematics Education* 39 (4), S. 372–400.
- Huwer, Johannes; Irion, Thomas; Kuntze, Sebastian; Schaal, Steffen; Thyssen, Christoph (2019): Von TPaCK zu DPaCK - Digitalisierung im Unterricht erfordert mehr als technisches Wissen. In: *MNU Journal* (Ausgabe 05), S. 358–364.
- KMK (2016): Bildung in der digitalen Welt. Strategie der Kultusministerkonferenz. Online verfügbar unter https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/pdf/PresseUndAktuelles/2018/Digitalstrategie_2017_mit_Weiterbildung.pdf, zuletzt geprüft am 03.10.2023.
- KMK (2021): Lehren und Lernen in der digitalen Welt. Die ergänzende Empfehlung zur Strategie "Bildung in der digitalen Welt". Online verfügbar unter https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschlusse/2021/2021_12_09-Lehren-und-Lernen-Digi.pdf, zuletzt geprüft am 03.10.2023.
- Koehler, Matt; Mishra, Punya (2009): What Is Technological Pedagogical Content Knowledge? In: *Contemporary <issues in Technology and Teacher Education* 9 (1), S. 60–70. Online verfügbar unter https://www.researchgate.net/publication/241616400_What_Is_Technological_Pedagogical_Content_Knowledge.
- Lichti, Michaela (2019): Funktionales Denken fördern. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.
- Mishra, Punya; Koehler, Matthew J. (2006): Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge. In: *Teachers College Record* 108 (6), S. 1017–1054. DOI: 10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x.
- Ostermann, Anje; Ghomi, Mina; Mühling, Andreas; Lindmeier, Anke (2022): Elemente der Professionalität von Lehrkräften in Bezug auf digitales Lernen und Lehren von Mathematik. In: Guido Pinkernell, Frank Reinhold, Florian Schacht und Daniel Walter (Hg.): *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, S. 59–90.
- Reinhold, Frank; Reiss, Kristina (2020): Relevanz, Selbstwirksamkeit und Ängstlichkeit bezogen auf das Unterrichten von Mathematik mit digitalen Medien. In: Kai Kaspar, Michael Becker-Mrotzek, Sandra Hofhues, Johannes König und Daniela Schmeinck (Hg.): *Bildung, Schule, Digitalisierung*: Waxmann Verlag GmbH, S. 96–102.
- Rolfes, Tobias (2018): Funktionales Denken. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden.
- Roth, Jürgen (2006): *Bewegliches Denken im Mathematikunterricht*. Zugl.: Würzburg, Univ., Diss., 2005. Hildesheim: Franzbecker (Texte zur mathematischen Forschung und Lehre, 44). Online verfügbar unter <https://juergen-roth.de/publikationen/bewegliches-denken-im-mathematikunterricht/>, zuletzt geprüft am 10.10.2023.
- Roth, Jürgen; Eilerts, Katja; Baum, Michael; Hornung, Gabriele; Trefzger, Thomas (2023): Die Zukunft des MINT-Lernens-Herausforderungen und Lösungsansätze. In: Jürgen Roth, Michael Baum, Katja Eilerts, Gabriele Hornung und Thomas Trefzger (Hg.): *Die Zukunft des MINT-Lernens – Band 1, Bd. 1*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, S. 1–42, zuletzt geprüft am 06.10.2023.
- Ruchniewicz, Hana (2022): *Sich selbst diagnostizieren und fördern mit digitalen Medien. Forschungsbasierte Entwicklung eines Tools zum formativen Selbst-Assessment funktionalen Denkens*. 1st ed. 2022. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden;

- Springer Spektrum (Essener Beiträge zur Mathematikdidaktik). Online verfügbar unter <https://ebookcentral.proquest.com/lib/kxp/detail.action?docID=6888364>.
- Schmid, Mirjam; Petko, Dominik (2020): <Technological Pedagogical Content Knowledge> als Leitmodell medienpädagogischer Kompetenz. In: *MedienPädagogik*, S. 121–140. DOI: 10.21240/mpaed/jb17/2020.04.28.X.
- Seifert, Hannes; Ghomi, Mina; Mühling, Andreas; Lindmeier, Anke (2022): Entwicklung eines Instruments zur Messung digitaler Kompetenzen von (angehenden) Mathematiklehrkräften. In: Frank Reinhold und Florian Schacht (Hg.): Digitales Lernen in Distanz und Präsenz: Herbsttagung 2021 des Arbeitskreises Mathematikunterricht und digitale Werkzeuge in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik am 24.09.2021. Unter Mitarbeit von DuEPublico: Duisburg-Essen Publications online, University of Duisburg-Essen, Germany, Frank Reinhold und Florian Schacht: DuEPublico: Duisburg-Essen Publications online, University of Duisburg-Essen, Germany, S. 117–124.
- Sproesser, Ute; Vogel, Markus; Dörfler, Tobias (2020): Typische Lernschwierigkeiten mit Darstellungswechseln bei elementaren Funktionen - Welche Schwierigkeiten kennen Lehrkräfte und wie schätzen sie Aufgabenbearbeitungen ihrer Klassen ein? In: *Mathematik Didactica* 43, S. 175–198. Online verfügbar unter http://www.mathematica-didactica.com/Pub/md_2020/2020/ges/md_2020_Sproesser.pdf, zuletzt geprüft am 09.10.2023.
- Tabach, Michal; Trgalova, Jana (2020): Teaching Mathematics in the Digital Era: Standards and Beyond. In: Yifat Ben-David Kolikant, Dragana Martinovic und Marina Milner-Bolotin (Hg.): *STEM Teachers and Teaching in the Digital Era*. Cham: Springer International Publishing, S. 221–242.
- Thurm, Daniel (2020): Digitale Werkzeuge Im Mathematikunterricht Integrieren. Zur Rolle Von Lehrerüberzeugungen und der Wirksamkeit Von Fortbildungen. Wiesbaden: Spektrum Akademischer Verlag GmbH (Essener Beiträge Zur Mathematikdidaktik Ser).
- Vogelsang, Christoph; Finger, Alexander; Laumann, Daniel; Thyssen, Christoph (2019): Vorerfahrungen, Einstellungen und motivationale Orientierungen als mögliche Einflussfaktoren auf den Einsatz digitaler Werkzeuge im naturwissenschaftlichen Unterricht. In: *ZfDN* 25 (1), S. 115–129. DOI: 10.1007/s40573-019-00095-6.
- Vollrath, Hans-Joachim (1989): Funktionales Denken. In: *Journal für Mathematikdidaktik* 10, S. 3–37.
- Voogt, J.; Fisser, P.; Pareja Roblin, N.; Tondeur, J.; van Braak, J. (2013): Technological pedagogical content knowledge - a review of the literature. In: *Journal of Computer Assisted Learning* 29 (2), S. 109–121. DOI: 10.1111/j.1365-2729.2012.00487.x.
- Weigand, Hans-Georg (1999): Eine explorative Studie zum computerunterstützten Arbeiten mit Funktionen. In: *JMD* 20 (1), S. 28–54. DOI: 10.1007/BF03338882.
- Witzke, Ingo; Dilling, Frederik (2023): Digitale Transformation als gemeinsame Aufgabe für alle Phasen der Lehrer*innenbildung. In: IDMI-Primar Goethe-Universität Frankfurt (Hg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2022*. 56. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik: WTM-Verlag Münster, S. 1389–1392. Online verfügbar unter https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/41488/1/BzMU22_1389.pdf.

Tim Läufer, Simone Jablonski & Matthias Ludwig

Goethe-Universität Frankfurt am Main, laeuer@math.uni-frankfurt.de,
jablonski@math.uni-frankfurt.de, ludwig@math.uni-frankfurt.de

Erstelle deinen Messeturm! – Modellierungsprozesse von Schüler*innen mit 3D-Druck-Technologie

*Einzigartige Bauten finden sich in jeder Stadt und können als Grundlage für realitätsbezogene Mathematikaufgaben dienen. In diesem Beitrag stellen wir vor, wie wir mithilfe von 3D-Druck-Technologie den Frankfurter Messeturm als Ausgangspunkt für einen mathematischen Modellierprozess innerhalb eines Begabtenförderungsprogramms nutzen. Weiterhin zeigen wir die Produkte der Schüler*innen und analysieren deren Modellierungsschritte im Detail. Durch qualitative Analyse der schriftlichen Dokumentationen kann eine Fokussierung auf die Modellierungsschritte „Vereinfachen und Strukturieren“ sowie „Mathematisieren“ beschrieben werden. Dies bestätigt sich auch in der Analyse eines eingesetzten Fragebogens zur Wahrnehmung der Lerneinheit durch die Schüler*innen.*

1. Einleitung

3D-Druck bietet als neue Technologie viele Vorteile – sie muss sich aber zugleich als valides Werkzeug mit Potenzial für den Mathematikunterricht behaupten. In diesem Beitrag stellen wir einen Ansatz vor, bei dem wir das Potenzial der 3D-Druck-Technologie in Verbindung mit mathematischem Modellieren im Rahmen eines Begabtenförderungsprogramms untersuchen. Zu Beginn wird die theoretische Basis eröffnet, um anschließend Forschungsfragen und Methodik darzulegen. Anschließend werden die Produkte und Niederschriften der Schüler*innen hingehend der vorgefundenen Modellierungsschritte analysiert.

2. 3D-Druck-Technologie

3D-Druck-Technologie ist eine Form von additiver Fabrikation, die in den vergangenen Jahren viel Aufsehen erlangt hat, und in den unterschiedlichsten Bereichen, so auch in der Bildung, Einzug gefunden hat (vgl. Ford & Minshall, 2019 und Pearson & Dubé, 2022). Während im internationalen Bereich Mathematik nicht im Fokus steht (ebd.), findet sich im deutschsprachigen Raum stetig wachsende Forschung im Bereich der Mathematikdidaktik (bspw. Dilling et al., 2021). In der im Bildungsbereich gängigsten Form davon, dem Fusion Deposition Modeling (Epprecht & Lütolf, 2019), wird Plastik („Filament“) geschmolzen und durch einen durch Motoren beweglichen Druckkopf auf die vorigen Schichten aufgetragen. Durch sie werden digitale 3D-Modelle (D3DM) zu physischen 3D-Modellen (P3DM).

D3DM sind entweder im Internet herunterladbar oder müssen selbst erstellt werden, (u. a.), wenn die Modelle im Internet nicht auffindbar sind. Zum Erstellen eines D3DM gibt es viele verschiedene Programme. Eines der verbreitetsten ist

Tinkercad, welches sich durch u. a. seine intuitive und bereits für Primarstufenschüler*innen geeignete Anwendung auszeichnet.

Bevor ein D3DM erstellt werden kann, müssen aber gewisse Vorgaben und Informationen gegeben sein: Was soll es für ein 3D-Modell werden? Welchen Zweck soll es erfüllen? Was kann der 3D-Drucker drucken? Welche Maße darf das Modell haben? Die Beantwortung u. a. dieser Fragen steht oft zu Beginn der Projektarbeit mit dem 3D-Drucker, bei dem Lernende innerhalb abgesteckter Rahmenbedingungen sich eigene Antworten darauf bilden können, und so eine problemorientierte Arbeitsweise erlernen und anwenden.

Die genannten Schritte inkl. der (Zwischen-) Ergebnisse, sowie die dafür nötigen Tools, können innerhalb eines Phasenmodells (Abb. 1) dargelegt werden.

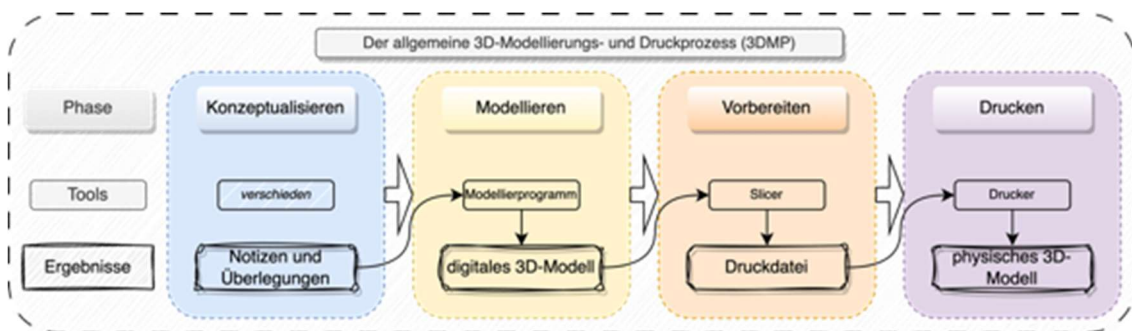


Abbildung 1: Der allgemeine 3D-Modellierungs- und Druckprozess (vgl. Läufer & Ludwig, 2023)

3. Mathematisches Modellieren

Eine bedeutende Komponente im dargestellten Prozess (vgl. Abbildung 1) ist das mathematische Modellieren, welches trotz ähnlicher Bezeichnung zunächst nicht nur mit dem 3D-Modellieren (3DM) im Sinne eines Nachbaus gleichgesetzt werden darf. Im Kontext von Mathematikunterricht verfolgt Modellieren das Ziel, Schüler*innen den Bezug von Realität und Mathematik zu verdeutlichen und ihnen aufzuzeigen, wo Mathematik im alltäglichen Leben angewendet werden kann (Blum & Leiß, 2007). Eine Modellierungsaufgabe intendiert demnach die Nutzung von Mathematik bei einer realitätsnahen und anwendungsbezogenen Aufgabenstellung. Um den Lösungsprozess von Schüler*innen einer solchen Aufgabe zu beschreiben und zu analysieren, gibt es verschiedene Darstellungsformen. Die wohl populärste ist die Darstellungsform eines Modellierungskreislaufs, der sich aus mehreren von den Schüler*innen zu absolvierenden Schritten zusammensetzt. Am Beispiel des siebenschrittigen Modellierungskreislaufs von Blum & Leiß (2005) soll dies verdeutlicht werden (siehe Abbildung 2).

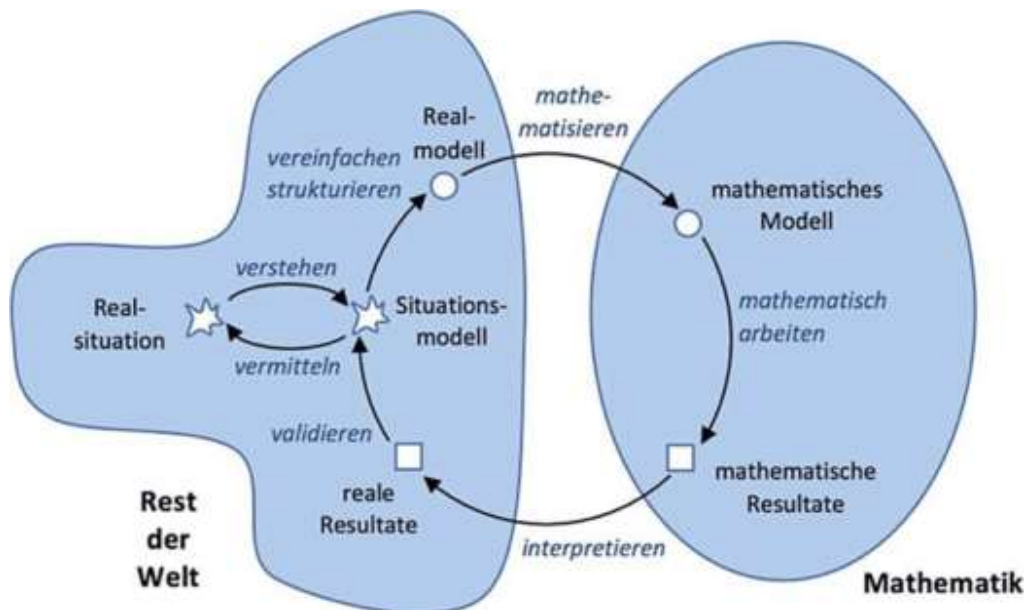


Abbildung 2: Siebenschrittiger Modellierungskreislauf (Blum & Leiß, 2005, S. 19).

Auch wenn der Kreislauf eine idealisierte Form eines Modellierungsprozesses darstellt (Borromeo Ferri, 2010), lassen sich die relevanten Schritte hiermit zusammenfassen: Um eine Modellierungsaufgabe zu lösen, starten die Schüler*innen in der Regel damit, dass eine reale Situation verstanden wird. Danach wird der Transfer in die Mathematik durch Vereinfachungen und Strukturierungen vorgenommen. Es wird zum Beispiel entschieden, welche Informationen wichtig oder unwichtig sind. Der Übergang von der Realität in die Mathematik wird als Mathematisierung bezeichnet und beschreibt den Übergang eines realen, vereinfachten Modells in ein mathematisches. In der Mathematik angekommen, wird mathematisch gearbeitet, was zu einem mathematischen Resultat führt. Dieses wird durch Interpretation zurück in die Realität transferiert, wo es letztlich validiert und präsentiert wird (vgl. Blum & Leiss, 2007). Je nachdem, wie das Ergebnis eingeordnet wird, kann der Kreislaufcharakter des Modellierens zum Tragen kommen und ein weiterer Durchlauf gestartet werden um das Modell zu optimieren.

Die Forschungs- und Praxisbeiträge zum Modellieren verfolgen das Ziel, mathematische Modellierungsaufgaben gewinnbringend in den Unterricht zu integrieren (vgl. Barquero et al., 2022). Eine Innovation ist hierbei die Einbindung und Nutzung von digitalen Technologien und Tools. Greefrath et al. (2018) nennen verschiedene Nutzungsszenarien, z. B. Dynamische Geometriesoftware für Visualisierungen von Situationen und Modellen, Kalkulationssoftware zur Simulation von Modellen oder Feedbacktools, welche den Validierungsschritt der Schüler*innen initiieren und unterstützen. Ein weiteres Anwendungsgebiet ist die Einbindung von 3D-Elementen, wie es El Bedewy et al. (2022) mit GeoGebra am Beispiel Architektur im Kontext von 3DMP (aus dem Englischen: 3D-Modellierung und – Druck; siehe Anđić et al., 2023) umsetzen.

4. Forschungsfragen

Das Forschungsinteresse dieses Artikels ergibt sich einerseits aus dem Ziel, digitale Tools für das mathematische Modellieren einzusetzen. Weiterhin sollen aktuelle Forschungsbeiträge zur Verbindung von 3D-Druck Technologie und Modellieren erweitert werden. Um beidem gerecht zu werden, sollen die Modellierungsaktivitäten von Schüler*innen bei der Erstellung eines 3D-Modells beobachtet und analysiert werden. Wie bereits erwähnt, obliegt der Fokus dem Themenbereich Architektur. Als Kontext der Aufgabe wurde der 257 Meter hohe Messeturm in Frankfurt (Main) gewählt (siehe Abbildung 3), da er einerseits durch seine markante Form geometrische Möglichkeiten eröffnet und darüber hinaus in der Nähe der Universität Frankfurt steht und damit im Rahmen einer Modellierungseinheit besucht werden kann. Die genaue Aufgabenstellung und Materialien werden im Rahmen der Beitragsmethode beschrieben.

Um die Forschungsfragen des Artikels herzuleiten, werden in Abbildung 4 verschiedene theoretische Überlegungen zusammengefasst. In der Mitte wird der generelle 3DMP-Prozess (vgl. Anđić et al., 2022), vereinfacht durch Läufer und Ludwig (2023) dargestellt. In der vereinfachten Version wurden nur die „Hauptschritte“ dargestellt. Auf der linken Seite wurden die Schritte des Modellierungskreislaufs nach Blum & Leiss (2007) ergänzt und theoretisch mit dem 3DMP-Prozess in Verbindung gesetzt. Weiterhin wird auf der rechten Seite der theoretisch erwartete Modellierungsprozess der Schüler*innen für die Aufgaben zum Messeturm präsentiert. Diese Aufgabenstruktur wurde in die Perspektiven der Schüler*innen und Lehrkraft (in diesem Beitrag durch die Autor*innen durchgeführt) aufgeteilt. Aus Sicht der Schüler*innenperspektive lässt sich damit eine starke Betonung der Modellierungsschritte Vereinfachen und Strukturieren (Notizen am Turm), Mathematisieren (Arbeit mit der 3D-Software) und Validieren erwarten.



Abbildung 3: Der Messeturm in Frankfurt am Main.

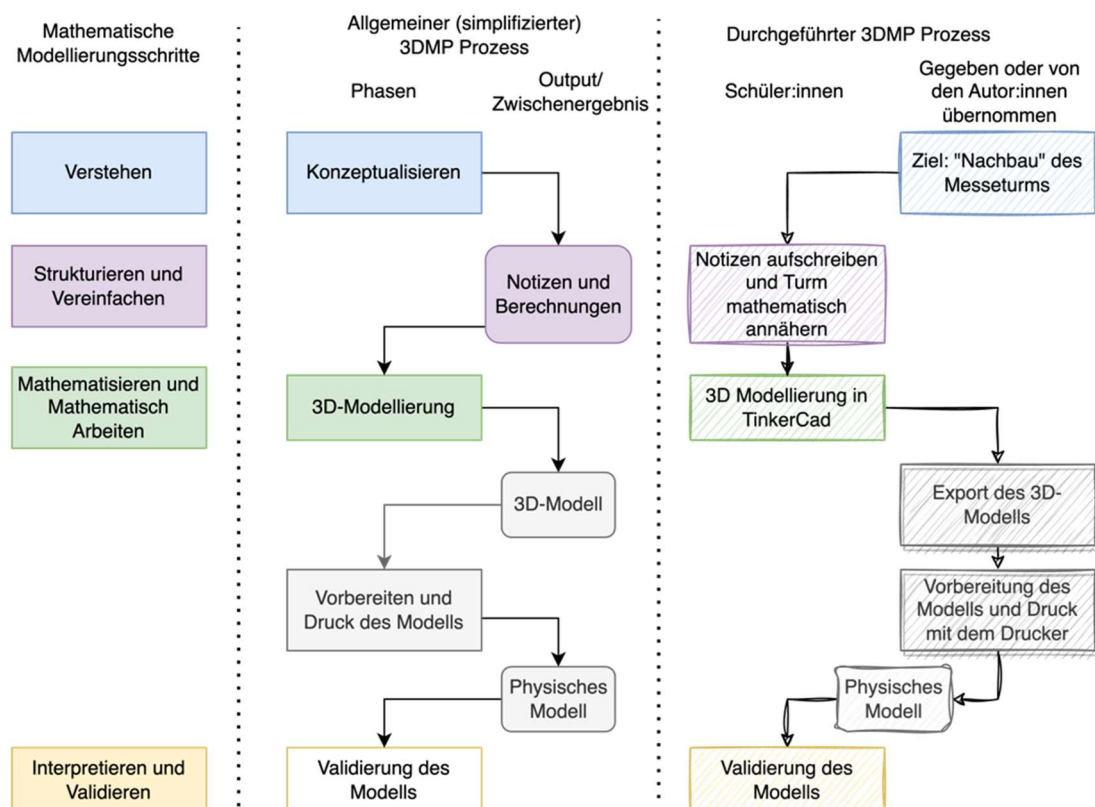


Abbildung 4: Die identifizierten mathematischen Modellierungsschritte, die Phasen des 3DMP-Prozesses, in dem diese aufgetreten sind, und welche Elemente die Schüler*innen oder Autor*innen durchgeführt haben.

Für die Forschungsfragen des Artikels wird der Fokus auf diese drei Schritte gelegt. Weiterhin wird die Aufteilung in eine beobachtende und Lernendenperspektive beibehalten. Die erste Forschungsfrage nimmt die beobachtende Perspektive in den Fokus: *Was charakterisiert die Modellierungsschritte Vereinfachen und Strukturieren, Mathematisieren und Validieren im 3DMP-Prozess von Schüler*innen?* Diese Frage wird dahingehend ergänzt, dass auch die Wahrnehmung der Schüler*innen in Bezug auf Eigenschaften des Modellierungsprozesses berücksichtigt wird: *Wie nehmen Schüler*innen die Bearbeitung der Modellierungsaufgabe in Bezug auf einen Realitätsbezug, Interesse und ausgewählte Modellierungsschritte wahr?*

5. Methode

5.1 Studienkontext

Um die Forschungsfragen zu beantworten, wurde eine Studie mit 27 Schüler*innen aus dem Programm *Junge Mathe-Adler Frankfurt* der Klassenstufen 7 und 8 durchgeführt. Das Programm richtet sich an mathematisch begabte und interessierte Schüler*innen aus dem Stadtgebiet Frankfurt. Im zweiwöchigen Rhythmus kommen die Schüler*innen einer Klassenstufe an der Goethe-Universität Frankfurt zu sogenannten *Forscherstunden* zusammen, um an mathematischen Themen

abseits des Mathematikunterrichts zu arbeiten (vgl. Jablonski, 2021). Langfristiges Ziel ist, das mathematische Interesse der Schüler*innen aufrecht zu halten und ihnen die Anwendungsmöglichkeiten von Mathematik zu verdeutlichen (Käpnick, 2001). Im Rahmen von drei Forscherstunden wurde sowohl mit der Klasse 7 (n=11) als auch mit der Klasse 8 (n=16) ein 3D-Druck-Projekt durchgeführt, dessen Ablauf wir im Folgenden beschreiben.

5.2 Sitzungen und Arbeitsblätter

In beiden Klassenstufen (7 und 8) wurden jeweils drei Sitzungen durchgeführt. Sitzung 1 begann mit einer Einführung in die Thematik mithilfe eines gedruckten Modells des Messegeländes in Frankfurt, in welchem sich auch der Messeturm (siehe Abbildung 5) befindet. Erstellt wurde das Modell mit frei verfügbaren Daten von OpenStreetMap (www.openstreetmap.org), darin sind die Sehenswürdigkeiten, wie der Messeturm, nur angenähert – bspw. durch einen Quader – enthalten. Das nutzten wir als Einstieg, um eine detailliertere Rekonstruktion des Messeturms in den folgenden Sitzungen herzustellen.

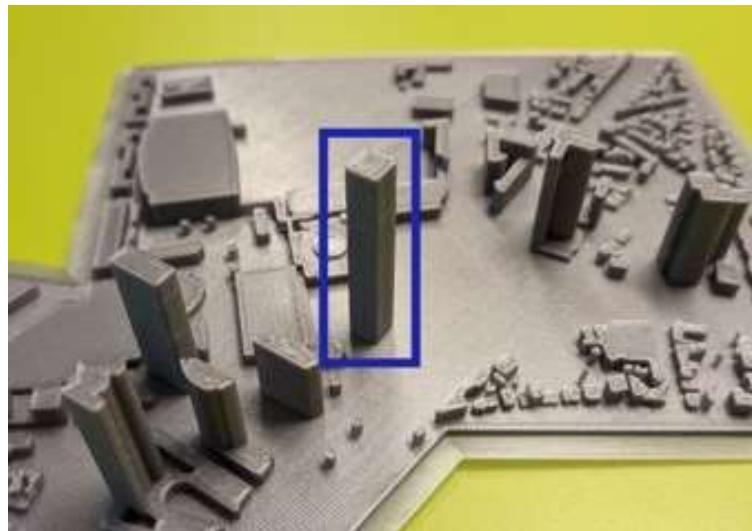


Abbildung 5: Ein 3D-Modell des Messegeländes in Frankfurt am Main, mit dem Messeturm, der nur als Quader dargestellt ist (Hervorhebung).

Nach dem Einstieg ging es in die *Konzeptualisierungs*-Phase (vgl. Abbildung 1). Ab diesem Zeitpunkt haben die Schüler*innen in festen Kleingruppen gearbeitet. Die Kleingruppen der 7. Klasse sind mit uns im ersten Schritt zum Messeturm gelaufen, um Notizen anzufertigen. Bei der 8. Klasse musste aufgrund von schlechtem Wetter das Anfertigen der Notizen auf Basis von Bildern und dem Ausblick vom überdachten Universitätsgelände beschränkt werden. Festgehalten wurden diese Notizen auf einem Arbeitsblatt, auf dem neben einer kurzen schriftlichen Einleitung und dem Arbeitsauftrag noch Freifläche für die Notizen sind. In einem anschließenden Arbeitsauftrag sollten die Notizen noch mithilfe der Gesamthöhe (257 m), der Dachhöhe (37 m), sowie der Seitenlänge (59 m) skaliert werden, um den folgenden 3DM-Schritt vorzubereiten.

Bereits zum Ende der ersten Sitzung begannen wir mit einer Einführung in Tinkercad, bei welcher wir grundlegende Bewegungen, das Erstellen von simplen Elementen, sowie deren Manipulation zeigten. Ein wichtiger Operator ist hier das „Zusammenfassen“, welches eine mathematische Vereinigung von zwei soliden Körpern, oder die Differenz einem soliden Körper mit einer „Bohrung“ darstellt.

Die zweite Sitzung begann mit der Einführung in die *Modellierungs*-Phase mit *Tinkercad*. Die Nutzoberfläche und gängige Aktionen (Erstellen, Manipulieren, und Zusammenfassen) wurden kurz vorgestellt. Danach ging es an das Umsetzen der Modelle in Tinkercad, bei welchem jeder hinzugefügte Grundkörper schrittweise inkl. Beschreibung auf einem zweiten Arbeitsblatt vermerkt werden sollte.

Die dritte und letzte Sitzung widmete sich der Validierung und Optimierung. Seit dem letzten Termin wurden die D3DM von den Autor*innen aus Tinkercad exportiert, mit dem Slicer vorbereitet, und auf den 3D-Druckern gedruckt. Die Modelle in Tinkercad sind in den Abbildungen 6 und 7 gezeigt:

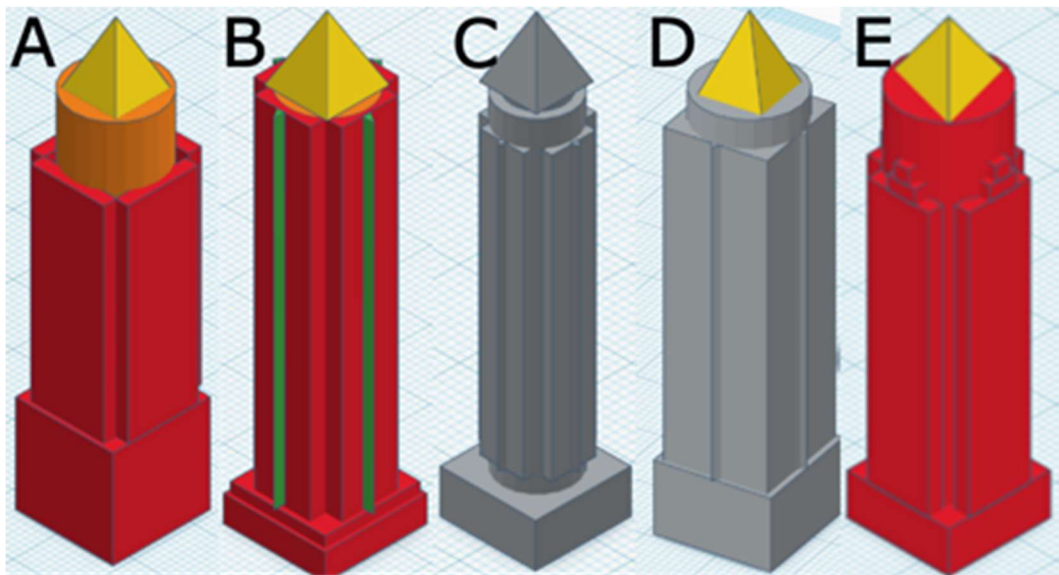


Abbildung 6: Die Türme der Klasse 7 dargestellt in Tinkercad.

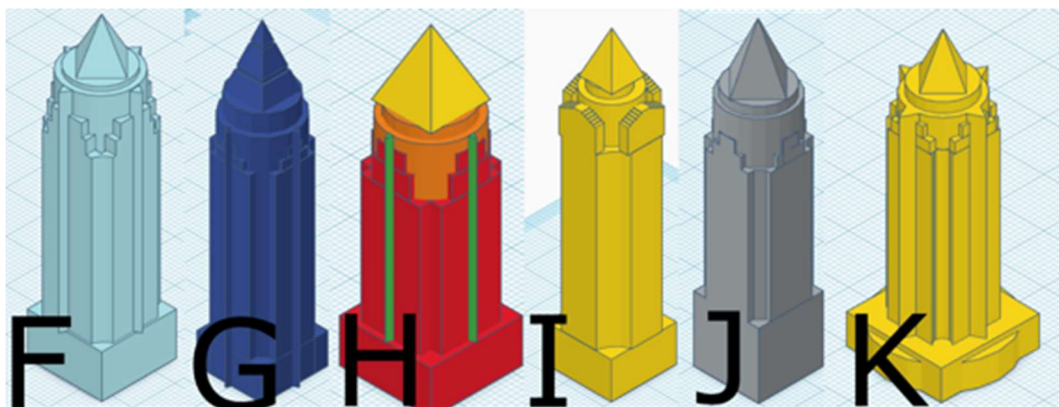


Abbildung 7: Die Türme der Klasse 8 dargestellt in Tinkercad.

Die Validierung erfolgte u. a. mithilfe eines dritten Arbeitsblattes, auf dem in einer Tabelle Elemente, die ihrer Meinung nach gut gelungen – also Elemente, die die

Realitätsnähe zum Turm förderten – sowie Verbesserungsmöglichkeiten festgehalten werden sollen. Der Turm wurde in diesem Zuge nicht noch einmal besucht, da er vom Raum aus sichtbar war und als Vergleichsobjekt zum 3D-gedruckten Turm diente. Im Durchgang mit der 8. Klasse, welche zeitlich nach dem Durchgang mit der 7. Klasse stattfand, haben wir zusätzlich noch ein Gruppenpuzzle eingebaut, bei dem als Endprodukt eine Bauanleitung für einen „idealen“ Messturm, sowie Hinweise für künftige Gruppen bzgl. des 3D-Drucks tabellarisch festgehalten wurden.

5.3 Der Fragebogen

Am Ende der dritten Sitzung wurden die Schüler*innen gebeten, einen Fragebogen auszufüllen. Ziel des Fragebogens ist es, ihre Einstellungen zu verschiedenen Aussagen im Zusammenhang mit der Modellierungsaufgabe zu erfahren. Durch den Fragebogen konnten wir die Meinungen aller Schüler*innen individuell erfassen. Zudem erhofften wir uns durch die Anonymität unverfälschte Eindrücke zur Lerneinheit. Die Zustimmung zu allen Items wurde auf einer fünfstufigen Likert-Skala von 0: *stimme überhaupt nicht zu* bis 4: *stimme voll und ganz zu* abgebildet. Der Fragebogen umfasste vier Kategorien mit insgesamt 13 Items. Diese werden im Folgenden präsentiert. Durch die Angaben + und - wird jeweils vermerkt, ob die Aussage in Bezug auf eine Kategorie positiv oder negativ formuliert ist.

- Kategorie 1: Aufgabenspezifisches Interesse und Spaß (aus Hartmann & Schukaljaw, 2021), z. B. *IS_1_+*: *Ich fand es spannend, diese Aufgabe zu lösen.*
- Kategorie 2: Relevanz und Realitätsbezug (adaptiert nach Wess, Klock, Siller & Greefrath, 2021), z. B. *RR_1_+*: *Ich habe in der Aufgabe einen Realitätsbezug erkannt.*
- Kategorie 3: Vereinfachen und Strukturieren (adaptiert nach Blum & Leiß, 2007), z. B. *VS_1_-*: *Ich fand es schwierig, zwischen wichtigen und unwichtigen Informationen zu unterscheiden.*
- Kategorie 4: Mathematisieren (adaptiert nach Blum & Leiß, 2007), z. B. *MM_1_+*: *Ich hatte keine Probleme mit der Auswahl und Sammlung von Daten (z. B. Messungen/Schätzungen).*

Der Fragebogen wurde bereits in Jablonski (2023) für einen anderen Modellierungskontext verwendet und vorab geprüft, wobei gute Werte für Cronbach's Alpha erreicht wurden ($\alpha > .73$). Im Rahmen der beiden Einheiten wurde der Fragebogen von 11 Siebtklässler*innen und 16 Achtklässler*innen ausgefüllt.

5.4 Datenauswertung

Um ein umfassendes Bild von der Durchführung geben zu können, werden die Daten mehrschrittig ausgewertet. Zunächst werden die Modellierungsergebnisse in Form der digitalen 3D-Modelle aus Tinkercad und der ausgedruckten 3D-Mo-

delle analysiert. Ziel ist es, die Arbeitsprozesse der Schüler*innen durch den Modellierungskreislauf zu strukturieren. Weiterhin sind die Skizzen, Notizen und Dokumentationen der Schüler*innen auf den entsprechenden Arbeitsblättern eine relevante Grundlage, um die durchgeführten Modellierungsschritte zu beschreiben. Zuletzt dient der Fragebogen dazu, die Lernendenperspektive einschätzen zu können.

Die Dokumente der Schüler*innen werden mithilfe einer qualitativen Inhaltsanalyse genauer untersucht. Dies geschieht deduktiv mithilfe der Schritte aus dem Modellierungskreislauf von Blum und Leiss (2005), wobei die Schritte *Vereinfachen und Strukturieren*, *Mathematisieren* und *Validieren* im Fokus stehen, da mit Verweis auf Abbildung 4 hier eine theoretische Relevanz im Kontext der Aufgabenstellung und –strukturierung erwartet werden kann. Grundlage für die Codierung sind die folgenden Definitionen (vgl. Blum & Leiß, 2005; Jablonski et al. (2023):

- Vereinfachen und Strukturieren: Die Schüler*innen analysieren die Charakteristika des Objektes und entscheiden, welche Informationen von Bedeutung sind. Hierauf basierend werden Vereinfachungen und Strukturierungen vorgenommen, die in der Wahl eines realen Modells zur Beschreibung des Turms münden.
- Mathematisieren: Die Schüler*innen transferieren ihr reales Modell in ein mathematisches. Dies geschieht, indem benötigte Daten beschafft werden, z. B. durch Messungen und Schätzungen.
- Validierung: Die Schüler*innen haben ein (Zwischen-)Ergebnis erzielt und bewerten dieses in Hinblick auf dessen Plausibilität und auf Basis der Vorgehensweise.

Für den Fragebogen werden Mittelwerte und Standardabweichungen für die Skalen herangezogen, um die generelle Einschätzung der Schüler*innen darzustellen und Vergleiche zwischen den Skalen zu ermöglichen. Auffälligkeiten werden mit den qualitativen Ergebnissen aus den vorangegangenen Schritten in Verbindung gesetzt.

6. Ergebnisse

6.1 Aussehen und Beschreibung der Turmmodelle

Allen Modellen wohnt die grundlegend gleiche Struktur mit einem Sockel, einem inneren Zylinder, sowie einer pyramidenförmigen Spitze inne, welche bei nur einem Modell eine dreieckige statt quadratische Grundfläche besitzt (Gruppe E). Das Dach wurde nur von einer Gruppe detaillierter durch Einkerbungen gestaltet (Gruppe G). Bei drei Gruppen (F, J, K) ist die quadratische Dachgrundfläche gegenüber der Sockelgrundfläche um 45° verdreht. Bei allen Modellen bis auf einem ist ebenfalls eine Zylinderscheibe unterhalb des Daches erkennbar (Gruppe B).

Alle Gruppen haben Quader zur Gestaltung der Seitenflächen des Turms genutzt. Die markanten Dreiecksprismen an den Seitenflächen des Turms sind bei vier Gruppen nicht vorhanden (A, E, J, K). Die „Ausschnitte“ oberhalb der Sockeleckpunkte ist nur bei Gruppe D nicht vorhanden. Die treppenartige Struktur am oberen Ende des Mittelteils ist von vier Gruppen (A, B, C, D) nicht einbezogen. Hierzu sei gesagt, dass Gruppe I ein vorgefertigtes Treppenobjekt aus Tinkercad genutzt hat, während die anderen Gruppen meist Quader, die in andere Elemente oder durch den mittigen Zylinder hereinragen, genutzt haben. Eine Gruppe hat innerhalb des Sockels noch einen Zylinder genutzt (Gruppe K), und eine andere hat einen zweistufigen Sockel modelliert (Gruppe B).

Je nach Betrachtung haben Gruppe F, G oder K den kompliziertesten Turm modelliert. Die Türme der 8. Klasse (F-K) sind detaillierter und haben mehr Einzelteile.

6.2 Qualitative Analyse der mathematischen Modellierungsschritte

Die Ergebnisse dieses Abschnitts wurden in zusammengefasster Form erstmals in Jablonski et al. (2023) beschrieben. Um sie im Rahmen des Artikels mit den weiteren Ergebnissen in Verbindung zu setzen, werden sie an dieser Stelle referenziert.

Analyse des Modellierungsschritts Vereinfachung und Strukturierung: Abbildung 8 zeigt die Skizze einer Gruppe, welche sie am Turm direkt erstellt hat. Die Skizze beinhaltet die für die Gruppe relevanten geometrischen Körper zur Beschreibung der Turmfassade (links). Dieses Beispiel ist prototypisch für die Aktivitäten aller Gruppen in der ersten Sitzung: Die Skizze, die am Standort des Turms angefertigt wurde, ist der erste Versuch der Schüler*innen, die Aufgabe, d. h. die Beschreibung der Form des Turms, zu vereinfachen und zu strukturieren. Wie in Abbildung 8 dargestellt, verwenden die Schüler*innen geometrische Körper, um die eigentliche Form des Turms annähernd zu beschreiben. Dies geht mit einer Vereinfachung des ursprünglichen Objekts einher, z. B. entscheidet die Beispielgruppe, dass die Fenster unwichtig sind, aber die treppenartige Anordnung am oberen Ende der Fassade wichtig. Weiterhin nutzen die Schüler*innen die geometrischen Körper, um den Turm in verschiedene Bereiche aufzuteilen – sie werden auf der linken Seite mit Zahlen gekennzeichnet und auf der rechten Seite als entsprechende Ebenen benannt.

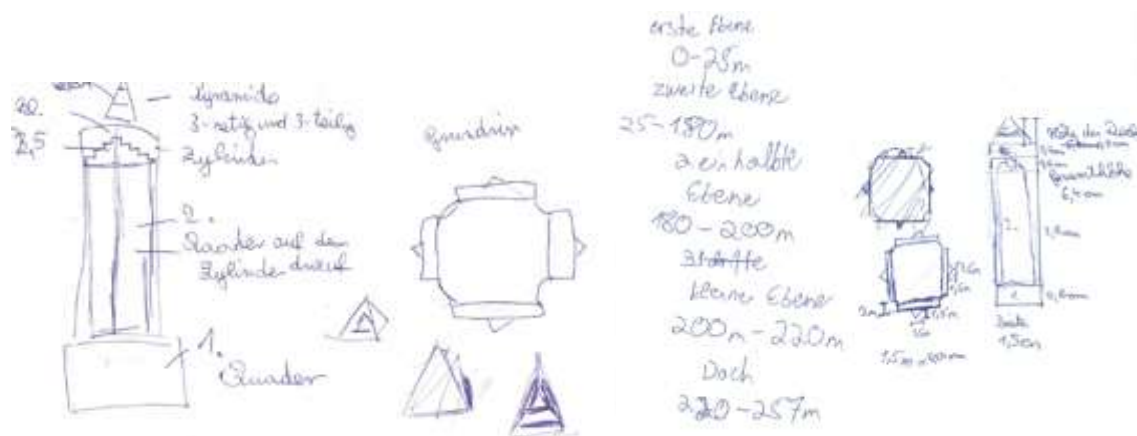


Abbildung 8: Auszüge aus den Skizzen einer Schüler*innengruppe (links: Beschreibung des Turms mit geometrischen Körpern; rechts: Definition von Ebenen und Schätzen bzw. Skalieren von Größen)

Mit der Einführung von Tinkercad in der zweiten Sitzung werden die Schüler*innen aufgefordert, ihr Modell detaillierter zu strukturieren. Während die Vereinfachungen in der ersten Sitzung bereits weitgehend abgeschlossen sind, können wir aus den Notizen der zweiten Sitzung entnehmen, dass die Schüler*innen ihre Struktur im Zusammenhang mit der „Bauanleitung“ noch einmal verfeinern, z. B. gibt die Gruppe in Abbildung 9 an, wie viele Quader zur Beschreibung der Fassade erforderlich sind, und ergänzt detailliertere Skizzen.

Schritt	Grundkörper	Beschreibung und Skizze
1	Quader	unterer Fundament 
2	Zylinder	Zentrum des Turms 
3	4x gleiche Quader	an dem Zylinder 
4	3-seitige Pyramide	Dach 
5	2 Quader	Treppentufen 
6	4 x gleiche Zinnen	Zinnen an den Seiten 
7		

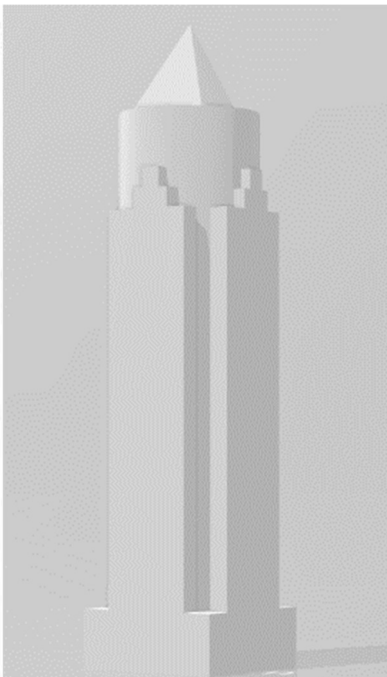


Abbildung 9: Bauanleitung der Schüler*innen (links) und fertig erstelltes 3D-Modell (rechts)

Analyse des Modellierungsschritts Mathematisierung: Um zu dem in Abbildung 9 (rechts) gezeigten Ergebnis zu gelangen, müssen die Daten aus dem Bauplan zusammen mit den zuvor durchgeführten Mathematisierungen in das digitale Werk-

zeug eingegeben werden. In Abbildung 9 (rechts) mathematisieren die Schüler*innen die vereinfachte Version des Turms, indem sie die Größe der verschiedenen "Ebenen" in Bezug auf eine frühere Aufteilung des Turms in Teile schätzen. Auf der rechten Seite von Abbildung 8 kann man die Skalierung der Schüler*innen für den 3D-Druck erkennen, die eine notwendige Grundlage für die Erstellung in Tinkercad ist.

Analyse des Modellierungsschritts Validierung: Aus der letzten Sitzung können wir auch die Validierungsaktivitäten der Schüler*innen erkennen. In allen Gruppen werden sowohl Aspekte, die ihrer Meinung nach bereits gut funktioniert haben, als auch solche, die noch verbessert werden könnten, genannt. Aus diesen Überlegungen lassen sich die Schwerpunkte der Schüler*innen in Bezug auf eine Validierung erkennen: Die meisten Gruppen sind mit der Größe und dem Maßstab der gedruckten Modelle im Hinblick auf die von ihnen gemachten Mathematisierungen zufrieden. Einige Gruppen erwähnen zusätzlich Symmetrie und Formen, während andere Gruppen das Druckverfahren mit dem Zusatz „keine schwebenden Elemente“ in Betracht ziehen. Eine Gruppe erwähnt außerdem, dass das Modell „nahe an der Realität“ sei. Bei den Verbesserungen sind Überlegungen zur Größe und zu Überhängen zu erkennen - ein Problem, das beim tatsächlichen Druckprozess relevant sein könnte. In der Folge beobachten wir individuelle Herausforderungen der Gruppen, z. B. fehlende Elemente, Symmetrie, Löcher und Ausschnitte sowie eine stärkere Konzentration auf „Details“, die als Verbesserungen des erstellten Turmmodells im Schritt der Vereinfachung und Strukturierung interpretiert werden können.

Beim Vergleich der endgültigen Bauanleitung in Abbildung 10 mit den ersten Skizzen und Bauanleitungen der Schüler*innen (vgl. Abbildung 8 und 9) ist zu beobachten, dass die Schüler*innen einige ihrer Überarbeitungen übernommen haben, nämlich (1) zusätzliche Informationen über die Größe jedes Objekts in Form von Proportionen (Mathematisieren), (2) wichtige Rolle der Symmetrie, z. B. erwähnen sie in Schritt zwei „füge es mittig an die Quader“ (Strukturieren und Vereinfachen), (3) Formulierung von Details, z. B. Löcher in Bezug auf den Bauvorgang und Prismen in Bezug auf den Bauvorgang (Vereinfachen und Strukturieren).



Abbildung 10: Auszug aus einem Bauplan der Schüler*innen

6.3 Fragebogen

Die Auswertung der Fragebogenitems gibt neben der beobachtenden Perspektive einen Einblick in die Wahrnehmung der Schüler*innen der Aufgabe. Tabelle 1 gibt

zunächst einen Überblick über alle 27 Schüler*innen beider Klassen. Für die vier Kategorien *Interesse und Spaß* (IS), *Relevanz und Realitätsbezug* (RR), *Vereinfachen und Strukturieren* (VS) und *Mathematisieren* (MM) werden die folgenden statistischen Kenngrößen angegeben:

- Anzahl der Items, die zur Kategorie gehören und in den Gesamtscore einfließen,
- Anzahl der Schüler*innen, für die alle Einträge zur Kategorie vorhanden sind,
- Arithmetisches Mittel des Gesamtscores einer Kategorie und Standardabweichung,
- Minimum und Maximum des Gesamtscores einer Kategorie.

	IS	RR	VS	MM
Items	3	3	3	4
<i>N</i>	27	27	27	27
<i>M</i>	10.3	8.1	9.2	12.7
<i>SD</i>	2.3	2.8	2.5	3.0
<i>Min</i>	7	3	3	6
<i>Max</i>	12	12	12	16

Tabelle 1: Übersicht zu den Ergebnissen des Fragebogens

In den Kategorien IS, RR und VS kann der Summenscore mit jeweils drei Items direkt verglichen werden: Die Schüler*innen drücken ihre Zustimmung in der Kategorie *Interesse und Spaß* mit durchschnittlich 10.3 Punkten am deutlichsten aus. Durchschnittlich einen Punkt weniger vergeben, die Schüler*innen beim Modellierungsschritt *Vereinfachen und Strukturieren* (9.2) und wiederum einen Punkt weniger in Bezug zur *Relevanz und zum Realitätsbezug* (8.1). In Relation betrachtet hätte die Kategorie *Mathematisieren* einen durchschnittlichen Gesamtscore von 9.5 Punkten und wäre damit in etwa vergleichbar mit der Kategorie *Vereinfachen und Strukturieren*.

Um einen tiefergehenden Einblick in die Zustimmungen der Schüler*innen zu erhalten, werden in Abbildung 11 die durchschnittlichen Zustimmungen der Schüler*innen die Klassen 7 ($n = 11$) und 8 ($n = 16$) getrennt dargestellt. Um insbesondere den Vergleich zwischen den vier Kategorien zu ermöglichen, wurden die Gesamtscores der Kategorien jeweils durch die Anzahl der dazugehörigen Items geteilt.

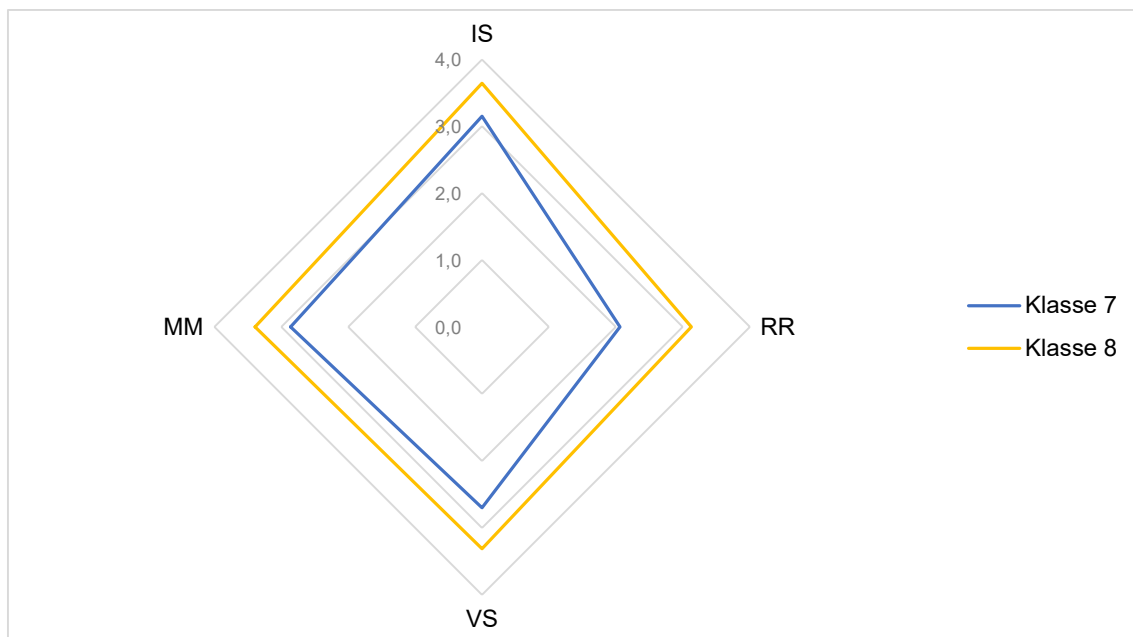


Abbildung 11: Vergleich der Zustimmungen von Klasse 7 und 8.

Der direkte Vergleich der beiden Gruppen zeigt, dass die Schüler*innen aus Klasse 8 in allen vier Kategorien höhere Werte der Zustimmung ausgedrückt haben. In den Kategorien Interesse und Spaß, Vereinfachen und Strukturieren sowie Mathematisieren ist es durchschnittlich ein halber Punkt, den die Schüler*innen pro Item mehr vergeben. Der größte Unterschied zeigt sich in der Kategorie Relevanz und Realitätsbezug, in welcher der Unterschied durchschnittlich einen Punkt pro Item ausmacht. Die Schüler*innen der Klasse 8 scheinen die Aufgabe also insbesondere als relevanter und näher an der Realität beurteilt zu haben, als die Schüler*innen der Klasse 7. Aufgrund der kleinen Stichprobengröße können keine Signifikanzen festgestellt werden, was aufgrund der Befunde als Ausblick im Fazit diskutiert wird.

7. Diskussion und Fazit

In diesem Beitrag haben wir den 3D-Druck und die 3D-Modellierung als Werkzeug im Kontext der mathematischen Modellierung behandelt. Unser Vorgehen zeigt, dass der 3D-Druck und die 3D-Modellierung eine geeignete Möglichkeit sind, um im Setting der Begabtenförderung eine (potenziell tiefgreifende) mathematische Unterrichtsreihe im Kontext Architektur zu halten.

Die Modellierung mit Tinkercad, obwohl sie intuitiv ist, besitzt ein hohes Potenzial zu mathematischer Tiefe. Die Modellierungsschritte „Vereinfachen und Strukturieren“ und „Mathematisieren“ sind nicht nur in der Vorbereitung auf Tinkercad präsent, sondern auch währenddessen. Der Modellierungsschritt „Validieren“ allerdings wird erst nach dem Erhalt des 3D-gedruckten Ergebnisses sichtbar. Insbesondere an dieser Stelle wird der Mehrwert des eigentlichen Drucks und Herstellens der Turmmodelle ersichtlich. Tiefergehende Diskussionen und Analysen scheinen in der dreidimensionalen Form vermehrt angesprochen zu werden. Eine

Forschungslücke zur (Tiefe der) mathematischen Modellierung im 3D-Druck Kontext, sowie Untersuchungen zum Übergang 3D (Realobjekt) zu 2D (Notizen) zu 3D (Tinkercad & 3D-Modell) besteht, und könnte beispielsweise durch weiterführende Interviews beleuchtet werden.

Der von den Schüler*innen der 7. Klasse (1. Durchgang) weniger ausgeprägt wahrgenommene Realitätsbezug weist darauf hin, dass der Kontext, in dem 3D-Modellierung und 3D-Druck genutzt werden kann, noch realitätsnaher sein kann. Erste Ergebnisse in einem dritten Durchlauf (nicht Teil dieses Beitrages) bestätigen eine Diskrepanz zwischen der 7. und der 8. Klasse. Limitiert sind diese Ergebnisse durch die geringe Teilnehmendenzahl (n=17).

Die Beantwortung auf die Frage, welche Kontexte unter welchen Bezügen ideal geeignet sind, um sie mit 3D-Modellierung und 3D-Druck zu behandeln, sehen wir als ein wichtiges Ziel der Forschung um und Praxiserprobung von 3D-Druck in der Mathematikdidaktik an.

Literatur:

- Anđić, B., Ulbrich, E., Dana-Picard, T., Cvjetićanin, S., Petrović, F., Lavicza, Z., & Maričić, M. (2022). A Phenomenography Study of STEM Teachers' Conceptions of Using Three-Dimensional Modeling and Printing (3DMP) in Teaching. *Journal of Science Education and Technology*. Advance online publication. <https://doi.org/10.1007/s10956-022-10005-0>
- Barquero, B., Ärlebäck, J., Carreira, S., Greefrath, G., Jessen, B.E., & Vorhölter, K. (2022). Introduction to the papers of TWG6: Applications and modelling. In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi & F. Ferretti. (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp.1104–1111). University of Bozen-Bolzano and ERME.
- Blum, W., & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Hrsg.), *Mathematical modelling (ICTMA 12): education, engineering and economics* (S. 222–231). Chichester: Horwood. <https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221>
- Blum, W., & Leiß, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der „Tanken“-Aufgabe. *mathematik lehren*, 128, 18–21.
- Borromeo Ferri, R. On the Influence of Mathematical Thinking Styles on Learners' Modeling Behavior. *J Math Didakt* 31, 99–118 (2010). <https://doi.org/10.1007/s13138-010-0009-8>
- Dilling, F., Marx, B., Pielsticker, F., Vogler, A., & Witzke, I. (2021). *Praxishandbuch 3D-Druck im Mathematikunterricht: Einführung und Unterrichtsentwürfe für die Sekundarstufen I und II*. Waxmann.
- El Bedewy, S., Lavicza, Z., Haas, B., & Lieban, D. (2022). A STEAM Practice Approach to Integrate Architecture, Culture and History to Facilitate Mathematical Problem-Solving. *Education Science*, 12, 9. <https://doi.org/10.3390/educsci12010009>

- Ford, S., & Minshall, T. (2019). Where and how 3D printing is used in teaching and education. *Additive Manufacturing*, 25, 131–150. <https://doi.org/10.1016/j.addma.2018.10.028>
- Greefrath, G., Hertleif, C., & Siller, H.-S. (2018). Mathematical modelling with digital tools – a quantitative study on mathematising with dynamic geometry software. *ZDM*, 50, 233–244. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0924-6>
- Hartmann, L.-M. & Schukajlow, S. (2021). Interest and emotions while solving real-world problems inside and outside the classroom. In F. K. S. Leung, G. A. Stillman, G. Kaiser, & K. L. Wong (Eds.), *Mathematical modelling education in east and west. International perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 153–163). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6_13
- Jablonski, S. (2021). *Wie potenziell mathematisch begabte Kinder argumentieren. Eine Längsschnittstudie mit Kindern der Klassen 3 bis 6 im Rahmen des Enrichmentprogramms "Junge Mathe-Adler Frankfurt"*. Springer Spektrum.
- Jablonski, S. (2023). Is it all about the setting? — A comparison of mathematical modelling with real objects and their representation. *Educational Studies in Mathematics* 113, 307–330 (2023). <https://doi.org/10.1007/s10649-023-10215-2>
- Jablonski, S., Läufer, T., & Ludwig, M. (2023). Make it real: Students' mathematical modelling realized with 3D printing. Paper presented at CERME 13 in Budapest, Hungary.
- Käpnick, F. (2001). *Mathe für kleine Asse* (Handbuch für die Förderung mathematisch interessierter und begabter Dritt- und Viertklässler). Berlin: Volk und Wissen
- Läufer, T., & Ludwig, M. (2023). Bringing 3D printing into student teachers' mathematics education. In *Research On STEM Education in the Digital Age. Proceedings of the ROSEDA Conference* (pp. 49–56). <https://doi.org/10.37626/ga9783959872522.0.06>
- Pearson, H. A., & Dubé, A. K. (2022). 3D printing as an educational technology: Theoretical perspectives, learning outcomes, and recommendations for practice. *Education and Information Technologies*, 27(3), 3037–3064. <https://doi.org/10.1007/s10639-021-10733-7>
- Wess, R., Klock, H., Siller, H.-S., & Greefrath, G. (2021). *Measuring Professional Competence for the Teaching of Mathematical Education*. Springer.

Tim Läufer & Matthias Ludwig

Goethe-Universität Frankfurt am Main, laeuer@math.uni-frankfurt.de, ludwig@math.uni-frankfurt.de

Es zählt der Prozess: Planen, Modellieren, 3D-Drucken und TPACK

3D-Druck wird in der Bildung vielversprechend eingesetzt und auch in der Bildungsforschung häufig thematisiert, es fehlt aber (Weiter-)Bildung für Lehrkräfte. Gerade Manipulatives bieten für Lehrkräfte viele reichhaltige Möglichkeiten, die mit dem 3D-Drucker realisiert werden können. Wir stellen in diesem Beitrag unsere Forschungsidee und Methode zur Untersuchung des 3D-Modellierungs- und Druckprozesses zur Erstellung von Manipulatives vor.

1. 3D Druck in der Bildung

3D-Druck (3DP) ist eine innovative Technologie, die die Fabrikation komplexer Modelle möglich macht. Gerade im Unterricht eingesetzt sorgt 3DP dafür, dass Schüler*innen engagierter und motivierter sind (Ford & Minshall, 2019), oder auch mathematikspezifisch räumliches Vorstellungsvermögen sich bessert (Huang & Lin, 2017 zitiert nach Pearson & Dubé, 2022).

Die meisten Forschungsergebnisse finden sich im Kontext Schule, wo der 3DP **im Unterricht** genutzt wird, also mit den Schüler*innen zusammen während einer Unterrichtsstunde. Es zeigt sich aber, dass sich einige Lehrkräfte oft nicht genügend vorbereitet fühlen, um solche Technologien in ihren Unterricht zu integrieren (Arslan & Erdogan, 2021). Daher setzen wir einen Schritt früher an und bringen 3DP in die Lehrkräftebildung, um 3DP **für den Unterricht**, also als Werkzeug zur Fabrikation von Materialien für den Unterricht, nutzbar zu machen.

Auf dieser Basis haben wir an der Goethe-Universität ein Seminar für angehende Mathematiklehrkräfte entwickelt, bei dem wir diese Technologie gewinnbringend nutzen wollen. In diesem Seminar *konzeptualisieren, modellieren, und drucken* die Studierenden eigens entwickelte Unterrichtsmaterialien – sogenannte *Manipulatives*. Ziel des Seminars ist es, ein innovatives, eigens konzipiertes, modelliertes, und gedrucktes *Manipulative* zu fabrizieren, in eine fiktive Unterrichtsstunde einzubetten und vorzustellen.

2. Manipulatives und deren Herstellung – der 3DMP-Prozess

Als *Manipulative* bezeichnen wir (physische) Unterrichtsmaterialien, die mathematische Konzepte zeigen, verdeutlichen und verifizieren, also einen gewissen fachlichen Inhalt in sich tragen. Dieser Inhalt kann durch Manipulation des Materials im Unterricht von den Schüler*innen extrahiert werden (vgl. Stigberg et al., 2022).

Um diese herzustellen, bedarf es eines gewissen Prozesses, der in Abbildung 1 dargelegt ist:

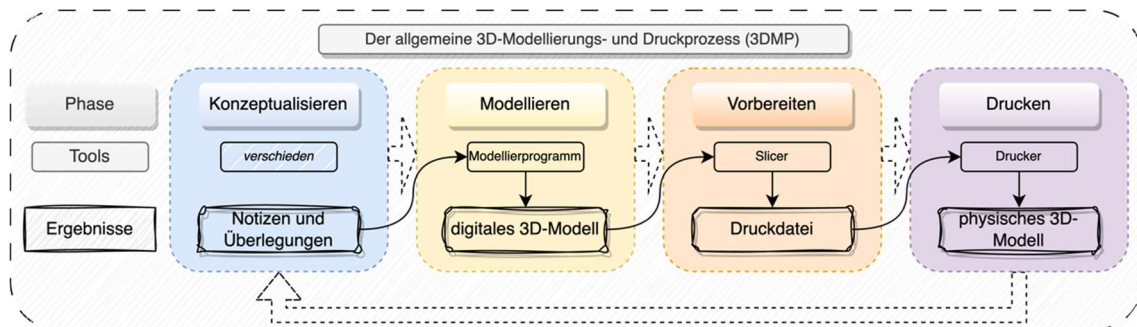


Abbildung 1: Der allgemeine 3DMP-Prozess mit angedeuteter Iterationsschleife. (vgl Läufer & Ludwig, 2023)

Dieser Prozess – der 3DMP-Prozess (angelehnt an das englische „3D Modelling and Printing“, siehe hierzu: Andić et al., 2022) ist implizit iterativ, da zu jedem Zeitpunkt ein Rückschritt in eine vorige Phase stattfinden kann. Vor allem aber bietet eine Validierung des physischen 3D-Modells einen Ansatz für einen weiteren Durchlauf des 3DMP-Prozesses, bei dem ein weiterer Prototyp entstehen kann.

2.1 Konzeptualisieren

Beim *Konzeptualisieren* werden Überlegungen angestellt, was genau das zu erstellende *Manipulative* erfüllen soll. So kann etwa ein gezinkter Würfel genau der richtige Einstieg für die eigene Klasse sein, sich mit Wahrscheinlichkeiten auseinanderzusetzen.

Das *Konzeptualisieren* spielt eine entscheidende Rolle und bedingt alle folgenden Phasen maßgeblich, da die erforderlichen Proportionen (der Teile) des *Manipulatives* erarbeitet und optimalerweise verschriftlicht werden.

2.2 (3D-)Modellieren

Das *Modellieren* (nicht zu verwechseln mit dem mathematischen Modellieren bspw. nach Blum & Leiß, 2007) wird mithilfe eines Modellierprogramms vorgenommen. Dort werden die Proportionen und Teile des *Manipulatives* digital nachgestellt. Von CAD-Programmen über visuelle Programmiersprachen hin zu reinem Programmieren sind mehrere Vertreter von Modellierprogrammen weit verbreitet. Diese unterscheiden sich u.A. durch die Funktionsweise der Modellierung wie direkte, parametrische und skriptbasierte Modellierung aus. Darunter gibt es beispielsweise

- *Tinkercad*® (Direkt & "Skriptbasiert" mit visueller Programmierung; www.tinkercad.com), welches auch in der Schule eingesetzt werden kann und nicht nur eine intuitive 3D-Modellierung bietet, sondern auch mit visueller Programmiersprache 3D-Modelle erstellen kann,
- *Blender* (Direkt & Skriptbasiert, www.blender.org/), welches ein sehr mächtiges Programm ist,
- *OpenSCAD* (Skriptbasiert, www.openscad.org/), mit dem in einer speziellen Programmiersprache 3D-Modelle generiert werden können,

- *OpenJSCAD* (Skriptbasiert, www.openjscad.xyz/), wie OpenSCAD, nur browserbasiert auf JavaScript Basis
- *Fusion360* (Parametrisch, www.autodesk.de/products/fusion-360/), als ein reguläres CAD-Programm
- ... und viele weitere

In unserem Seminar nutzen wir *OpenSCAD*, um die vielfältigen und mächtigen Möglichkeiten der Programmierung nutzen zu können. Mit Programmen, die Direktmodellierung als Hauptfunktion nutzen (*Tinkercad*®, *Blender*) sind einige, vor allem mathematisch exakte Modelle nur sehr schwer möglich, während diese bei OpenSCAD mit mathematischem Wissen gut umsetzbar sind. Mathematisch exakt heißt in diesem Fall, dass die Erstellung von Objekten nicht vom „Augenmaß“ während der Direktmodellierung abhängt, wie es beispielsweise bei Blender der Fall ist. Als ein Beispiel in Abbildung 2 sei die Viviani-Kurve gezeigt, die die Schnittmenge zwischen einer Kugel mit dem Radius r , und einem darin stehenden Zylinder mit Radius $\frac{r}{2}$, der den Kugelmittelpunkt mit seiner Mantelfläche tangiert, beschreibt.

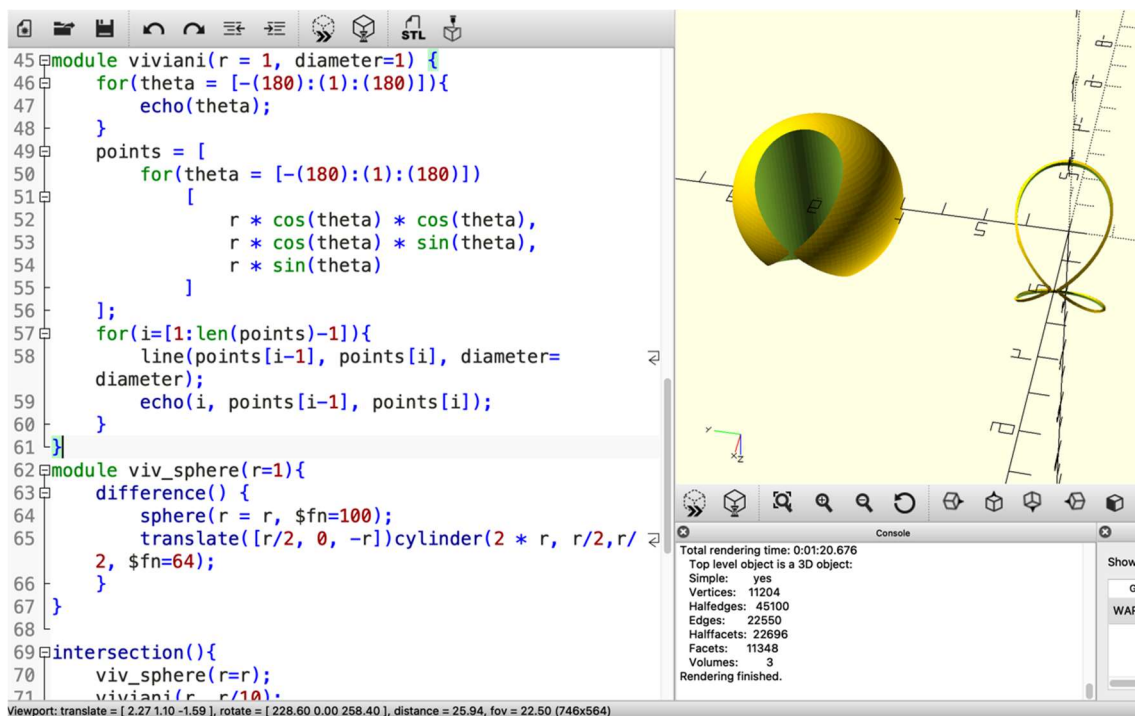
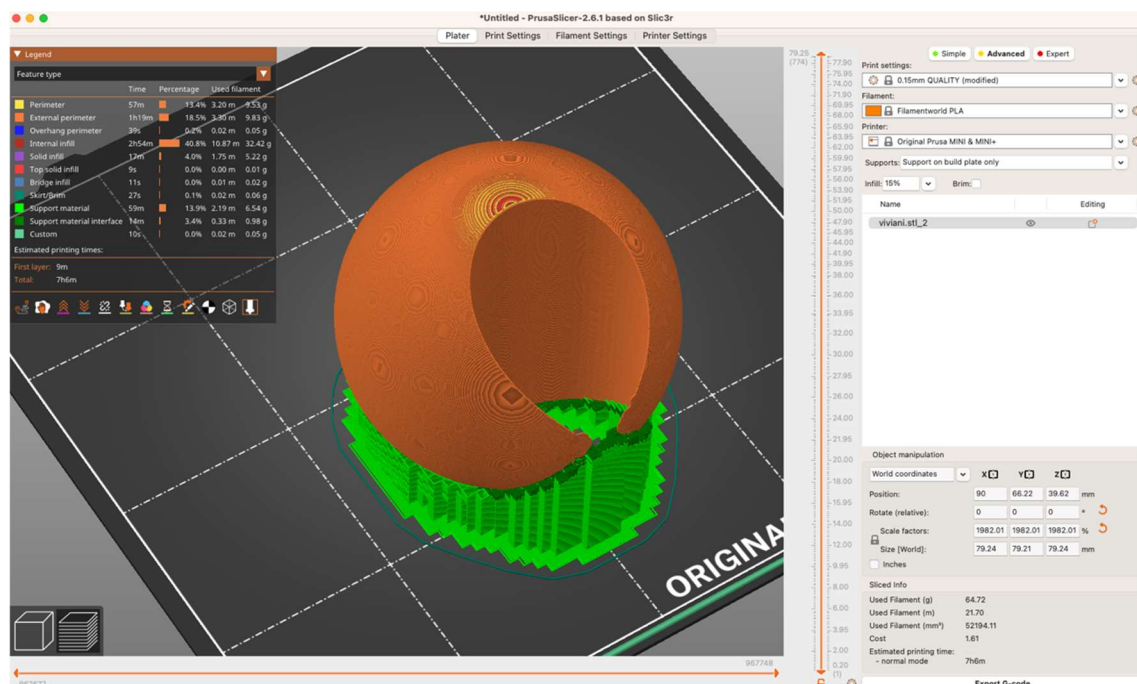


Abbildung 2: Ein Screenshot aus OpenSCAD von einem Projekt zur Viviani-Kurve. Links ist ein Ausschnitt des Programmcodes sichtbar, rechts das daraus resultierende digitale 3D-Modell.

2.3 Vorbereiten

3D-Drucker sind zwar komplexe, aber letztlich simple Maschinen, die normalerweise nur eine lange Liste an Befehlen abarbeiten. Diese Befehle besagen genau, wann sich welcher Motor zu drehen hat, und auf welcher Temperatur welche Elemente aufgeheizt werden sollen.

Eine solche Liste an Befehlen erzeugt ein sogenannter „*Slicer*“, der seinen Namen aus dem Englischen „to slice“ = „in Scheiben schneiden“ bezieht, da reguläre 3D-Drucker schichtweise drucken. Im *Slicer* wird das Resultat der *Modellierung* importiert, und die Druckeinstellungen können dort angepasst werden. Normalerweise bedarf es keiner großen Änderung der Standardeinstellungen, aber Dinge wie etwa die Schichthöhe machen einen zum Teil großen Unterschied bezogen auf die Druckzeit aus. Je niedriger die Schichthöhe, desto mehr Schichten werden für eine bestimmte Höhe benötigt, was eine Verlängerung der Druckzeit bedeutet. Die Einstellungen, die die Studierenden vornehmen, sind ganz abhängig von den Modellen, weshalb einige Studierende diese Phase pro Prototyp mehrmals durchlaufen müssen, um ein angemessenes Ergebnis zu erzielen.



2.4 Drucken

Das *Drucken* von 3D-Modellen ist prinzipiell kein komplizierter Ablauf: Das Speichermedium wird beladen mit der Druckdatei aus dem *Slicer*, und dann in den Drucker gegeben. Der Drucker druckt eigenständig, sollte aber beobachtet werden, um mögliche Fehldrucke zu erkennen. Mögliche Kalibrierungen und Fehlerbehebungen werden meist von den Autoren übernommen, aber simple handwerkliche Eingriffe wie der Filamentwechsel oder das Säubern des Druckbetts übernehmen die Studierenden.

Einzelne Phasen des Prozesses können durch Nutzen des Internets oder anderer Hilfsmittel umgangen werden. Beispielsweise kann zwar ein Konzept bestehen, aber ein Modellieren ist nicht notwendig, wenn ein passendes digitales 3D-Modell gefunden oder erworben wird. Gängige Seiten dafür sind *Thingiverse* (www.thingiverse.com) oder *Printables* (www.printables.com). Oft ist aber die

Qualität der Produkte auf diesen Seiten sehr weit gestreut, weshalb eine Modellierung durch den/die Benutzer*in häufig schöner (und oft nötig) ist.

3. Kompetenzen

Die Kompetenzen zum Durchlaufen dieser Phasen sind vielfältig und aufgrund der Fülle an Möglichkeiten nur schwer quantifizierbar, weshalb eine qualitative Perspektive hier angemessen ist.

Ähnliche Initiativen zur Erstellung von *Manipulatives* in der Mathematiklehrkräftebildung gibt es bspw. von Arslan & Erdogan (2021) oder von Lieban et al. (2019). Erstere haben hierbei den Einfluss von 3DP auf die Selbstwirksamkeit bezogen auf die TPACK-Kompetenzen (vgl. Mishra & Koehler, 2006, s.u.) untersucht und positive Effekte bei ersterer, sowie bei TPCK, TCK, TPK in einem Prä-Post-Test-Design festgestellt. Bisher fehlt aber eine genaue Untersuchung der Abläufe während des 3D Modellierungs- und Druckprozesses, und auf welcher Ebene diese ablaufen.

Gesehen auf die einzelnen Phasen lassen sich technische (*Vorbereiten* und *Drucken*) und mathematisch-fachliche (*Konzeptualisieren* und *Modellieren*) Kompetenzen finden. Auch didaktische Kompetenzen sind enthalten. Nicht nur beim *Konzeptualisieren* aufgrund der didaktischen Zielsetzung, aber auch durch den gegebenen Kontext, der sich durch die weiteren Phasen zieht und die Entscheidungen beeinflusst: z.B. „Welche Farbe(n) möchte ich nutzen?“ (*Vorbereiten* und *Drucken*), „Soll das *Manipulative* auseinandernehmbar sein?“ (*Modellieren*).

Eine Möglichkeit, diese Kompetenzen zu beschreiben, ist mit dem TPACK-Modell (Mishra & Koehler, 2006). Dort werden diese drei Bereiche – **C**ontent **K**nowledge (CK), **P**edagogical **K**nowledge (PK), und **T**echnical **K**nowledge (TK) – miteinander in Beziehung gesetzt und überschneiden sich, wobei sich wiederum weitere Wissensbereiche ergeben: das **T**echnological **P**edagogical **K**nowledge (TPK), das **P**edagogical **C**ontent **K**nowledge (PCK), das **T**echnological **C**ontent **K**nowledge (TCK), sowie das **T**echnological **P**edagogical **C**ontent **K**nowledge (TPCK). Dargestellt sind diese in Abbildung 3:

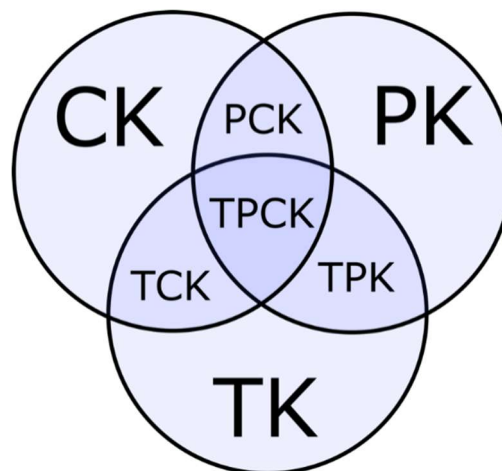


Abbildung 3: Das TPACK-Modell. (Mishra & Koehler, 2006)

4. Forschungsfragen

Gegeben des Seminarkontextes und der theoretischen Perspektive ergeben sich die folgenden Forschungsfragen:

1. Welche Bereiche des TPACK-Modells nutzen Studierende beim Durchlaufen des 3DMP-Prozesses?
2. Ist das *Drucken* im Kontext des Seminars nur technisch, oder auch mathematisch und didaktisch relevant? Welcher Bereich von TPACK kommt zum Tragen?

5. Methode

Um qualitative Aussagen auf den Prozess treffen zu können, werden zu mehreren Zeitpunkten Interviews durchgeführt, die zweischrittig mithilfe von qualitativer Inhaltsanalyse codiert werden. Erst wird nach TPACK analysiert, und danach wird sich dem 3DMP-Prozess gewidmet. Durch die Schnittmenge beider Analysen erwarten wir aussagekräftige Resultate gemäß den Forschungsfragen.

Es finden drei Interviews statt: Das erste Interview findet zu Beginn des Semesters statt und hat die Absicht, Kontext und Vorerfahrungen von den Studierenden zu sammeln, die die beiden folgenden Interviews unterfüttern sollen.

Das zweite Interview wird nach dem ersten Prototyp, den die Studierenden zur Mitte des Semesters präsentieren sollen, stattfinden. Auf diese Weise können Nachfragen zu allen Phasen des 3DMP-Prozesses gezielt gestellt werden, da dieser bereits komplett durchlaufen wurde.

Inhalt des dritten Interviews, welches nach der Endpräsentation zum Abschluss des Semesters stattfindet, ist die erneute Reflexion des Prozesses seit dem ersten Prototyp (2. Interview). Da die Studierenden mindestens zwei Prototypen entwickeln (sollen), können zwei komplette Durchläufe des 3DMP-Prozesses analysiert werden.

Untermauert werden die Interviews durch wöchentliche, auditive und bildliche Zusammenfassungen der Fortschritte der Studierenden. Dadurch können in den Interviews Elemente, die vielleicht vergessen wurden, wieder angesprochen werden. Alle Interviews zusammen stellen eine mündliche Version eines Portfolios dar und dienen ebenfalls der Selbstreflexion sowie der Dokumentation von wichtigen Meilensteinen. Letztere sind für eine optionale bewertete Arbeit nach dem Semester relevant. Die Interviews werden nicht von den Autoren durchgeführt, und die Audio- und Transkriptdateien erhalten die Autoren erst nach der Bewertung aller optionalen bewerteten Seminararbeiten.

6. Erwartete Ergebnisse

Während die Ergebnisse von Arslan & Erdogan (2021) nur die Selbstwirksamkeit bezogen auf die TPACK-Kompetenzen beschreiben, erwarten wir dennoch, dass die dort gefundenen Ergebnisse als Indiz für unsere Forschungsergebnisse dienen können. Wir erwarten, dass ...

- TCK durch die Nähe zur Mathematik und den technischen Gegebenheiten in der *Konzeption* und/oder der *Modellierung* angewendet wird,
- TPK aufgrund der Notwendigkeit der Begründung des *Manipulatives* (es soll innovativ sein) in der *Konzeption* angewendet wird,
- *Vorbereiten* und *Drucken* hauptsächlich „nur“ in TK angewendet wird.

Es wird sich zeigen, ob Indizien und Daten sich finden lassen, dass der die Druckphase auch eine tiefgreifendere fachliche oder pädagogische Bedeutung hat. Wir vermuten, dass es der *Druck von Manipulatives* ist, der den Phasen *Konzeption* und *Modellierung* eine tiefgehende, gewinnbringende Wirkung gibt.

Danksagungen

Die Promotionsstudie „3D-Druck in der Mathematiklehramtsbildung“ von Tim Läufer wird gefördert durch die Dr. Hans Messer Stiftung.

Literatur:

- Anđić, B., Ulbrich, E., Dana-Picard, T., Cvjetićanin, S., Petrović, F., Lavicza, Z., & Maričić, M. (2022). A Phenomenography Study of STEM Teachers' Conceptions of Using Three-Dimensional Modeling and Printing (3DMP) in Teaching. *Journal of Science Education and Technology*. <https://doi.org/10.1007/s10956-022-10005-0>
- Arslan, A., & Erdogan, I. (2021). Use of 3D Printers for Teacher Training and Sample Activities. *International Journal of Progressive Education*, 17(3), 343–360. <https://doi.org/10.29329/ijpe.2021.346.22>
- Blum, W., & Leiß, D. (2007). How do Students and Teachers Deal with Modelling Problems? In *Mathematical Modelling* (S. 222–231). Elsevier. <https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221>
- Ford, S., & Minshall, T. (2019). Where and how 3D printing is used in teaching and education. *Additive Manufacturing*, 25, 131–150. <https://doi.org/10.1016/j.addma.2018.10.028>
- Huang, T.-C., & Lin, C.-Y. (2017). From 3D modeling to 3D printing: Development of a differentiated spatial ability teaching model. *Telematics and Informatics*, 34(2), 604–613. <https://doi.org/10.1016/j.tele.2016.10.005>
- Läufer, T., & Ludwig, M. (2023). Bringing 3D Printing into Student Teachers' Mathematics Education. In M. Ludwig, S. Barlovits, A. Caldeira, & A. Moura (Hrsg.), *Research On STEM Education in the Digital Age: Proceedings of the ROSEDA Conference* (1. Auflage, Bd. 6, S. 46–59). WTM-Verlag. <https://doi.org/10.37626/GA9783959872522.0.06>
- Lieban, D., Ulbrich, E., Barreto, M., & Lavicza, Z. (2019). A new era of manipulatives: Making your own resources with 3D printing and other technologies. In M. van Heuvel-Panhuizen & M. Veldhuis (Hrsg.), *CERME 11: Proceedings of the eleventh congress of the European Society for Research in Mathematic Education* (S. 2711–2712).

Freudenthal Group & Freudenthal Institute Utrecht University Netherlands and ERME.

- Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge. *Teachers College Record*, 108(6), 1017–1054. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x>
- Pearson, H. A., & Dubé, A. K. (2022). 3D printing as an educational technology: Theoretical perspectives, learning outcomes, and recommendations for practice. *Education and Information Technologies*, 27(3), 3037–3064. <https://doi.org/10.1007/s10639-021-10733-7>
- Stigberg, S. K., Stigberg, H., & Maugesten, M. (2022). Making Manipulatives for Mathematics Education. In *6th FabLearn Europe / MakeEd Conference 2022* (S. 1–9). ACM. <https://doi.org/10.1145/3535227.3535228>

Katja Lenz¹ & Tim Lutz²

¹ Pädagogische Hochschule Schwäbisch Gmünd, katja.lenz@ph-gmuend.de

² Rheinland-Pfälzische Technische Universität Kaiserslautern Landau, tim.lutz@rptu.de

Enaktive Materialhandlungen digital verarbeiten – ein innovativer Ansatz zur Entwicklung des Stellenwertverständnisses

Zur Entwicklung eines tragfähigen Stellenwertverständnisses ist es grundlegend Bündelungs- und Entbündelungsprozesse zu verstehen sowie unterschiedliche mathematische Darstellungen zu vernetzen. Für ersteres scheinen enaktive Materialhandlungen unabdingbar, während digitale Anwendungen für letzteres besondere Potenziale bieten. Im vorgestellten Projekt wird eine App entwickelt und evaluiert, die enaktive Materialhandlungen digital verarbeitet und anreichert, um die Potenziale physischer und digitaler Arbeitsmittel zu vereinen.

1. Theoretischer Hintergrund

1.1 Stellenwertverständnis

Die Entwicklung des Stellenwertverständnisses ist eine wichtige Voraussetzung für die weitere Entwicklung mathematischer Kompetenzen und erweist sich weit über die Primarstufe hinaus als zentral (Gaidoschik et al., 2021). Stellenwertverständnis umfasst sowohl Wissen über die Prinzipien des dezimalen Stellenwertsystems (positionales, dezimales, multiplikatives, additives Prinzip; vgl. Ross, 1989; Moser Opitz, 2007) als auch die Fähigkeit zwischen verschiedenen mathematischen Darstellungen von Zahlen (Zahlzeichen, Zahlwort Zahldarstellung) und einer jeweiligen Menge flexibel zu übersetzen (Fromme, 2017; Schulz, 2014). Unter anderem ist das Stellenwertverständnis eine wichtige Voraussetzung für den Ausbau tragfähiger Vorstellungen zu natürlichen Zahlen in größeren Zahlenräumen, zu Dezimalzahlen aber auch zu Größen (Gaidoschik et al., 2021). Darüber hinaus bildet es die Grundlage für das Verständnis von Rechenwegen und -prozeduren (Herzog & Fritz, 2020; Hiebert & Wearne, 1996).

Die Entwicklung eines tragfähigen Stellenwertverständnisses stellt allerdings Lehrende und Lernende immer wieder vor große Herausforderungen. So lässt sich ein fehlendes Stellenwertverständnis als eine der zentralen Ursache für besondere Schwierigkeiten beim Rechnenlernen ausmachen (Gaidoschik et al., 2021; Gerster & Schultz, 2004; Lambert & Moeller 2019; Moser Opitz, 2007). Die fachdidaktische Forschung zeigt, dass nicht alle Kinder im Verlauf ihrer Schulzeit ein tragfähiges Stellenwertverständnis entwickeln können (Moser Opitz, 2007; Ross, 1989). Diesbezügliche Schwierigkeiten sind gut erforscht (für eine Übersicht: Fromme, 2017, S. 73) und es zeigt sich, dass es den Lernenden insbesondere an konzeptuellem Wissen zum Stellenwertverständnis mangelt (Herzog & Fritz, 2020; Houde-ment & Tempier, 2019; Moura et al., 2013).

Konzeptuelles Wissen zum Stellenwertverständnis umfasst (1) Wissen zu den Relationen der Bündelungseinheiten, die Bündelungs- und Entbündelungsprozesse ermöglichen sowie (2) Übersetzungen zwischen unterschiedlichen Zahldarstellungen.

Für das Verständnis von Bündelungs- und Entbündelungsprozessen müssen die grundlegenden Teile-Ganzes-Beziehungen auf dekadische Strukturzusammenhänge erweitert werden, indem Zahlen gemäß des dezimalen Bündelungsprinzips fortlaufend in Bündel von 10 zerlegt bzw. aus solchen Bündeln zusammengesetzt gedacht werden (Gerster & Schultz 2004; Resnick, 1983; Van de Walle et al., 2018). Die zum Aufschreiben der Zahlen verwendeten Ziffern übermitteln dabei zwei Informationen: (1) die Position der Ziffer repräsentiert einen bestimmten dekadischen Wert, (2) der Zahlenwert der Ziffer gibt an wie viele Bündel von der an dieser Stelle notierten Bündelungseinheit vorliegen.

Um ein vollständig ausgebildetes Verständnis von Stellenwerten zu entwickeln, müssen Lernende auch die Fähigkeit besitzen, zwischen verschiedenen mathematischen Darstellungsebenen flexibel zu wechseln (Bruner et al., 1971; Gerster & Schultz, 2004). Hierbei werden die folgenden Darstellungsebenen unterschieden (Kaufmann & Wessolowski, 2006):

- nonverbal-symbolische Darstellungsebene, z. B. $35 = 30 + 5 = 3 \text{ Z} + 5 \text{ E}$,
- verbal-symbolische Darstellungsebene, z. B. „fünf-und-dreißig“,
- ikonische Darstellungsebene, z. B. bildliche Darstellungen von Zahlen in Form von Punktebildern
- enaktive Darstellungsebene, z. B. Handlungen an didaktischen Materialien

Aus der mathematikdidaktischen und kognitionspsychologischen Forschung ist bekannt, dass Lernende im deutschsprachigen Raum häufig Schwierigkeiten beim Übersetzen von Zahlwörtern (verbal-symbolische Darstellungsebene) in Ziffernschreibweise (nonverbal-symbolische Darstellungsebene) zeigen. Dies deutet darauf hin, dass die inverse Schreibweise in der deutschen Sprache eine besondere Lernhürde darstellt (Möller et al., 2015; Schulz, 2014; Zuber et al., 2009). Bemerkenswert ist dabei, dass die inverse Zahlwortbildung auch Einfluss nimmt, wenn das Aufgabenformat sprachungebunden ist. So gelingt der schnelle Größenvergleich zweier Zahlen in Ziffernschreibweise Lernenden im deutschen Sprachraum langsamer und weniger richtig als solchen in einem Sprachraum ohne inverse Zahlwortbildung (Pixner et al., 2011). Aber nicht nur das Schreiben und die Größenvorstellung von Zahlen wird beeinflusst, sondern auch die Darstellung von Zahlen. Beispielsweise zeigt sich in einer Studie von Miura und Kolleg*innen (1994), dass Kinder aus unterschiedlichen Sprachräumen, Zahlen mit Mehrsystemblöcken unterschiedlich darstellen. Kinder aus dem asiatischen Sprachraum, ohne inverse Zahlwortbildung, stellen Zahlen mit Mehrsystemmaterial dekadisch strukturiert dar. Kinder aus Sprachräumen mit inverser Zahlwortbildung neigen

dazu, Zahldarstellungen unter Verwendung von Einerwürfen zu legen. Diese Ergebnisse verdeutlichen, dass das Lesen und Schreiben von großen Zahlen, aber auch das dekadisch strukturierte Darstellen von Zahlen zur Förderung des Stellenwertverständnisses thematisiert werden muss.

Außerdem erweist sich das Verständnis des Bündelungsprinzip als besondere Herausforderung für Lernende. Wenn beim Addieren bzw. Subtrahieren Veränderungen von Zahlen vorgenommen werden, so ist es z. T. erforderlich, Bündelungs- bzw. Entbündelungsprozesse vorzunehmen. Dies erweist sich insbesondere bei Aufgaben, in denen Entbündelungsprozesse vorgenommen werden müssen als schwierig (Gaidoschik et al., 2021).

Fehlt die konzeptuelle Anbindung des Stellenwertverständnisses an das Rechnen, wird in größeren Zahlenräumen Rechnen als rein inhaltsformales Kalkül wahrgenommen und umgesetzt. Diese reine Manipulation von Ziffern nach unreflektiert angewendeten verstandenen Regeln ist zum einen fehleranfällig (Ashlock, 1978; Resnick, 1983). Zum anderen genügt es nicht dem Anspruch eines zeitgemäßen Mathematikunterrichts, der nicht nur auf die Ausführung von Rechenfertigkeiten fokussiert, sondern ebenso das Verständnis der Rechenoperationen zum Ziel hat (KMK, 2022).

Im Sinne der Förderung verständnisbasierten Rechnens und der Prävention von besonderen Schwierigkeiten beim Rechnenlernen bedarf es folglich fachdidaktisch entwickelter und evaluierter Lernumgebungen zur Entwicklung des Stellenwertverständnisses. Für die Förderung des Stellenwertverständnisses bieten digitale Anwendungen ein besonderes Potenzial wie bisherige Entwicklungs- und Forschungsprojekte zeigen (Ladel & Kortenkamp, 2016; Schulz & Walter, 2018). In der App „Stellenwerttafel“²² können in einer Stellenwerttafel mit virtuellen Plättchen Zahlen gelegt werden. Diese werden über der Stellenwerttafel als Zahlwort dargestellt. Weiterhin können durch das Verschieben von Plättchen Bündelungs- und Entbündelungsprozesse vorgenommen werden. Die App „Stellenwerte üben“²³ umfasst 2 Grundlagenmodule zum „Bündeln“ und „Sortieren“ sowie 6 Übersetzungsmodule, in denen unterschiedliche Darstellungswechsel vorgenommen werden können. Für die Zahldarstellung wird Dienesmaterial verwendet, das in einer Sortiertafel angeordnet wird. Über Knopfdruck kann das Material gebündelt und entbündelt werden.

Der Schwerpunkt der bisher entwickelten Anwendungen liegt dabei vor allem in der Festigung und Flexibilisierung des Stellenwertverständnisses, wenn dieses bereits im Mathematikunterricht eingeführt wurde. Physisches Material und entsprechende enaktive Materialhandlungen sind nicht integriert. Dies können aber zur

²²Kortenkamp, U. (2015). Stellenwerttafel. Verfügbar unter: <https://itunes.apple.com/de/app/stellenwerttafel/id568750442?mt=8>.

²³ Moiser, Schulz & Walter (2018) Stellenwerte üben: https://play.google.com/store/apps/details?id=de.tu_dortmund.mathematik.ieem&hl=de&gl=US/

Unterstützung des Verständnisses einen relevanten Beitrag leisten, wie im Folgenden näher erläutert wird.

1.2 Digitale Verarbeitung enaktiver Materialhandlungen als besonderes Potenzial für das Mathematiklernen in der Primarstufe

Angesichts der zunehmenden Digitalisierung wird der Einsatz digitaler Medien in der schulischen Bildung als unumgänglich angesehen (KMK, 2016) und wird auch im Rahmen des Mathematikunterrichts erwartet (KMK, 2022). In der mathematikdidaktischen Community wird betont, dass die Entwicklung von Lernsoftware und die Einbindung digitaler Medien in den Unterricht konsequent aus der Perspektive der Fachdidaktik erfolgen sollte (Krauthausen, 2012; Walter & Schwätzer, 2023).

Hieraus ergeben sich speziell für den Mathematikunterricht in der Primarstufe besondere Anforderungen an den Einsatz digitaler Medien im Unterricht. So spielen für die Förderung des mathematischen Verständnisses in der Grundschule enaktive Materialhandlungen eine entscheidende Rolle, da sie es den Schülerinnen und Schülern ermöglichen, mathematische Inhalte aktiv zu erfassen und zu verstehen (Bruner et al., 1971; Gerster & Schultz, 2004; Kaufmann & Wessolowski, 2006). Des Weiteren wird der flexible Wechsel zwischen unterschiedlichen mathematischen Darstellungsebenen (enaktiv, ikonisch, symbolisch, verbal) als grundlegend für den Aufbau von tragfähigen Vorstellungen zu mathematischen Inhalten erachtet (Bruner et al., 1971; Duval, 2006; Lesh et al., 1987). Insofern werden für ein umfassendes Verständnis mathematischer Inhalte, neben enaktiven Materialien weitere Darstellungen sowie eine aktive Darstellungsvernetzung benötigt. In der Forschung zu lernförderlichen Potenzialen von digitalen Medien wird hervorgehoben, dass digitale Anwendungen effektive Möglichkeiten im Hinblick auf Darstellungswechsel und die Vernetzung von Darstellungen bieten. Es wird davon ausgegangen, dass die Synchronität von Darstellungen eine optimale Grundlage für ein tieferes mathematisches Verständnis darstellt und Schülerinnen und Schüler darin fördern kann, Darstellungen miteinander zu vernetzen.

Insofern scheint eine Kombination von physischen und virtuellen Arbeitsmitteln, z. B. durch eine digitale Verarbeitung enaktiver Materialhandlungen eine innovative Einsatzmöglichkeit digitaler Medien im Mathematikunterricht der Primarstufe zu sein. Bisher gibt es aber noch kaum Anwendungen, die diese beiden Bereiche miteinander verbinden. Dementsprechend wird im vorgestellten Projekt eine App zur Förderung des Stellenwertverständnisses entwickelt, welche enaktive Materialhandlungen von Lernenden digital verarbeitet und Darstellungsebenen im Sinn eines Multirepräsentationstools miteinander verknüpft.

2. Ziel und Forschungsfragen

Dem Primat der Fachdidaktik folgend (Krauthausen, 2012) wird im Forschungsprojekt eine App zur Förderung des konzeptuellen Stellenwertverständnisses, gemäß fachdidaktisch fundierter Erkenntnisse entwickelt und deren Einsatz mit Lernenden evaluiert. Im Fokus des Entwicklungs- und Forschungsvorhabens steht die

Untersuchung des besonderen Potenzials, das die digitale Verarbeitung von enaktiven Materialhandlungen bietet.

Konkret werden die folgenden Forschungsfragen adressiert:

- Welche Nutzungsweisen zeigen Lernende beim digital gestützten Lösen von Aufgaben zum Stellenwertverständnis?
- Inwiefern entfaltet eine digitale Verarbeitung enaktiver Materialhandlungen ein lernförderliches Potenzial im Hinblick auf die Entwicklung des Stellenwertverständnisses?

3. Methodisches Vorgehen

Im vorgestellten Projekt wird im Rahmen fachdidaktischer Entwicklungsforschung die App ZahLegAR zur Förderung des konzeptuellen Stellenwertverständnisses, in Anlehnung an den Design-Research-Ansatz (Hußmann et al., 2013), forschungsbasiert entwickelt und evaluiert (s. Abbildung 1).



Abbildung 1: Ablaufschema der forschungsbasierten Entwicklung

Zunächst wird ausgehend von der Problemanalyse ein vorläufiges Design der App entwickelt, in welchem aus der Forschung bekannte Designprinzipien berücksichtigt werden (s. Abschnitt 4). In der nächsten Phase erfolgt die Evaluation und Weiterentwicklung eines Prototyps in mehreren Designexperimenten in Laborsettings. Es ist geplant, dass Lernende in Zweiertandems mit der entwickelten App arbeiten und anschließend zum Lernprozess und zu ihrer Einschätzung der App befragt werden. Ziel ist es Aufschluss über die Verständlichkeit, die Angemessenheit des Designs und die Nutzung des Lernangebots durch Schüler*innen zu gewinnen. Durch die Bearbeitung in Zweiertteams soll eine Umgebung geschaffen werden, die den Lernenden aus dem Unterricht bekannt ist und die einen natürlichen Austausch ermöglicht. Durch gezielte Rückfragen zur Bearbeitung sollen Erkenntnisse dazu gewonnen werden, wo ggf. Hürden im Umgang mit der App liegen und welche kognitiven Prozesse durch die App angeregt werden. Hieraus ergeben sich zentrale Erkenntnisse zur Weiterentwicklung und Anpassung der App. Weiterhin ist angedacht, die App auch mittels einer Lehrkräftebefragung zu evaluieren. Dies dient dazu die Akzeptanz der App durch Lehrkräfte einschätzen zu können, den Blick für den Einsatz der App unter realistischen Rahmenbedingungen zu schärfen sowie Lernumgebungen für den Unterricht adäquat zu entwickeln. Am Ende des Projektes soll eine App mit entsprechendem Begleitmaterial als Open Educational Resource zur Verfügung stehen.

4. Ergebnisse

Im Folgenden wird zunächst der Prototyp der entwickelten App sowie die technische Umsetzung der App vorgestellt. Die App ZahLegAR wurde unter Einbeziehung fachdidaktischer Aspekte gemeinsam von den Autoren konzeptualisiert und von Tim Lutz technisch umgesetzt und programmiert.

4.1 Darstellung des Prototyps und technische Umsetzung

Die App ZahLegAR wurde für iOS und Android entwickelt und ist optimiert auf iPads der 7.-9. Generation. Eine Nutzung ist aber auch auf vergleichbaren Android-Tablets mit Frontkamera möglich. Für die App wurden unabhängige Module entwickelt und in Form eines Multirepräsentationssystems kombiniert (s. Abb. 2; blaue Felder: Elemente mit multiplen Eingabe- und Ausgabemöglichkeiten; rote Felder: Elemente zur Aufgabendarstellung und aufgabenübergreifenden Interaktion). Die App sowie alle dazugehörigen 3D-Druck Dateien, stehen demnächst dauerhaft kostenlos zur Verfügung unter: <https://tim-lutz.de/materialhandlungen>.

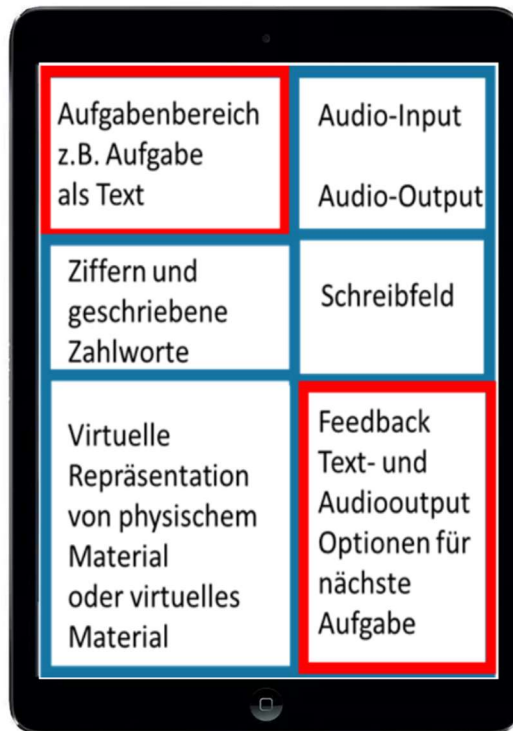


Abbildung 2: Struktur der App

Kern der App ZahLegAR bildet das Modul „Materialerkennung“, das die besondere Rolle von physisch vorgenommenen Materialhandlungen berücksichtigt. Über einen Spiegel, der mit einer 3D gedruckten Halterung am iPad befestigt werden kann, erfasst die Frontkamera die in Echtzeit physisch vorgenommenen Materialhandlungen der Lernenden an didaktischem Material (Einerwürfel, Zehnerstangen) (s. Abb. 3).



Abbildung 3: Digitale Verarbeitung enaktiver Materialhandlungen

Die Position von Einerwürfeln und Zehnerstangen wird erkannt und verarbeitet sowie mit weiteren mathematischen Darstellungen angereichert (s. Abb. 4).

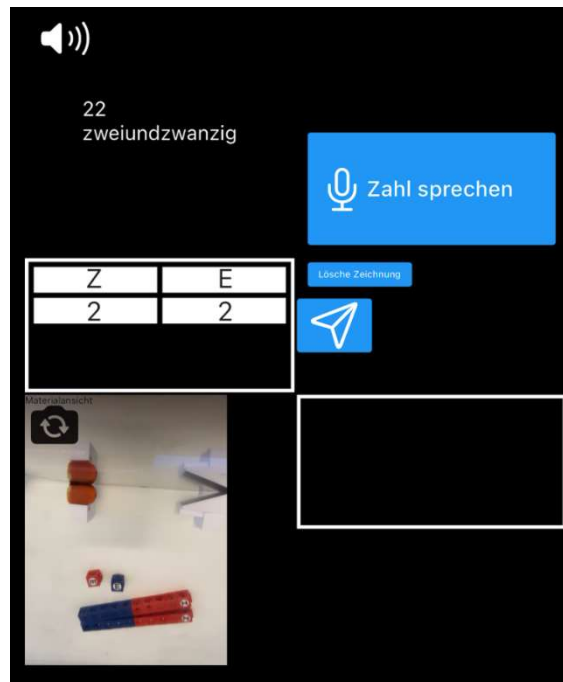


Abbildung 4: Darstellung der digitalen Anreicherung der Materialhandlung

Um diese Art der Materialerkennung umzusetzen, wurde ein Machine Learning Modell entwickelt und trainiert. Konkret wurden Bilder vom Material mit Labels versehen und in mehreren Schritten virtuell vervielfacht, um mehrere Millionen Bilder als Trainingsgrundlage zu erhalten. Schließlich wurde das Modell für mobile Endgeräte vereinfacht und optimiert.

Die App ZahlLegAR bietet nicht nur eine Vielzahl von mathematischen Darstellungen, sondern ermöglicht auch adaptives Feedback. Alle Eingaben der Lernenden (gelegtes Material, Schrift, Audio) werden automatisiert ausgewertet. Die Lernenden erhalten unmittelbar ein Feedback, das sowohl als Text oder als Audio ausgegeben werden kann. Die Feedbackfunktion ist in Form eines Feedbackbaumes programmiert und beinhaltet verschiedene Formen der Rückmeldung z. B. korrekatives Feedback oder erklärendes Feedback mit Bezug zu typischen Fehlern, siehe systemische Abbildung des Feedbackbaums in Abb. 5.

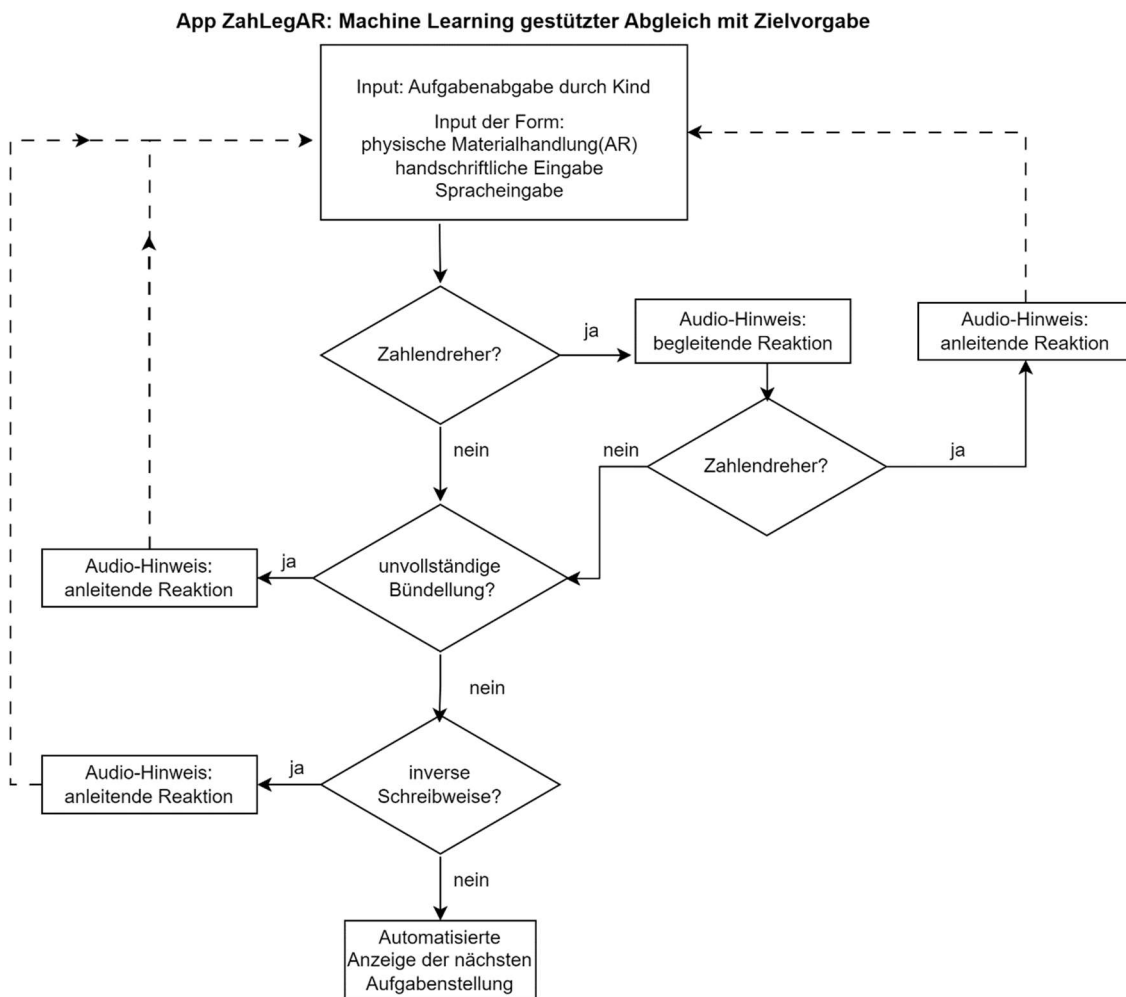


Abb. 5 Systemische Abbildung des Feedbackbaums

4.2 Potenziale der App

Ausgehend von fachdidaktischen Erkenntnissen wurden verschiedene Eigenschaften und Merkmale in der App implementiert. Im Folgenden werden diese beschrieben und dargelegt, inwiefern sie lernförderliche Potenziale entfalten können.

Einordnung in das SAMR-Modell

Das SAMR-Modell (Puentedura, 2006) bietet einen theoretischen Rahmen, um den Einsatz und die Gestaltung von digitalen Medien zu systematisieren. Das SAMR-Modell bezieht sich auf die Begriffe Ersetzung (Substitution), Erweiterung (Augmentation), Änderung (Modification) und Neubelegung (Redefinition), die in hierarchischer Ordnung mit einer jeweils größer werdenden Veränderung des Lernprozesses durch den Einsatz digitaler Medien und höheren potenziellen Lernzuwächsen in Verbindung gebracht werden (Renkl & Atkinson, 2007). Die entwickelte App kann der „Änderung (Modification)“ zugeordnet werden, wie sie im SAMR-Modell skizziert wird. Die digitale Verarbeitung der enaktiven Materialhandlungen führt zu einem angereicherten Lernsetting und damit zu einer veränderten Art der Auseinandersetzung mit den gestellten Aufgaben.

Motivation

Metastudien zeigen, dass der (kurzfristige) Einsatz von digitalen Medien (z. B. Smartphones, Tablet-PCs) zu einer höheren Motivation der Lernenden führen kann (Hillmayr et al., 2017). Diese erhöhte Motivation und Anstrengungsbereitschaft der Lernenden kann einerseits vom digitalen Medium an sich ausgehen, andererseits vom Vermögen der entwickelten App, individuelle sprachbasierte Rückmeldungen für die Lernenden bereitzustellen und so differenziert auf die Eingaben der Lernenden zu reagieren. Die Lernenden erhalten zu jeder einzelnen Aufgabe eine Rückmeldung, die über die Korrektheit der Lösung informiert („richtig gelöst“; „noch nicht ganz richtig“), was . Wenn Lernende Aufgaben nicht vollständig korrekt bearbeiten, erhalten sie – je nach Lösung – Impulse für die Weiterarbeit (z. B. „Richtig gelöst, aber du kannst noch bündeln“; „Du hast 34 gelegt. Versuche es noch einmal“). Diese unterstützenden Rückmeldungen bieten den Lernenden die Möglichkeit angeleitet zu korrekten Lösungen zu gelangen. Dies ermöglicht eine motivierende Erfahrung, in der Lernende Fortschritte erkennen, auch wenn sie anfangs Schwierigkeiten hatten.

Feedback & Adaptive Lernpfade

Die digitale Verarbeitung der Aufgabenbearbeitungen bietet das Potenzial, typische Fehler und Fehlvorstellungen zu erkennen und unmittelbar ein passendes Feedback bereitzustellen. Durch die automatisierte Verarbeitung und Überprüfung der Schüler*innenlösungen, wird es weiterhin möglich, unter Einbezug fachdidaktischer Erkenntnisse zu Aufgabenschwierigkeiten Lernpfade zu generieren, die den Lernprozess sinnvoll steuern und der Gefahr einer Über- bzw. Unterforderung von Lernenden entgegenwirken (Roth, 2023).

Vom Konkreten zum Abstrakten

Durch die Wechselbeziehungen zwischen der physischen und der virtuellen Zahldarstellungen kann die App den Transfer vom Konkreten zum Abstrakten gezielt unterstützen. Dies stellt im Vergleich zu Aufgabenbearbeitungen mit rein analogen Arbeitsmitteln eine Erweiterung dar, die einen lernförderlichen Mehrwert bieten könnte. Weiterhin ermöglicht die App das Zuschalten- und Ausblenden von Zahldarstellungen, so dass in unterschiedlichen Phasen des Lernprozesses bzw. bei der Umsetzung verschiedener Aufgabenformate auf unterschiedliche Zahldarstellungen zurückgegriffen werden kann.

Synchronisation und Vernetzung der Darstellungen

Im Sinne eines Multirepräsentationssystems werden in der App verschiedene mathematische Darstellungen angeboten (z. B. Ziffernschreibweise, Stellenwerttafel, Zahlwörter, Zahlbild). Die Synchronisation und die Vernetzung von Darstellungen (Walter, 2018) ermöglichen es, Gemeinsamkeiten in den Darstellungen zu erkennen und erkunden, was die Lernenden dazu anregen kann, den mathematischen Kern zu verstehen, der die Darstellungen verbindet.

5. Ausblick

Insgesamt zeichnet sich in der bisherigen Konzeptualisierung und der Entwicklung des Prototyps ab, dass die App ZahLegAR aus theoretischer Sicht zahlreiche lernförderliche Potenziale digitaler Medien adressiert. Neben den in Studien identifizierten lernförderlichen Potenzialen, wie z. B. Synchronität von Darstellungen, individuelles und unmittelbares Feedback sowie adaptive Aufgabenpfade, wird insbesondere der innovativen Integration und Kombination von physischen und digitalen Arbeitsmitteln ein besonderes Potenzial für den Mathematikunterricht in der Primarstufe zugesprochen. Die digitale Verarbeitung von enaktiven Materialhandlungen bietet aus mathematikdidaktischer Sicht einen Mehrwert für den Verständnisaufbau der Lernenden, welcher sich besonders im Hinblick auf das konzeptuelle Stellenwertverständnis als förderlich erweisen könnte. Dieses vermutete lernförderliche Potenzial der App ZahLegAR muss auf Basis von weiteren Erprobungen mit Lernenden fundiert und abgesichert werden. Hierfür soll die App ausgehend vom vorliegenden Prototyp weiterentwickelt und evaluiert werden.

Literatur

- Ashlock, R. B. (1978). *Research and Development Related to Learning About Numerals for Whole Numbers: Implications for Classroom/Resource Room/ Clinic*. University of Maryland.
- Bruner, J., Olver, R., & Greenfield, P. (1971). *Studien zur kognitiven Entwicklung*. Stuttgart: Klett.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103–131.
<https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Fromme, M. (2017). *Stellenwertverständnis im Zahlenraum bis 100*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Gaidoschik, M. S., Moser Opitz, E., Nührenböcker, M., & Rathgeb-Schnierer, E. (2021). Besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen. *Special Issue der Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 111S, 3–19.
<https://doi.org/10.13140/RG.2.2.15952.64004>
- Gerster, H.-D., Schultz, R. (2004). *Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen*. Abgerufen am 19.04.24, <https://phfr.bsz-bw.de/front-door/deliver/index/docId/16/file/gerster.pdf>
- Herzog, M., & Fritz, A. (2020). Konzeptuelles Stellenwertverständnis als Prädiktor für Rechenfertigkeiten. In H. S. Siller, W. Weigel & J. F. Wörler, (Hrsg.), *Beiträge Zum Mathematikunterricht* (S. 421–424). Münster: WTM-Verlag.
- Hiebert, J., & Wearne, D. (1996). Instruction, understanding, and skill in multidigit addition and subtraction. *Cognition and Instruction*, 14(3), 251–283.
https://doi.org/10.1207/s1532690xci1403_1

- Hillmayr, D., Reinhold, F., Ziernwald, L., & Reiss, K. (2017). *Digitale Medien im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht der Sekundarstufe: Einsatzmöglichkeiten, Umsetzung und Wirksamkeit*. Münster: Waxmann.
- Houdement, C., & Tempier, F. (2019). Understanding place value with numeration units. *ZDM Mathematics Education*, 51(1), 25–37. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0985-6>
- Hußmann, S., Thiele, J., Hinz, R., Prediger, S., & Ralle, B. (2013). Gegenstandsorientierte Unterrichtsdesigns entwickeln und erforschen – Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell. In M. Komorek, & S. Prediger (Hrsg.). *Der lange Weg zum Unterrichtsdesign: Zur Begründung und Umsetzung genuin fachdidaktischer Forschungs- und Entwicklungsprogramme* (S. 25–42). Münster u.a.: Waxmann.
- Kaufmann, S., & Wessolowski, S. (2006). *Rechenstörungen. Diagnose und Förderbausteine*. Seelze u. a.: Kallmeyer.
- KMK (2016). *Strategie der Kultusministerkonferenz „Bildung in der digitalen Welt“*. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 08.12.2016. Abgerufen am 19.04.24, https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/pdf/PresseUndAktuelles/2018/Digitalstrategie_2017_mit_Weiterbildung.pdf
- KMK (2022). *Bildungsstandards im Fach Mathematik Primarbereich*. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 23.06.2022. Abgerufen am 19.04.24, https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-Primarbereich-Mathe.pdf
- Krauthausen, G. (2012). *Digitale Medien im Mathematikunterricht der Grundschule*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2277-4>
- Ladel, S., Kortenkamp, U. (2016). Artifact-Centric Activity Theory—A Framework for the Analysis of the Design and Use of Virtual Manipulatives. In Moyer-Packenham, P. (Hrsg.). *International Perspectives on Teaching and Learning Mathematics with Virtual Manipulatives. Mathematics Education in the Digital Era*, Vol 7. (S. 25–40). Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32718-1_2
- Lambert, K., & Möller, K. (2019). Place-value computation in children with mathematics difficulties. *Journal of Experimental Child Psychology*, 178, 214–225. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2018.09.008>
- Lesh, R., Post, T. R., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Hrsg.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (S. 33–40). Hillsdale, N.J.: Erlbaum.
- Miura, I., Okamoto, Y., Kim, C.C., Chang, C.M., Steere, M., & Fayol, M. (1994). Comparisons of children’s cognitive representation of number: China, France, Japan, Korea, Sweden, and the United States. *International Journal of Behavioral Development*, 17 (3), 401–411.
- Möller, K., Shaki, S., Goebel, S. M., & Nürk, H.-C. (2015). Language influences number processing – a quadrilingual study. *Cognition*, 136, 150–155. <https://doi.org/10.1016/j.cognition.2014.11.003>
- Moser Opitz, E. (2007). *Rechenschwäche/Dyskalkulie*. Bern: Haupt.

- Moura, R., Wood, G., Pinheiro-Chagas, P., Lonnemann, J., Krinzinger, H., Willmes, K., & Haase, V. G. (2013). Transcoding abilities in typical and atypical mathematics achievers: the role of working memory and procedural and lexical competencies. *Journal of Experimental Child Psychology*, 116, 707–727. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2013.07.008>
- Pixner, S., Möller, K., Hermanova, V., Nürk, H.-C., & Kaufmann, L. (2011). Whorf re-loaded: Language effects on non-verbal number processing in 1st grade - a trilingual study. *Journal of Experimental Child Psychology*, 108, 371–382.
- PuenteDura, R. (2006). *Transformation, Technology and Education*. Abgerufen am 19.04.24, http://hippasus.com/resources/tte/puenteDura_tte.pdf
- Renkl, A., & Atkinson, R.K. (2007). Interactive learning environments: contemporary issues and trends. An introduction to the special issue. *Educational Psychology Review*, 19, 235–238.
- Resnick, L. B. (1983). A developmental theory of number understanding. In H. P. Ginsburg (Hrsg.) *The development of mathematical thinking* (S. 109–151). New York: Academic Press.
- Ross, S. H. (1989). Parts, Wholes and Place Value: A Developmental View. *The Arithmetic Teacher*, 36(6), 47–51.
- Roth, J., Baum, M., Eilerts, K., Hornung, G., & Trefzger, T. (2023). *Die Zukunft des MINT-Lernens. Perspektive auf (digitalen) MINT-Unterricht und Lehrkräftebildung*. Berlin, Heidelberg: Springer Nature.
- Schulz, A. (2014). *Fachdidaktisches Wissen von Grundschullehrkräften – Diagnose und Förderung bei besonderen Problemen beim Rechnenlernen*. Bielefelder Schriften zur Didaktik der Mathematik. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Schulz, A. & Walter, D. (2018). Stellenwertverständnis festigen – Potentiale und Nutzungsweisen einer Software zum Darstellungswechsel. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018* (S. 667–1670). Münster: WTM-Verlag.
- Zuber, J., Pixner, S., Möller, K., & Nürk, H. C. (2009). On the language specificity of basic number processing: Transcoding in a language with inversion and its relation to working memory capacity. *Journal of Experimental Child Psychology*, 102(1), 60–77. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2008.04.003>
- van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. (2018). *Elementary and middle school mathematics. Teaching developmentally*. Boston: Pearson.
- Walter, D. (2018). *Nutzungsweisen bei der Verwendung von Tablet-Apps. Eine Untersuchung bei zählend rechnenden Lernenden zu Beginn des zweiten Schuljahres*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Walter, D., & Schwätzer, U. (2023). Mathematikapps für die Grundschule analysieren. *Zeitschrift für Mathematikdidaktik in Forschung und Praxis*, 4, 1–55.

Corinne Leu, Thomas Schmalfeldt & Andreas Schulz

Pädagogische Hochschule Zürich, corinne.leu@phzh.ch

Förderung konzeptuellen Wissens zu Stellenwertsystemen durch ein intelligentes Tutorsystem in der Lehrpersonenausbildung mehrerer Schulstufen

Die hier vorgestellte tutorielle Online-Selbstlernumgebung für angehende Mathematiklehrpersonen fördert konzeptionelles Wissen zu Stellenwertsystemen, indem sie schulstufentypische Lerngelegenheiten mit dazugehörigen Veranschaulichungen thematisiert. Der Beitrag erläutert, wie durch drei Kernprinzipien, (1) Darstellungsnetzungen mittels (2) der Nutzung ikonischer Tools sowie (3) Transfer und Reflexion, fachliches und fachdidaktisches Wissen verknüpft werden.

1. Stellenwertsysteme als Lerngegenstand

Die Stellenwertdarstellung zählt gemäß Winter (2001) zu den fundamentalen Ideen der Grundschulmathematik. Für Schüler*innen ist ein umfassendes Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems relevant für das Erkennen von Beziehungen zwischen Zahlen, für das Verständnis über große Zahlen, Dezimalzahlen und Größen, für die Einsicht in das Schätzen und Runden (z.B. Cawley et al., 2007) sowie für das flexible und sichere Rechnen (Bryant et al., 2008). Grundschüler*innen haben nicht selten Verständnislücken beim dezimalen Stellenwertsystem, was insofern kritisch sein kann, als dass diese Lücken Schwierigkeiten bei den Inhalten der Sekundarstufe I nach sich ziehen (z.B. Andersson, 2010; Humbach, 2008; Moser Opitz, 2007) und sich somit auf den weiteren Lernerfolg im Fach Mathematik auswirken. Daher ist das Stellenwertsystem ein zentrales Konzept, das es für Schüler*innen zu verstehen gilt (Häsel-Weide & Schöttler, 2021; Herzog et al., 2017; Humbach, 2008; Scherer & Moser Opitz, 2010; Schmassmann, 2009). Im Zusammenhang mit einem umfassenden Verständnis wird zwischen einem strukturorientierten und einem positionsorientierten Verständnis unterschieden (Freesemann, 2014; Häsel-Weide & Schöttler, 2021). Beim strukturorientierten Verständnis wird der kardinale Zahlaspekt fokussiert und es geht um den Zahlaufbau und die Zahldarstellung. Interpretiert man die beiden kennzeichnenden Prinzipien von Stellenwertsystemen, das Prinzip der fortgesetzten Bündelung und das Stellenwertprinzip (Krauthausen, 2018; Padberg & Büchter, 2015), entsprechend des strukturorientierten Verständnisses, so nimmt das Teil-Ganzes-Prinzip eine entscheidende Rolle ein (Ross, 1989). Beim positionsorientierten Verständnis wird hingegen stärker der ordinale Zahlaspekt fokussiert und es geht um die Zahlenreihe mit einer eindeutigen Zuordnung einer Zahl zu einer Position (z.B. Freesemann, 2014; Häsel-Weide & Schöttler, 2021; Treffers, 2001).

Lehrpersonen müssen den Aufbau von Stellenwertsystemen tiefgehend durchdrungen haben, um Darstellungen von Zahlen sowie Rechengvorgänge erklären und vermitteln zu können (Krauthausen, 2018; Padberg & Büchter, 2015). Das dezimale Stellenwertsystem rechnerisch nutzen zu können, ist für die Unterrichtsgestaltung

nicht ausreichend. Allerdings zeigen Leistungsüberprüfungen (Schulz, 2023) und Beobachtungen in Praktika der Lehrpersonenausbildung an der Pädagogischen Hochschule Zürich, dass viele angehende Lehrpersonen beim Verständnis des Aufbaus von Zahldarstellungen Schwierigkeiten haben. Kolter (2014) kommt bei ihrer Erhebung zu Vorstellungen und Schwierigkeiten Studierender zum Bündelungsprinzip ebenfalls zum Schluss, dass das „Bündeln als ‚echter Prozess‘ für die meisten Studierenden nicht mehr präsent ist und dass sich viele den Aufbau der Zahldarstellung und insbesondere die Zusammenhänge zwischen Bündeln und Stellenwerten sowie entsprechende Bezüge zur Zahldarstellung mit Ziffern wieder neu erschließen müssen“ (Kolter, 2014, S. 639). Ausgangspunkt für das hier vorgestellte Projekt war der Bedarf nach produktiven Lernumgebungen und das Anliegen das Verständnis angehender Lehrpersonen des dezimalen Stellenwertsystems zu unterstützen.

2. Übersetzen zwischen Stellenwertsystemen als etablierte Lerngelegenheit

In der Lehrpersonenausbildung in den Fächern Mathematik und Informatik stellt das Übersetzen von Zahlen zwischen Stellenwertsystemen eine etablierte Lerngelegenheit dar (z.B. Krauthausen, 2018). In der Mathematikausbildung werden damit mehrere unterschiedliche Ziele verfolgt: So soll mit solchen Lerngelegenheiten die Einsicht in das Aufbauprinzip des dezimalen Stellenwertsystems verbessert werden (Krauthausen, 2018; Padberg & Büchter, 2015; Reiss & Schmieder, 2014). Bei erwachsenen Personen sind die Wissens Elemente zum dezimalen Stellenwertsystem aufgrund langjähriger Vertrautheit oftmals verdichtet, so dass der Blick für mögliche Hürden im Lernprozesse von Schüler*innen verstellt ist (Benölken et al., 2018; Krauthausen, 2018; Padberg & Büchter, 2015). Indem zwischen Stellenwertsystemen übersetzt wird, sollen die eigenen Routinen aufgebrochen und dadurch die dahinterliegende Regelmäßigkeit erklärt werden (Krauthausen, 2018). Des Weiteren erachten Padberg und Büchter (2015) für die enaktive Erarbeitung des Bündelungsbegriffs die Basis 10 als groß und sehen eine Chance darin mit einer kleineren Basis zu arbeiten. Zudem sollen neue Perspektiven für verschiedene Möglichkeiten der Zahldarstellung mittels Stellenwertsystem geöffnet werden. Reiss und Schmieder (2014) betrachten es als Allgemeinbildung mit nicht-dezimalen Stellenwertsystemen zu arbeiten und ergänzen, dass unterschiedliche Zahlssysteme, auch aus einer geschichtlichen Perspektive betrachtet, interessant sind. An der Schnittstelle zwischen fachlichem und fachdidaktischem Wissen sollen schließlich Erfahrungen hinsichtlich unterrichtlicher Konsequenzen reflektiert werden (Krauthausen, 2018).

Obwohl Lerngelegenheiten, bei denen zwischen Stellenwertsystemen übersetzt wird, eine lange Tradition haben, existieren Evaluationen dazu nur vereinzelt (Vordermanek & Schulz, 2023), teils aus Informatiklehrgängen (Chis et al., 2018; Kempthorne & Steele, 2004), und überwiegend ohne systematische Modellierung der kognitiven Struktur des Lerngegenstandes für die Erfassung der Kompetenzen oder für die fokussierte Gestaltung entsprechender Lerngelegenheiten. Gemäß

Schneider und Kolter (2014) sind die fachlichen Grundlagen und die Beschreibung des Handlungsprozesses klar, jedoch gebe es bisher kaum Erkenntnisse zu den kognitiven Prozessen. Insbesondere Übersetzungsprozesse zwischen formalen, ikonischen und enaktiven Darstellungsebenen müssten in der Ausbildung gestärkt werden. In dem hier vorgestellten Projekt wird eine Online-Selbstlernumgebung entwickelt und erprobt, die eine Verknüpfung von fachlichem und fachdidaktischem Wissen vornimmt. Zudem soll ein Betrag dazu geleistet werden, die genannte Forschungslücke zu schließen.

3. Tutor design

Die Wirksamkeit vom Lernen mit einem „Intelligent Tutoring System (ITS)“ wurde im Hinblick auf den Aufbau neuer Kompetenzen in verschiedenen Fächern (Kulik & Fletcher, 2016) und in der Domäne Mathematik (Olsen et al., 2019; Pane et al., 2014) nachgewiesen. Lernende sind aktiv und teils konstruktiv in Lernhandlungen involviert. Grundlage für die Entwicklung eines ITS ist ein kognitives Modell des Lerngegenstands (Anderson, 1993). Rückmeldungen sowie adaptive Hilfestellungen bei den Problemschritten erfolgen in Passung zum kognitiven Modell (VanLehn, 2006). Sie ermöglichen es, dass Lernende selbstständig ihrem individuellen Denkweg folgen und dabei auch Fehler machen können (Aleven et al., 2016). Hilfestellungen sind meist so aufgebaut, dass zu jedem Lösungsschritt mehrstufige Hilfen zur Verfügung stehen, die zunächst eher generisch formuliert sind und dann immer spezifischer werden (Aleven et al., 2016). Intelligente Tutoren werden seit rund 30 Jahren beforscht (Anderson, 1993). Der Hauptfokus lag darauf, Lernenden fachliches Wissen zu vermitteln. Das hier vorgestellte Projekt unterscheidet sich von bisherigen Tutor-Projekten in mehrerlei Hinsicht. Zunächst sind angehende Lehrpersonen und nicht Schüler*innen die Zielgruppe. Weitergehend werden fachliches und fachdidaktisches Wissen im Sinne der nachfolgend dargestellten drei Kernprinzipien verknüpft. Darüber hinaus kann die Lernumgebung sowohl für online wie auch hybride Lehre eingesetzt werden.

Die drei Kernprinzipien

- *Prinzip 1: Aktives Arbeiten mit Darstellungsvernetzungen und didaktischen Materialien der anvisierten Schulstufen (Primar- und Sekundarstufe 1)*
- *Prinzip 2: Ermöglichung aktiver Lernhandlungen für angehende Lehrpersonen mittels neu entwickelter ikonischer Tools (z.B. Punktefeld)*
- *Prinzip 3: Transfers und Reflexion zur fachlichen und fachdidaktischen Theorieverknüpfung*

Die gemeinsame Realisierung aller drei Prinzipien in einem intelligenten Tutor für die genannte Zielgruppe stellt im Bereich der Tutorenentwicklung eine Innovation dar. Im Rahmen des Projekts wurden unter Berücksichtigung der drei Kernprinzipien bisher 7 Aufgabensets entwickelt, die das strukturorientierte sowie das positionorientierte Verständnis von Stellenwerten in den Blick nehmen (z.B. Freeseemann, 2014; Häsel-Weide & Schöttler, 2021) und ausgewählte Lernprozesse von Schüler*innen zur Zahlbegriffsentwicklung abbilden. Abbildung 13 gibt einen

Überblick über die sieben entwickelten Aufgabensets. Die Umsetzung der drei Kernprinzipien wird in den nachfolgenden Abschnitten 3.1–3.3 erläutert.

1 Zählen und Anzahlen bestimmen

Zählen im Zehner- und Sechssystem (mit und ohne Zahlenband)

Anzahlen bestimmen im Zehner- und Sechssystem (mit Zahlenband)

Zahlenband im Zehner- und Sechssystem

Prinzipien des Zehner- und Sechssystems

2 Strukturen nutzen, um Anzahlen zu bestimmen

Fünfer- und Zehnerstrukturen nutzen, um Anzahlen im Zehnersystem zu bestimmen

3_6 -er- und 10_6 -er-Strukturen nutzen, um Anzahlen im Sechssystem zu bestimmen

Finger, Würfelbilder, Punktebilder, Strichbündel im Zehner- und Sechssystem

Strategien zur Anzahlbestimmung

3 Vorwärts und rückwärts zählen

Vorwärts und rückwärts zählen im Zehner- und Sechssystem

Zahlenband im Zehner- und Sechssystem

Niveaus beim Einsatz der Zahlwortreihe

4 Strukturen nutzen, um Zahlen darzustellen

Fünfer- und Zehnerstrukturen nutzen, um Zahlen im Zehnersystem darzustellen

3_6 -er- und 10_6 -er-Strukturen nutzen, um Zahlen im Sechssystem darzustellen

Punktefeld im Zehner- und Sechssystem

Teile-Ganzes-Prinzip

5 Größere Zahlen schreiben, lesen und darstellen

Größere Zahlen im Zehner- und Sechssystem schreiben, lesen und darstellen

Systemholz und Stellenwertkarten im Zehner- und Sechssystem

Bündeln und Entbündeln

6 Fortgesetzte Bündelung und Stellenwert

Fortgesetzte Bündelung und Stellenwertschreibweise im Zehner- und Sechssystem

Stellenwerttafel im Zehner- und Sechssystem

Fortgesetztes Bündeln und Entbündeln

7 Kommazahlen

Kommazahlen im Sechssystem schreiben

Rechnen mit Kommazahlen im Sechssystem

Systemholz und Stellenwerttafel im Sechssystem auf Kommazahlen erweitert

Multiplikative Beziehungen und Anteile

Abbildung 13: Aufgabensets des Stellenwerttutors mit den Kernprinzipien 1 und 2 „Schulstufentypische mathematikdidaktische Materialien“ (orange) und Kernprinzip 3 „Fachdidaktischer Fokus und Theorieverknüpfung, größtenteils mit Reflexion“ (blau)

3.1 Aktives Arbeiten mit Darstellungsvernetzungen und schulstufentypischen mathematikdidaktischen Materialien

Mathematische Konzepte können durch enaktive, ikonische, symbolische und sprachliche Darstellungen repräsentiert werden (Zech, 1998). Im Zentrum nachhaltiger Lernprozesse steht dabei eine mehrfache Übersetzung zwischen Darstellungen: „Das Ergründen und Ineinander-Überführen verschiedener Darstellungsformen ist [...] ein wichtiger Schritt hin zu tragfähigen Vorstellungen“ (Vogel & Wittmann, 2010, S. 6). Lernende sollen durch die Darstellungsvernetzung abstrakte Konzepte verstehen können. Übersetzungsprozesse zwischen Darstellungen sollen demzufolge auch in der Ausbildung thematisiert werden (Schneider & Kolter, 2014). Hierbei spielen didaktische Materialien eine wesentliche Rolle und können Studierenden helfen, z.B. Herausforderungen beim Zählen oder Bündeln als Prozess zu erfahren und sich bewusst zu machen. Exemplarisch für die Umsetzung im Tutor ist in Abbildung 14 die Einführung des Zahlenbandes mit einer konzisen Infobox oben dargestellt und unten eine der dazugehörigen Aufgaben im Zehnersystem. Diese im Zehnersystem sehr einfache Aufgabe wird nachfolgend als Übungsaufgabe im Sechzersystem bearbeitet. Zuvor sehen die Studierenden ein Zahlenband im Sechzersystem von 0 bis $20_6 (=12_{10})$ und beantworten Fragen zu den im Sechzersystem vorkommenden Ziffern sowie dazu, wie viele Elemente im Sechzersystem zu einer nächstgrößeren Einheit gebündelt werden. Diese Hinweise werden anschließend ausgeblendet, und nun sollen verschiedene lückenhafte Zahlenbänder im Sechzersystem vervollständigt werden. Als Hilfen werden stufenweise immer konkretere Erklärungen bis hin zum Anzeigen eines ausgefüllten Zahlenbandes im Sechzersystem, das die gefragte Lösung beinhaltet, angeboten. Das Ziel dieser Übungsaufgaben im Sechzersystem besteht darin, die Herausforderungen beim Finden von Nachfolge- und Vorgängerzahlen zu erleben. Erlebbar wird dies dadurch, dass möglicherweise die meisten Studierenden in dieser Lernphase das Sechzersystem noch nicht durchdrungen oder memoriert haben. Daher lässt sich die mögliche Hilfestellung eines Zahlenbandes erfahren. Zudem sollen die Studierenden angeregt werden, eigenständig Hypothesen zur Regelmäßigkeit des Sechzersystems zu bilden.

3.2 Ermöglichung aktiver Lernhandlungen mittels neu entwickelter ikonischer Tools

Für die Arbeit mit einem intelligenten Tutor müssen Aufgaben in geeigneter Form digital dargestellt und die Eingabe der Lösungsschritte intuitiv erfassbar sein (Rau et al., 2009). Begleitend zur symbolischen Repräsentation von Zahlen nehmen in diesem Tutor ikonische Darstellungen u.a. mit Punktefeld und Systemholz eine wichtige Rolle ein. In einem ersten Schritt wurden entsprechende Aufgaben mit Drag'n'Drop-Elementen realisiert (siehe Abbildung 15).

Infobox zum didaktischen Material: Zahlenband

PH
ZH

Eine der zentralen Eigenschaften von Zahlen ist, dass sie eindeutig geordnet werden können (Ordinalaspekt). Diese Eigenschaft lässt sich durch das «Zahlenband» gut darstellen. Das Zahlenband ist deshalb ein wichtiges Hilfsmittel beim Verständnisaufbau. Es eignet sich insbesondere für

- Zählübungen (vorwärts und rückwärts mit Zehnerübergängen)
- Zahlvergleiche (grösser / kleiner)
- Bestimmen von Nachbarzahlen



Zahlenband Vorderseite



Zahlenband Rückseite

Das Zahlenband sollte nur für eine begrenzte Zeit genutzt werden, damit die Kinder ein inneres Konzept der geordneten Zahlenreihe aufbauen können und die Übungen nicht nur reine Ableseübungen bleiben.



Zählen im Zehnersystem (mit und ohne Zahlenband)

PH
ZH

Hier sehen Sie einen Abschnitt des Zahlenbandes.
Welche Zahlen fehlen? Tippen Sie die fehlenden Zahlen in die markierten Felder ein.



Zählen Sie am Zahlenband von 1 aus vorwärts. Welche Zahl kommt nach der «10»?

◀ Zurück



Nächstes ▶

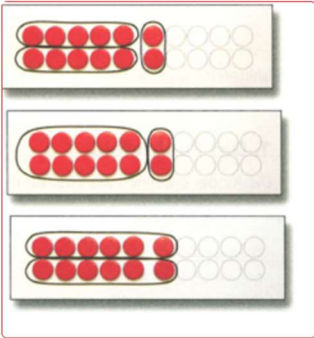


Abbildung 14: Infobox zum didaktischen Material Zahlenband (oben) und dazugehörige Aufgabe (unten)

Fünfer- und Zehnerstrukturen nutzen, um Zahlen im Zehnersystem darzustellen

Hier ist die Zahl 12 im Punktefeld dargestellt. Ordnen Sie die Punktefelder den passenden Aussagen zu.

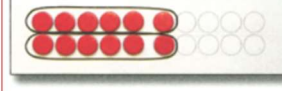
**PH
ZH**



Zweimal sechs.



Zwei Fünferbündel, also zehn und zwei weitere Punkte.



Ein Zehnerbündel und zwei weitere Punkte.

?
Tipp

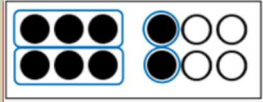
✓
Fertig

◀ Zurück
Nächstes ▶

3_6 er- und 10_6 er-Strukturen nutzen, um Zahlen im Sechzersystem darzustellen

Hier ist die Zahl 12_6 im Punktefeld dargestellt. Ordnen Sie die Punktefelder den passenden Aussagen zu.

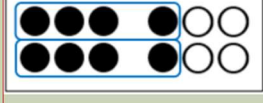
**PH
ZH**



Zweimal vier Punkte.



Einmal ein 10_6 er-Bündel und zwei weitere Punkte.



Zwei 3_6 er-Bündel, also ein 10_6 und zwei mehr.

?
Tipp

✓
Fertig

◀ Zurück
Nächstes ▶

Abbildung 15: Drag'n'Drop-Elemente zur ikonischen Darstellung von Zahlen im Punktefeld im Zehnersystem (oben) und im Sechzersystem (unten)

Drag'n'Drop-Elemente erlauben bereits eine gewisse Interaktion, jedoch konnten in der hier dargestellten ursprünglichen Version des Tutors noch keine Aufgaben implementiert werden, die das Manipulieren von Punktemustern beinhalten. Daher wurden in einem zweiten Schritt neue Tools entwickelt. Entsprechende Aufgaben wurden bereits entworfen, mussten jedoch vor der ersten Pilotierung wieder ausgeschlossen werden, da sie noch zu wenig stabil liefen. Aktuell liegen dynamische Komponenten zu Punktefeldern, zum Malwinkel und zum Systemholz vor, die in einer nächsten Evaluationsphase eingesetzt werden.

Ziel des Aufgabenformats in Abbildung 3 ist es, analog zur „Kraft der 5“ im Zehnersystem, den Blick für 3₆er- und 10₆er-Strukturen für geeignete Bündelungen im Sechzersystem zu schärfen. Dafür sollen die unterschiedlich markierten 20₆er-Punktefelder den vorgegebenen Formulierungen zur Strukturierung der 12₆ Punkte zugeordnet werden. Diese entsprechen Formulierungen, wie sie im Unterricht in Klassenstufe 1 im Zehnersystem gebräuchlich sein können. Die Beispiele in Abbildung 3 unten verdeutlichen ein weiteres Gestaltungsmerkmal der hier vorgestellten Tutorumgebung zur Vertiefung des Stellenwertverständnisses: Bündelungen im Sechzersystem werden konsequent als z.B. 10₆er oder 20₆er beschrieben und nicht als „Sechser- oder Zwölferbündel“, was für Studierende allenfalls leichter verständlich wäre. Dies dient sowohl dazu, das Denken in der ungewohnten Bündelung des Sechzersystems einzufordern und anzuregen, als auch Herausforderungen beim Zahlbegriffserwerb von Kindern zumindest in Teilen nacherleben zu können.

3.3 Transfers und Reflexion zur fachlichen und fachdidaktischen Theorieverknüpfung

Um lernwirksamen Unterricht gestalten zu können, müssen Lehrpersonen über fachspezifisches Professionswissen verfügen (Brunner et al., 2006; Hill et al., 2005). Das heißt, fachliche Inhalte müssen in einer Weise durchdrungen sein, dass mathematische Lernprozesse initiiert und begleitet werden können. Es zeigt sich jedoch, dass Studierende Schwierigkeiten beim Transfer fachlichen und fachdidaktischen Wissens in die Berufspraxis haben und daher entsprechende Transfers und Verknüpfungen in der Ausbildung gestärkt werden sollten (Schneider & Kolter, 2014). Einzig durch das Betreiben von anspruchsvoller Mathematik kann noch kein Transfereffekt in die Praxis erwartet werden (Kirsch, 1980). Wie kann somit der Aufbau von fachspezifischem Professionswissen unterstützt werden?

Prediger und Hefendehl-Hebeker (2016) führen das Konstrukt der epistemologischen Bewusstheit ein. Darunter verstehen sie, dass Lehrpersonen über eine „Art Navigationssystem im Umgang mit fachspezifischem Wissen“ verfügen sollten (Prediger & Hefendehl-Hebeker, 2016, S. 242). Der notwendige Theorie-Praxis-Transfer kann entwickelt und vertieft werden, indem unter anderem die eigenen Lernerfahrungen in der Lehrpersonenausbildung immer wieder reflektiert werden (Helmerich & Hoffart, 2018; Müller, 2011). Lernen und Verstehen eines konkreten

Konzepts heißt aus einer kognitionspsychologischen Sicht, ein semantisches Netzwerk bestehend aus Elementen und Relationen aufzubauen (Drollinger-Vetter, 2011) und im Verlauf des Verstehensprozesses Verknüpfungen umzustrukturieren, zu löschen oder auszubauen. Die Bedeutung und der Sinn eines Konzepts liegen in den darin enthaltenen Beziehungen (Aebli, 1993); die Netzwerke werden beim Durcharbeiten flexibilisiert und beweglich gemacht, damit Transfer möglich wird (Drollinger-Vetter, 2011). Ferner kann durch theoriegeleitete Reflexion die eigene Unterrichtspraxis weiterentwickelt werden, womit die professionelle Grundlage für das Lernen im Beruf gestärkt wird (Barzel et al., 2016).

Im Tutor wird die Förderung der Transferfähigkeit auf zwei Arten umgesetzt. Zum einen werden didaktische Materialien mit den entsprechenden Aufgabentypen zuerst im bekannten Kontext des Zehnersystems vorgestellt und bearbeitet (siehe Abbildung 16 oben und Abbildung 17 links). Anschließend folgen analoge Aufgaben im Sechzersystem (siehe Abbildung 16 unten und Abbildung 17 rechts). Dabei erleben Studierende Herausforderungen im Umgang mit dem Material und im Stellenwertverständnis. Dies soll es den Studierenden ermöglichen, durch selbsterlebte Verständnisschwierigkeiten im Sechzersystem typische Lernhürden von Kindern im Zehnersystem besser nachvollziehen zu können.

Zum anderen schließen einzelne Themenblöcke mit ausgewiesenen Reflexionsaufgaben ab: Im Beispiel Abbildung 6 werden die Studierenden angeregt, die eigene (dominante / aktuelle) Strategie zur Bearbeitung der Aufgaben im Sechzersystem zu erkennen und sich zudem mit alternativen Strategien vertraut zu machen. Weitergehend sollen die in den Strategiebeschreibungen angedeuteten Vorstellungen das Verständnis der Studierenden vom Bündelungsprinzip in dem hier genetisch intendierten Lernprozess weiterentwickeln und vertiefen. Abbildung 6 veranschaulicht ebenfalls Kernprinzip 1. Mittels einer Darstellungsvernetzung aus Fingerbildern und Zahlen sollen zunächst Vorstellungen zu 3₆er- und 10₆er-Bündelungen im Sechzersystem aufgebaut werden.

Durch das Zusammenwirken aller drei Kernprinzipien sollen die Studierenden in ihrer Arbeit mit dem Tutor angeregt werden, bei der Vertiefung ihres fachlichen Verständnisses eines nichtdezimalen Stellenwertsystems zugleich auch mögliche Denkwege von Kindern bei der Zahlbegriffsentwicklung im Zehnersystem und beim Operieren mit im Unterricht verbreiteten Veranschaulichungsmitteln erfahren und nachvollziehen zu können.

Fortgesetzte Bündelung und Stellenwertschreibweise im Zehnersystem

Im Zehnersystem werden immer 10 Stück zu einer neuen Einheit gebündelt.

10 Einer werden
zu einem Zehner.



10 Zehner werden
zu einem Hunderter.



10 Hunderter werden
zu einem Tausender.



Bündeln Sie im Zehnersystem und tippen Sie die Zahlen ein.

10 Zehnerstangen	
14 Zehnerstangen	
35 Zehnerstangen	
1 Hunderterplatte und 53 Zehnerstangen	
4 Hunderterplatten und 11 Zehnerstangen	
10 Hunderterplatten	
2 Hunderterplatten und 43 Einerwürfel	
20 Zehnerstangen und 5 Einerwürfel	

25 Zehnerstangen kann ich zu
2 Hunderterplatten und
5 Zehnerstangen bündeln.

Fortgesetzte Bündelung und Stellenwertschreibweise im Sechzersystem

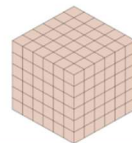
10_6 Einer werden zu einem
Eins-Nuller.



10_6 Eins-Nuller werden zu ei-
nem Eins-Null-Nuller.



10_6 Eins-Null-Nuller werden zu
einem Eins-Null-Null-Nuller.



Bündeln Sie im Sechzersystem und tippen Sie die Zahlen ein.

10_6 Eins-Null-Stangen		6
14_6 Eins-Null-Stangen		6
35_6 Eins-Null-Stangen		6
1_6 Eins-Null-Null-Platte und 53_6 Eins-Null-Stangen		6
4_6 Eins-Null-Null-Platte und 11_6 Eins-Null-Stangen		6
10_6 Eins-Null-Null-Platten		6
2_6 Eins-Null-Null-Platten und 43_6 Einerwürfel		6
20 Eins-Null-Stangen und 5 Einerwürfel		6

25_6 Eins-Null-Stangen
kann ich zu 2_6 Eins-Null-
Null-Platten und 5_6 Eins-
Null-Stange bündeln

Abbildung 16: Transfer zur fortgesetzten Bündelung vom Zehner- zum Sechzersystem mit didaktischem Material

Fortgesetzte Bündelung und Stellenwertschreibweise im Zehnersystem

Tippen Sie nach jedem Rechenschritt das Resultat in die Stellenwerttafel.

	T	H	Z	E
		2	0	0
+ 10		2	1	0
+ 100				
- 1				
+ 700				
- 20				

Fortgesetzte Bündelung und Stellenwertschreibweise im Sechzersystem

Tippen Sie nach jedem Rechenschritt das Resultat in die Stellenwerttafel.

	ENNN	ENN	EN	E
		2	0	0
+ 100_6		3	0	0
+ 10_6				
- 1_6				
+ 200_6				
+ 100_6				
- 5_6				

Abbildung 17: Transfer zur fortgesetzten Bündelung vom Zehner- zum Sechzersystem bei der Addition

Reflexion

Ihre persönliche Erfahrung zählt:
Bearbeiten Sie die Aufgaben erneut und verwenden Sie die Strategien rechts. Melden Sie nachfolgend zurück, wie schwer Ihnen diese Strategien gefallen sind.



	5_6			6			6			6	
		6			6			6			6
		6			6			6			6
		6			6			6			6

- **Strategie 0:** Zählen Sie die Objekte eins nach dem anderen ab und sagen Sie sich dabei (innerlich/laut) die Zahlwortreihe im Sechssystem vor.
- **Strategie 1:** Bei Bildern mit Anzahlen $0_6 - 5_6$ können Sie die Antwort unmittelbar angeben, da diese Anzahlbeschreibungen im Sechser- und im Zehnersystem identisch sind.
- **Strategie 2:** Achten Sie auf 3_6 -er-Bündel. Immer zwei 3_6 -er-Bündel zusammen ergeben 10_6 im Sechssystem (10_6 entspricht der Zahl 6 im Zehnersystem). Bestimmen Sie derart, wie viele 10_6 es im Sechssystem gibt. Der Rest ergibt die Einer im Sechssystem.
- **Strategie 3:** Achten Sie auf 10_6 -er-Bündel (10_6 entspricht der Zahl 6 im Zehnersystem). Bestimmen Sie derart, wie viele 10_6 es im Sechssystem gibt. Der Rest ergibt die Anzahl der Einer im Sechssystem.

Reflexion

Wie schwer ist es Ihnen gefallen, die Strategien zur Anzahlbestimmung im Sechssystem anzuwenden?



Strategie 0:	Die Objekte eins nach dem anderen abzählen und sich dabei (innerlich/laut) die Zahlwortreihe im Sechssystem vorsagen:	---- ---- gar nicht schwer eher nicht schwer eher schwer sehr schwer
Strategie 1:	Bei Bildern mit Anzahlen $0_6 - 5_6$ die Antwort unmittelbar angeben:	
Strategie 2:	Die 3_6 -er-Bündel identifizieren, immer zwei 3_6 -er-Bündel zusammen ergeben 10_6 im Sechssystem. So bestimmen wie viele 10_6 es im Sechssystem gibt. Der Rest ergibt die Einer im Sechssystem:	----
Strategie 3:	Bestimmen wie viele 10_6 es sind. Der Rest ergibt die Anzahl der Einer im Sechssystem:	----

Abbildung 18: Reflexion der Strategien zur Anzahlbestimmung mit Theorieverknüpfungen

4. Fazit und Ausblick

Mit dem hier in einer ersten Entwicklungsphase vorgestellten Projekt wird hinsichtlich des Einsatzes von tutoriellen Lernumgebungen Neuland betreten: Uns ist kein vergleichbarer Tutor bekannt, der zusammen mit der Erarbeitung neuen mathematischen Wissens (hier zu Stellenwertsystemen) für angehende Lehrpersonen zugleich auch schulstufentypische Materialien zur Vorstellungsentwicklung bei den Studierenden selbst einsetzt und zudem explizit ein Reflektieren über eigene und fremde Lösungswege sowie über die Bedeutung des neu Erlernten für die spätere eigene Berufspraxis thematisiert.

Die Studierenden arbeiten im für sie ungewohnten Sechssersystem mit primarschul-spezifischen Materialien. Dadurch können sie möglicherweise Schwierigkeiten, die mit einem mangelnden Verständnis von Prinzipien des Stellenwertsystems zusammenhängen, selbst erleben, obwohl sie bereits seit vielen Jahren routiniert im Zehnersystem operieren können. Das reflektierte Erleben von erwachsenen Studierenden ist nicht identisch mit dem kindlichen Erleben beim grundlegenden Zahlbegriffserwerb. Zudem ist die Lernzeit in diesem Tutor im Vergleich zur mehrjährigen Lernzeit von Kindern komprimiert. Dennoch bietet sich hier die Möglichkeit Lernhürden von Kindern nicht nur abstrakt, sondern möglicherweise auch emotional, nachvollziehen zu können.

Im weiteren Projektverlauf gehen wir ergänzend Forschungsfragen zur Effektivität spezifischer Hilfenutzungen u.a. bezüglich des fachlichen Lernerfolgs nach. Dazu wird eine überarbeitete Version des Tutors bei einer Kohorte von mehr als 300 Studierenden eingesetzt. Es sollen fachliche Leistungstests mit Selbsteinschätzungen und Prozessdaten verknüpft werden. Die Selbsteinschätzungen beinhalten Stressempfinden, Hilfenutzung und fachdidaktischen Lernzuwachs. Aus den Prozessdaten des Tutors sollen die tatsächlichen Hilfenutzungen sowie unterschiedliche inhaltliche Denkwege der Lernenden rekonstruiert werden. Langfristig verfolgen wir mit dem Projekt das Ziel, sowohl einen wissenschaftlichen Beitrag zur mathematikdidaktischen Tutorforschung zu leisten als auch die Qualität der Ausbildung von Lehrpersonen zu steigern.

Literatur:

- Aebli, H. (1993). *Denken: das Ordnen des Tuns*. Klett-Cotta.
- Aleven, V., McLaren, B. M., Sewall, J., van Velsen, M., Popescu, O., Demi, S., Ringen-berg, M. & Koedinger, K. R. (2016). Example-Tracing Tutors: Intelligent Tutor De-velopment for Non-programmers. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, 26(1), 224–269. <https://doi.org/10.1007/s40593-015-0088-2>
- Anderson, J. R. (1993). *Rules of the mind*. Erlbaum.
- Andersson, U. (2010). Skill Development in Different Components of Arithmetic and Basic Cognitive Functions: Findings From a 3-Year Longitudinal Study of Children With Different Types of Learning Difficulties. *Journal of educational psychology*(1), 115–134.
- Barzel, B., Eichler, A., Holzäpfel, L., Leuders, T., Maaß, K. & Wittmann, G. (2016). Vernetzte Kompetenzen statt trägen Wissens – Ein Studienmodell zur konsequenten Vernetzung von Fachwissenschaft, Fachdidaktik und Schulpraxis. In A. Hoppen-brock, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück (Hrsg.), *Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik. Lehren und Lernen von Mathe-matik in der Studieneingangsphase* (S. 33–50). Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-10261-6_3
- Benölken, R., Gorski, H.-J. & Müller-Philipp, S. (2018). Stellenwertsysteme. In R. Benölken, H.-J. Gorski & S. Müller-Philipp (Hrsg.), *Leitfaden Arithmetik* (S. 205–

- 229). Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-22852-1_10
- Brunner, M., Kunter, M., Krauss, S., Baumert, J., Blum, W., Dubberke, T., Jordan, A., Klusmann, U., Tsai, Y.-M. & Neubrand, M. (2006). Welche Zusammenhänge bestehen zwischen dem fachspezifischen Professionswissen von Mathematiklehrkräften und ihrer Ausbildung sowie beruflichen Fortbildung? *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 9(4), 521–544. <https://doi.org/10.1007/s11618-006-0166-1>
- Bryant, D. P., Bryant, B. R., Gersten, R., Scammacca, N. & Chavez, M. M. (2008). Mathematics Intervention for First- and Second-Grade Students With Mathematics Difficulties. *Remedial and Special Education*, 29(1), 20–32. <https://doi.org/10.1177/0741932507309712>
- Cawley, J., Parmar, R. S., Lucas-Fusco, L. M., Kilian, J. D. & Foley, T. E. (2007). Place Value and Mathematics for Students with Mild Disabilities: Data and Suggested Practices. In *Learning Disabilities: A contemporary Journal* (Bd. 5, S. 21–39).
- Chis, A. E., Moldovan, A.-N., Murphy, L., Pathak, P. & Muntean, C. H. (2018). Investigating Flipped Classroom and Problem-based Learning in a Programming Module for Computing Conversion Course. *J. Educ. Technol. Soc.*, 21, 232–247.
- Drollinger-Vetter, B. (2011). *Verstehenselemente und strukturelle Klarheit* [Diss. Univ. Zürich, 2009. - Ref.: Kurt Reusser; Korref.: Eckhard Klieme, Waxmann, Münster etc.]. Zürich Zentralbibliothek.
- Freeseemann, O. (2014). *Schwache Rechnerinnen und Rechner fördern*. Springer Fachmedien Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-04471-8>
- Häsel-Weide, U. & Schöttler, C. (2021). Das Dezimalsystem verstehen – Bedeutung, Erkenntnisse, Anregungen. *Zeitschrift für Mathematikdidaktik in Forschung und Praxis*, 2. <https://doi.org/10.48648/8QAE-MB28>
- Helmerich, M. A. & Hoffart, E. S. (2018). Reflektieren als aktivierendes Element in der Mathematiklehrerbildung. In R. Möller & R. Vogel (Hrsg.), *Konzepte und Studien zur Hochschuldidaktik und Lehrerbildung Mathematik. Innovative Konzepte für die Grundschullehrerausbildung im Fach Mathematik* (S. 219–233). Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-10265-4_9
- Herzog, M., Fritz, A. & Ehlert, A. (2017). Entwicklung eines tragfähigen Stellenwertverständnisses [Development of a resilient place value understanding]. In A. Fritz, S. Schmidt & G. Ricken (Hrsg.), *Handbuch Rechenschwäche: Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie* (3. Auflage, S. 266–286). Beltz.
- Hill, H. C., Rowan, B. & Loewenberg Ball, D. (2005). Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Students Achievement. *American Educational Research Journal*, 42(2). <http://www.jstor.org/stable/3699380>
- Humbach, M. (2008). *Arithmetische Basiskompetenzen in der Klasse 10. Quantitative und qualitative Analysen*. Dr. Köster.
- Kemphorne, D. & Steele, A. (2004). An evaluation of different delivery methods for teaching binary, hex and decimal conversion. *Journal of Applied Computing and Information Technology*, 18(2).
- Kirsch, A. (1980). Zur Mathematik-Ausbildung der zukünftigen Lehrer — im Hinblick auf die Praxis des Geometrieunterrichts. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 1(4), 229–256. <https://doi.org/10.1007/BF03338639>

- Kolter, J. (2014). *So schwer kann das mit dem Bündeln doch nicht sein*.
<https://doi.org/10.17877/DE290R-1059>
- Krauthausen, G. (2018). *Einführung in die Mathematikdidaktik – Grundschule*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-54692-5>
- Kulik, J. A. & Fletcher, J. D. (2016). Effectiveness of Intelligent Tutoring Systems. *Review of Educational Research*, 86(1), 42–78.
<https://doi.org/10.3102/0034654315581420>
- Moser Opitz, E. (2007). *Rechenschwäche/Dyskalkulie: Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern* (1. Aufl.). Beiträge zur Heil- und Sonderpädagogik: Bd. 31. Haupt-Verl.
- Müller, S. (Hrsg.). (2011). *Reflexion als Schlüsselkategorie? Praxis und Theorie im Lehramtsstudium*. Schneider-Verl. Hohengehren.
- Olsen, J. K., Rummel, N. & Aleven, V. (2019). It is not either or: An initial investigation into combining collaborative and individual learning using an ITS. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning*, 14(3), 353–381.
<https://doi.org/10.1007/s11412-019-09307-0>
- Padberg, F. & Büchter, A. (2015). *Einführung Mathematik Primarstufe - Arithmetik* (2. Aufl. 2015). *Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II*. Springer Berlin Heidelberg. <http://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-epflicht-1517453>
- Pane, J. F., Griffin, B. A., McCaffrey, D. F. & Karam Rita. (2014). Effectiveness of Cognitive Tutor Algebra I at Scale. In *Educational Evaluation and Policy Analysis* (S. 127–144).
- Prediger, S. & Hefendehl-Hebeker, L. (2016). Zur Bedeutung epistemologischer Bewusstheit für didaktisches Handeln von Lehrkräften. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37(1), 239–262. <https://doi.org/10.1007/s13138-016-0085-5>
- Rau, M. A., Aleven, V. & Rummel, N. (2009). Intelligent Tutoring Systems with Multiple Representations and Self-Explanation Prompts Support Learning of Fractions. In *Proceedings of the 2009 Conference on Artificial Intelligence in Education: Building Learning Systems That Care: From Knowledge Representation to Affective Modeling* (S. 441–448). IOS Press.
- Reiss, K. & Schmieder, G. (2014). Zahldarstellungen und Stellenwertsysteme. In K. Reiss & G. Schmieder (Hrsg.), *Basiswissen Zahlentheorie: Eine Einführung in Zahlen und Zahlbereiche* (S. 63–84). Springer Berlin Heidelberg.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-39773-8_3
- Ross, S. H. (1989). Parts, Wholes, and Place Value: A Developmental View. *The Arithmetic Teacher*, 36(6), 47–51. <https://doi.org/10.5951/AT.36.6.0047>
- Scherer, P. & Moser Opitz, E. (2010). *Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe*. Spektrum Akademischer Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2693-2>
- Schmassmann, M. (2009). Geht das hier ewig weiter? - Dezimalbrüche, Größen, Runden und Stellenwert. In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.), *Beltz-Pädagogik. Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I: Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden* (S. 167–185). Beltz Verlag.

- Schneider, M.-C. & Kolter, J. (Januar 2014). *Kategorisierung mathematischer Bündelungsprozesse von Grundschullehramtsstudierenden* (Khdm-Report 14-2). Universität Kassel; Leuphana Universität Lüneburg; Universität Paderborn. <https://kobra.uni-kassel.de/handle/123456789/2014012444809>
- Schulz, A. (2023). Assessing student teachers' procedural fluency and strategic competence in operating and mathematizing with natural and rational numbers. *Journal of Mathematics Teacher Education*. Vorab-Onlinepublikation. <https://doi.org/10.1007/s10857-023-09590-7>
- Treffers, A. (2001). Numbers and numbers relationships. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Hrsg.), *Children learn mathematics: a learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school* (S. 101–120). Freudenthal Inst. Univ.
- VanLehn, K. (2006). The behavior of tutoring systems. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, 16(3), 227–265.
- Voermanek, J. & Schulz, A. (2023). Which promotes learning success and acceptance better? Experimental comparison between an intelligent and a passive online learning environment. In L. Gómez Chova, A. López Martínez & I. Candel Torres (Hrsg.), *INTED Proceedings, INTED2023 Proceedings* (S. 809–819). IATED. <https://doi.org/10.21125/inted.2023>
- Vogel, M. & Wittmann, G. (2010). Mit Darstellungen arbeiten – tragfähige Vorstellungen entwickeln. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 52(32), 1–8.
- Winter, H. (2001). *Inhalte mathematischen Lernens: Fundamentale Ideen in der Grundschule*.
- Zech, F. (1998). *Grundkurs Mathematikdidaktik: Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik* (9., neu ausgestattete Aufl.). Beltz Pädagogik. Beltz.

Erlernen der Ableitung über dynamische Visualisierungen per se besser als über statische? – Ergebnisse aus einer Pilotierungsstudie

Im Rahmen dieser Studie wurden die Zugänge zur Ableitung über ausschließlich dynamische oder statische Visualisierungen im Zwei-Gruppen Prä-Post-Design mit 110 Lernenden (Klasse 10 bzw. 11) verglichen. Es zeigte sich, dass beide Gruppen im Durchschnitt ihre Leistung verbesserten, jedoch kein signifikanter Interaktionseffekt zwischen der Visualisierungsart und den Messzeitpunkten besteht; auch waren Grundvorstellungen zur Ableitung ähnlich stark ausgeprägt.

1. Einleitung

Wenn auf die Frage ‚Was bedeutet der Begriff Ableitung für dich?‘ eine Antwort der Form ‚Also bei x^3 muss man die 3 nach vorne schreiben und dann beim x oben eins weniger nehmen, also x^2 ‘ folgt, dann wird ein zentrales Problem des Mathematikunterrichts sichtbar. Der Schwerpunkt liegt oftmals auf der Ausführung algorithmischer Regeln. Schüler:innen assoziieren mit dem Ableitungsbegriff Verfahren zur Bestimmung der Ableitungsfunktion und weniger mit den mathematischen Konzepten, die der Ableitung zugrunde liegen, wie z.B. die Deutung als lokale Änderungsrate oder Tangentensteigung (Sari et al., 2018).

Die Forderung nach einem vorstellungs- und verständnisorientierten Mathematikunterricht kam spätestens nach den Ergebnissen aus PISA 2000 auf und ist nach wie vor im aktuellen Diskurs:

„Zentral für einen allgemeinbildenden Mathematikunterricht ist, dass bei allen Unterrichtsinhalten eine Verständnis- vor einer Kalkülorientierung stehen sollte, damit die Schülerinnen und Schüler in der Lage sind, die mathematischen Begriffe mit der alltäglichen Lebenswelt in Beziehung zu setzen [...] (z.B. Ableitungsbegriff und Momentangeschwindigkeit)“ (Rolfes & Heinze, 2022, S. 40).

Es lassen sich in der Literatur einige Vorschläge finden, den Analysisunterricht an Schulen vorstellungsorientiert zu gestalten (z.B. Hahn, 2008). So schlagen Hahn und Prediger (2004) vor, sich beispielsweise dem Ableitungsbegriff zunächst qualitativ mit Graphen von Funktionen und unter Berücksichtigung des Aufbaus tragfähiger Grundvorstellungen zu nähern. Sowohl leistungsschwache als auch leistungsstarke Schüler:innen können somit auf propädeutischer Ebene Erfahrungen mit dem mathematischen Begriff machen; dies kann z.B. mit der Unterstützung von digitalen Werkzeugen erfolgen. Im Rahmen dieses Beitrags wird die Interventionsstudie „AdVise – Ableitung (dynamisch) über Visualisierungen entdecken“ vorgestellt, welche die Grundidee von Hahn und Prediger (2004) aufgreift: Während der Intervention steht das Arbeiten mit Funktionsgraphen und Tabellen

und weniger der kalkülhafte Umgang mit Funktionstermen im Vordergrund. Unterstützt wird dieses Arbeiten zusätzlich mit dynamischen oder statischen Visualisierungen. Über erste Ergebnisse aus einer Pilotierungsstudie wird im Folgenden berichtet.

2. Theoretischer Hintergrund

2.1 Grundvorstellungen zur Ableitung

Um den zuvor beschriebenen Schwierigkeiten beim Umgang mit dem Ableitungsbegriff entgegenzuwirken, kann das Grundvorstellungskonzept herangezogen werden. Es gilt Greefrath et al. (2016) zufolge als ein Konzept über mentale Repräsentationen, die Lernende idealerweise zu mathematischen Begriffen aufbauen und dessen Kern vom Hofe und Blum (2016) wie folgt beschreiben: „This concept describes the relationships between mathematical content and the phenomenon of individual concept formation“ (S. 230).

Salle und Clüver (2021) identifizieren drei Eigenschaften von Grundvorstellungen: Erstens lässt sich die Sinnkonstituierung nennen. Lernende verstehen demzufolge mathematische Begriffe mit inhaltlichem Sinn. Ferner ermöglichen Grundvorstellungen „über die Anknüpfung an verschiedene Handlungen und Operationen ‚ein operatives Handeln auf der Vorstellungsebene‘“ (Salle & Clüver, S. 557). Drittens sind Grundvorstellungen nützlich, um in Anwendungssituationen – beispielsweise bei Modellierungsaufgaben, die einen wechselseitigen Übersetzungsprozess zwischen der Welt der Mathematik und der Realität erfordern – mit mathematischen Begriffen umzugehen (vom Hofe & Blum, 2016).

Zum Ableitungsbegriff identifizieren Greefrath et al. (2022) die vier Grundvorstellungen *Lokale Änderungsrate*, *Tangentensteigung*, *Lokale Linearität* und *Verstärkungsfaktor*. Dem Kernlehrplan für die Sekundarstufe II an Gymnasien und Gesamtschulen in Nordrhein-Westfalen für das Fach Mathematik zufolge werden lediglich die beiden erstgenannten Grundvorstellungen namentlich erwähnt. Dort ist nämlich in den Kompetenzerwartungen bis zum Ende der Einführungsphase (Klasse 10 an G8-Gymnasien bzw. Klasse 11 an Gesamtschulen) festgelegt, dass Schüler:innen „die Ableitung an einer Stelle als lokale Änderungsrate/Tangentensteigung [deuten]“ (MSB, 2014, S. 25). Auch in Greefrath et al. (2022) wurden diese beiden Grundvorstellungen als die von Studierenden präferierten identifiziert. Daher wird im Rahmen dieses Beitrags ebenfalls der Fokus auf die zentralen Grundvorstellungen *Lokale Änderungsrate* und *Tangentensteigung* gelegt. Diese werden nachfolgend dargestellt.

- *Grundvorstellung: Lokale Änderungsrate*

Die *Lokale Änderungsrate* wird als der Grenzwert eines Quotienten, nämlich mittlerer Änderungsraten, interpretiert. Nach Roth und Siller (2016) findet eine Einführung zur Ableitung als *Lokale Änderungsrate* über vier Stufen statt: Zuerst wird der Funktionswert an einer Stelle als Bestand zu einem Zeitpunkt interpretiert. An-

schließlich wird der absolute Zuwachs als die Differenz von Funktionswerten aufgefasst. Auf der dritten Stufe kann der durchschnittliche Zuwachs über den Differenzenquotienten ermittelt werden. Durch systematisches Verkleinern des betrachteten Intervalls kann schließlich die lokale Änderungsrate an einer Stelle bestimmt werden. Schüler:innen sollen hierbei auch die Vorstellung einer Momentangeschwindigkeit bei Änderungsprozessen entwickeln (Chau et al., 2021; Greefrath et al., 2016).

- *Grundvorstellung: Tangentensteigung*

Im Rahmen dieser Grundvorstellung wird die Ableitung einer Funktion an einer Stelle als die Steigung der Tangente an dieser Stelle aufgefasst. Schüler:innen sollen sich unter einer Tangente eine sogenannte ‚Schmiegegerade‘ vorstellen, die den Verlauf des Funktionsgraphen in einer kleinen Umgebung um die betrachtete Stelle am besten linear approximieren kann. Dynamisch entsteht die Tangente an einem Funktionsgraphen an einer Stelle x_0 als Grenzlage von Sekanten durch die Punkte $P_1(x_0|f(x_0))$ und $P_2(x|f(x))$ für $x \rightarrow x_0$ (Feudel, 2020; Greefrath et al., 2022).

Bezüglich beider Grundvorstellungen wurde bereits eine Reihe von Fehlvorstellungen seitens Schüler:innen identifiziert. Orton (1983) beschreibt Schwierigkeiten von Lernenden hinsichtlich des Zusammenhangs zwischen der mittleren Änderungsrate über einem bestimmten Intervall und der lokalen Änderungsrate an einer konkreten Stelle und des Verständnisses der Tangente als Grenzlage von Sekanten. Eine Übersicht über mögliche Probleme von Lernenden im Umgang mit Ableitungen (und Grenzwerten) findet sich z.B. bei Bressoud et al. (2016).

2.2 Dynamische und statische Visualisierungen

Nach Greefrath und Ulm (2021) können Visualisierungen „als ‚Kristallisationspunkte‘ zur Entwicklung von Grundvorstellungen dienen und [...] helfen, Grundvorstellungen – auch langfristig – im Gedächtnis zu behalten“ (S. 36). Die Autoren nennen, dass sich dafür sowohl statische als auch dynamische Visualisierungen eignen können. Statische Visualisierungen können beispielsweise Standbilder oder Fotos sein, welche sich nicht verändern (Castro-Alonso et al., 2019). Im Gegensatz dazu können dynamische Visualisierungen wie folgt definiert werden:

„[A]ny application, which generates a series of frames, so that each frame appears as an alteration of the previous one, and where the sequence of frames is determined, either by the designer or the user“ (Bétrancourt & Tversky, 2000, S. 313).

Rolfes et al. (2020) unterscheiden zusätzlich zwischen linear-dynamischen und interaktiv-dynamischen Visualisierungen; letztere zeichnen sich durch die Möglichkeit der Interaktivität des Nutzenden mit der Visualisierung aus, die sich durch Eingabe oder Manipulation von Daten zeigt. Im Rahmen dieser Studie werden interaktiv-dynamische Visualisierungen kurz als dynamische Visualisierungen bezeichnet. Diese wurden über GeoGebra erzeugt und erlauben den Nutzenden die

Verwendung von Schiebereglern und des Zugmodus. Über die dynamische Verlinkung von numerischen und symbolischen Darstellungen mit einem Funktionsgraphen – das sogenannte *dyna-linking* (Ainsworth, 1999) – kann entdeckend der Zusammenhang zwischen dem Graphen einer Funktion f , der Steigung der Tangente sowie dem Graphen der Ableitungsfunktion f' erschlossen werden (Hong & Thomas, 2015). Dadurch können dynamische Visualisierungen kognitiv entlastend wirken, „da sie Imaginations- und Interpretationsvorgänge überflüssig machen“ (Wilzek, 2020, S. 169). Dem kann allerdings gegenübergestellt werden, dass innerhalb von dynamischen im Vergleich zu statischen Visualisierungen lediglich vergängliche Informationen präsentiert werden; auch kann es zu einer „Illusion of Understanding“ durch eine oberflächliche Nutzung der dynamischen Visualisierung kommen (Paik & Schraw, 2013). Die Effektivität von dynamischen Visualisierungen auf das Erlernen des Ableitungsbegriffs wurde in einer Studie von Zengin (2018) untersucht: In einer Lernumgebung mit integrierten GeoGebra-Applets, die sich durch Dyna-Linking und die Möglichkeit der Verwendung des Zugmodus auszeichnen, konnten Studierende den Zusammenhang zwischen der Ableitung als *Lokale Änderungsrate* und als *Tangentensteigung* explorativ entdecken. Es wurde herausgefunden, dass Studierende den Zusammenhang der Grundvorstellungen sowie die zugrundeliegenden Prozesse (*Tangentensteigung* als Grenzwert von Sekantensteigungen und *Lokale Änderungsrate* als Grenzwert durchschnittlicher Änderungsraten) erklären konnten.

Darüber hinaus gibt es Metastudien über den Vergleich der Effektivität von dynamischen und statischen Visualisierungen von Höffler und Leutner (2007), Berney und Bétrancourt (2016) sowie Castro-Alonso et al. (2019). Denen zufolge besteht ein positiver overall effect zugunsten dynamischer Visualisierungen mit kleinen bis mittleren Effektstärken. Zusätzlich wurden Funktionen innerhalb dynamischer Visualisierungen identifiziert, die zu größeren Effektstärken beitragen. Dazu gehört beispielsweise die Kontrolle der Wiedergabegeschwindigkeit einer dynamischen Visualisierung durch den Nutzenden. Bei Betrachtung der mathematikspezifischen Untersuchungen in den genannten Metastudien fällt auf, dass der Vorteil dynamischer gegenüber statischen Visualisierungen noch geringer ausfällt.

2.3 Forschungsfragen

Aufgrund der vielfältig existierenden Schwierigkeiten Lernender beim Verständnis des Ableitungsbegriffs besteht Bedarf, sich tiefergehend mit diesem Forschungsfeld auseinanderzusetzen (Bressoud et al., 2016). Aus der Theorie heraus konnte das Potential von Grundvorstellungen, die über Visualisierungen erlernt werden sollen, herausgestellt werden. Daher wurde im Rahmen der im nächsten Kapitel dargestellten Studie eine Unterrichtssequenz zur Einführung der Ableitung konzipiert, die den Erwerb von Grundvorstellungen in den Fokus stellt. Um die Effektivität dieser Unterrichtssequenz bezogen auf die darin behandelten Inhalte zu untersuchen – unabhängig davon, ob die Einführung der Ableitung über dynamische oder statische Visualisierungen erfolgte – wird der folgenden ersten Forschungsfrage nachgegangen.

- (1) Inwiefern lässt sich eine Entwicklung der Mathematikleistung im Umgang mit dem zur Ableitung relevanten Vorwissen, der Lokalen Änderungsrate und der Tangentensteigung sowie der Ableitungsfunktion durch eine Intervention zur Einführung der Ableitung über (1) dynamische oder (2) statische Visualisierungen bei Lernenden feststellen?

Vor dem Hintergrund der Metastudien und der darin beschriebenen uneindeutigen Studienlage zum Vorteil von dynamischen gegenüber statischen Visualisierungen im Fach Mathematik wird im Rahmen der zweiten Forschungsfrage untersucht, inwiefern die Art der verwendeten Visualisierungen einen Einfluss auf die Entwicklung der Mathematikleistung hat. Es ist zu vermuten, dass aufgrund der vielfältigen interaktiven Möglichkeiten der dynamischen Visualisierungen ein Vorteil gegenüber den statischen Visualisierungen besteht. Daher lautet die zweite Forschungsfrage:

- (2) Inwiefern lassen sich Unterschiede in der Entwicklung der Mathematikleistung im Umgang mit dem zur Ableitung relevanten Vorwissen, der Lokalen Änderungsrate und Tangentensteigung sowie der Ableitungsfunktion durch eine Intervention zur Einführung der Ableitung über (1) dynamische oder (2) statische Visualisierungen bei Lernenden feststellen?

Die letzte Forschungsfrage ist explorativ angelegt, da der Einfluss von Visualisierungen auf die individuellen Ausprägungen der Grundvorstellungen von Schüler:innen zum Ableitungsbegriff bislang nicht erforscht sind. Es lässt sich allerdings vermuten, dass durch dynamische Visualisierungen die Grundvorstellung *Tangentensteigung* bei Lernenden stärker ausgeprägt wird, da der Zugmodus verwendet werden kann, mit dessen Hilfe man sich an jeder beliebigen Stelle des Funktionsgraphen die Tangente und die dazugehörige Steigung anzeigen lassen kann. Auch die *Lokale Änderungsrate* lässt sich durch die Verlinkung zwischen der numerischen (Differenzenquotient) und graphischen (Funktionsgraph mit zwei markierten Punkten) Repräsentation dynamisch visualisieren und der Grenzwertprozess kann durch die Lernenden selbst gesteuert werden. Daraus ergibt sich die dritte Forschungsfrage:

- (3) Inwiefern lassen sich Unterschiede hinsichtlich des Einflusses von dynamischen oder statischen Visualisierungen auf die Ausprägung der Grundvorstellungen *Lokale Änderungsrate* und *Tangentensteigung* feststellen?

3. Methode

3.1 Untersuchungsdesign

Um einen Vergleich zwischen dem dynamischen und statischen Zugang zum Ableitungsbegriff zu ermöglichen, wurde das Studiendesign von Brnic et al. (2024) adaptiert. Dieses sieht vor, dass ein Kurs in zwei Gruppen geteilt wird, welche entweder mit dynamischen oder mit statischen Visualisierungen innerhalb der Intervention arbeitet (nachfolgend als *dynamische Gruppe* und *statische Gruppe* bezeichnet). Bei der Unterteilung wurden Geschlecht sowie die Vortestergebnisse

berücksichtigt, um zwei vergleichbare Gruppen zu bilden. Den inhaltlichen Rahmen der Intervention (sechs Unterrichtsstunden zu jeweils 45 Minuten) bildeten die folgenden Themen:

- I. Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate (Deutung der Ableitung als lokale Änderungsrate)
- II. Übergang von Sekantensteigungen zur Tangentensteigung (Deutung der Ableitung als Tangentensteigung)
- III. Graphische Bestimmung der Ableitungsfunktion

Die Intervention wurde so angelegt, dass zu jedem der drei Themen eine Unterrichtsstunde mit der regulären Lehrkraft und anschließend eine darauf aufbauende Übungsstunde mit den begleitenden Forschenden der Universität stattfindet. So ist es möglich, dass die Lehrkraft zur Hälfte beide Versuchsgruppen um eine Unterrichtsstunde versetzt unterrichtet und die begleitenden Forschenden die jeweiligen Übungsstunden in beiden Gruppen betreuen (vgl. Abb. 1).

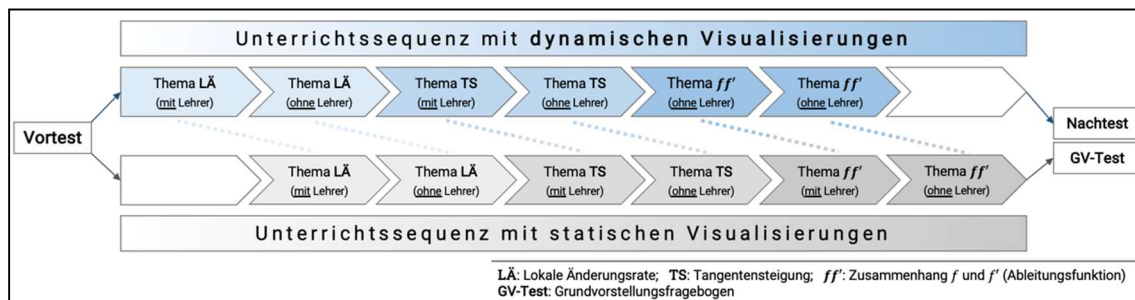


Abbildung 1: Studiendesign in Anlehnung an Brnic et al. (2024)

Aufgrund der Tatsache, dass eine Lehrkraft die dynamische und die statische Gruppe in gleichem Umfang unterrichtete, konnten Lehrkräfteeffekte minimiert werden, da die Persönlichkeit der jeweiligen Lehrkräfte stets denselben Einfluss auf das Lernen der Schüler:innen beider Gruppen hatte (Schukajlow et al., 2015).

3.2 Stichprobe

Die hier beschriebene Studie diente als Pilotierung einer größer angelegten Intervention und wurde im Rahmen von zwei Masterarbeiten der Universität Münster begleitet. Im Vorfeld wurden Mathematiklehrkräfte, Schulleitungen und Erziehungsberichtigte über das Vorhaben informiert und um deren Einverständnis gebeten. Die Teilnahme an der Studie erfolgte auf freiwilliger Basis und fand im Schuljahr 2022/2023 statt. Insgesamt nahmen 110 Lernende aus sieben verschiedenen Kursen der Einführungsphase aus Nordrhein-Westfalen am Projekt *AdVise* teil (58 weiblich). Insgesamt arbeiteten 65 Schüler:innen mit dynamischen Visualisierungen und 45 Lernende nutzten statische Visualisierungen während der Intervention.

3.3 Durchführung und Materialbeschreibung

Nach der Unterteilung der Kurse auf Basis der Vortestergebnisse in eine dynamische und eine statische Gruppe erhielten alle Schüler:innen jeweils eine Mappe mit den vollständigen Materialien für die sechsstündige Sequenz; der Unterricht in beiden Gruppen fand räumlich voneinander getrennt statt. In einem Kurs eines Gymnasiums wurde aufgrund fehlender Räumlichkeiten zur Umsetzung des Studiendesigns keine Unterteilung vorgenommen; der vollständige Kurs arbeitete mit den dynamischen Visualisierungen. Der Unterricht verlief stets nach vorgefertigten Verlaufsplänen in allen Unterrichtsstunden mit der Lehrkraft, um ihren Einfluss auf die Ergebnisse zu minimieren und eine Vergleichbarkeit zwischen allen an der Studie teilnehmenden Lernenden zu gewährleisten.

Die dynamische Gruppe arbeitete mit über GeoGebra erzeugten Visualisierungen, welche über QR-Codes auf den Arbeitsblättern aufzurufen waren. Demgegenüber bearbeitete die statische Gruppe dieselben Aufgaben mithilfe von statischen Visualisierungen, welche über Bildschirmskopien aus den dynamischen Visualisierungen erzeugt wurden. Ein Beispiel für eine Visualisierung und einer dazugehörigen Aufgabenstellung in beiden Gruppen aus der Übungsstunde zum Thema *Tangentensteigung* ist der Abbildung 2 zu entnehmen.

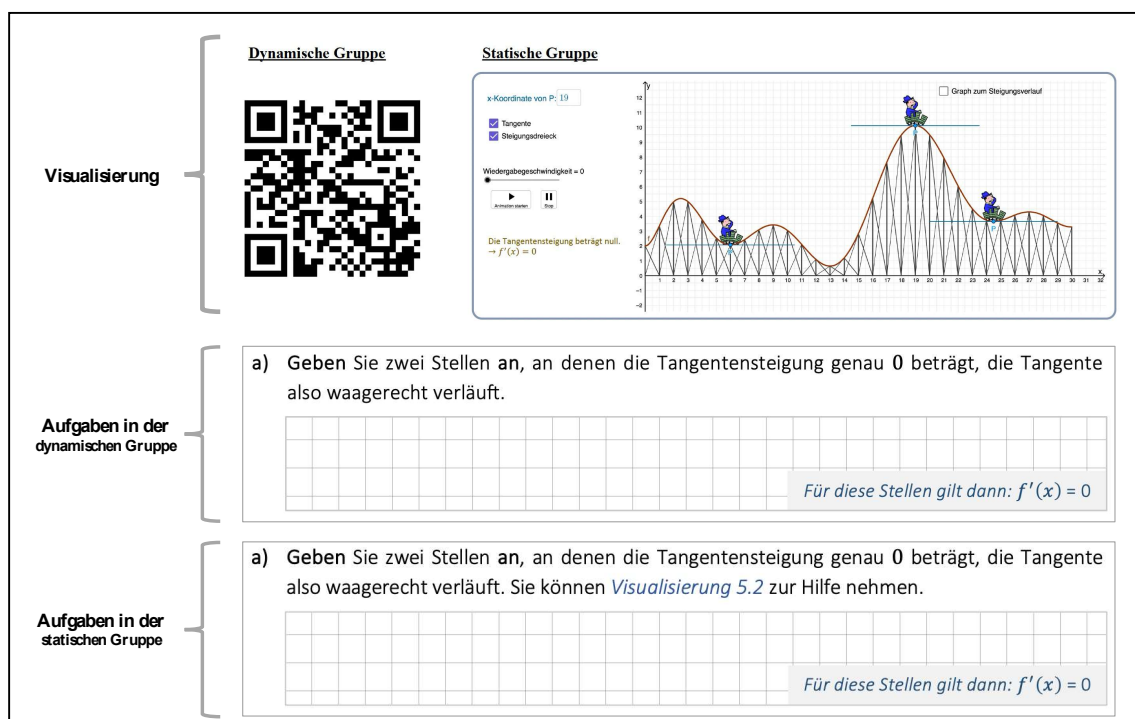


Abbildung 2: Visualisierungen und Aufgaben der dynamischen und statischen Gruppe (Idee in Anlehnung an Avendaño et al., 2016)

Die Erstellung der dynamischen Visualisierungen erfolgte unter Berücksichtigung einiger Designprinzipien aus der Multimediaforschung (Mayer & Fiorella, 2021). Darunter fällt beispielsweise das Segmentierungsprinzip – eine mögliche Umsetzung erfolgt darüber, dass Lernenden die Möglichkeit gegeben wird, einen dyna-

mischen Vorgang zu stoppen, wieder zu starten und auch die Wiedergabegeschwindigkeit zu regulieren. Auch das Signalisierungsprinzip wurde berücksichtigt, indem visuelle Hinweise verwendet wurden, welche Bestandteile der Visualisierung in eine Beziehung setzen (z.B. sind Tangenten durchgehend in blau eingezeichnet und jeglicher Text bezüglich Tangenten hat einen blauen Hintergrund). Ferner wurde dem Kontiguitätsprinzip Rechnung getragen, welches Folgendes besagt: „[P]eople learn better when words and corresponding graphics are presented simultaneously rather than sequentially“ (Mayer & Fiorella, 2021, S. 185). Dieses kann Abbildung 2 entnommen werden, da hier der Text (Tangentensteigung beträgt null) und die graphische Darstellung der waagerechten Tangente gleichzeitig präsentiert werden.

Verschiedene Studien, welche die Effektivität von dynamischen und statischen Visualisierungen gegenüberstellen, kontrollieren Castro-Alonso et al. (2016) zufolge keine Moderatorvariablen. Die Autoren identifizieren sieben Verzerrungen beim Vergleich der Wirksamkeit zwischen den beiden Visualisierungsarten. Um einen fairen Vergleich beider Gruppen zu gewährleisten, wurden im Rahmen der eigenen Studie bei der Erstellung des statischen Äquivalents die Verzerrungen berücksichtigt: Es wurde darauf geachtet, dass die Visualisierungen in beiden Vergleichsgruppen *gleich groß, farbig und realistisch* aussehen. Ferner wurden den statischen Visualisierungen *keine Pfeile* hinzugefügt und beide Gruppen konnten die dynamischen bzw. statischen Visualisierungen auf ihrem *digitalen Endgerät* aufrufen. Lediglich die Moderatorvariablen *Anzahl* und *Interaktivität* konnten nicht vollständig berücksichtigt werden. Teilweise mussten zwei statische Visualisierungen für eine Aufgabe erstellt werden, um beispielsweise einen Grenzwertprozess darstellen zu können, der innerhalb der dynamischen Gruppe mittels einer einzigen dynamischen Visualisierung umsetzbar war. Um der Moderatorvariable *Anzahl* gerecht zu werden, machen die Autoren folgenden Vorschlag: „Alternatively, the many steps could be designed inside one comprehensive static image, instead of many separate statics“ (Castro-Alonso et al., 2016, S. 239). Im Beispiel aus Abbildung 2 wurde dieser Empfehlung bei der Erstellung der statischen Visualisierung nachgegangen, allerdings war dies aufgrund von Unübersichtlichkeit in einigen Fällen nicht umsetzbar und wäre folglich mit einem Nachteil für die statische Gruppe einhergegangen. Auch wurden Schaltflächen, wie z.B. ein Geschwindigkeitsregler für die Animationen, in den mit GeoGebra erzeugten Visualisierungen implementiert, was Castro-Alonso et al. (2016) als kritisch bewerten, da mit statischen Visualisierungen nicht interaktiv agiert werden kann. Da allerdings die vorliegende Studie darauf ausgelegt ist, statische Visualisierungen mit (interaktiv-)dynamischen zu vergleichen, kann die Moderatorvariable *Interaktivität* als immanent aufgefasst werden.

3.4 Messinstrumente und Datenaufbereitung

- *Messinstrument I: Leistungstest*

Im Rahmen dieser Studie wurde ein Leistungstest entwickelt, welcher die in der Unterrichtssequenz behandelten Inhalte abprüfen soll. Dazu zählt einerseits das zum Erlernen der Ableitung relevante Vorwissen (u.a. der Funktionsbegriff, absolute und durchschnittliche Änderungen sowie die Steigung linearer Funktionen). Ferner wurden Aufgaben zur Deutung der Ableitung als *Lokale Änderungsrate* und *Tangentensteigung* konzipiert. Zudem bildete das Verständnis der Zusammenhänge zwischen einer Funktion und ihrer Ableitungsfunktion unter gleichzeitiger Berücksichtigung beider Grundvorstellungen (u.a. punktweises oder vollständiges graphisches Differenzieren) einen weiteren Schwerpunkt. Der Leistungstest wurde im Vor- als auch im Nachtest eingesetzt, wobei die Reihenfolge der Aufgaben zwischen den Messzeitpunkten variierte. Innerhalb des Leistungstests wurden drei verschiedene Aufgabenformate verwendet: Zum einen wurden Single-Choice Items mit vier Antwortoptionen eingesetzt, von denen eine einzige als korrekt zu bewerten ist (Döring & Bortz, 2016). Außerdem lagen Items im halboffenen Format vor, bei denen die Schüler:innen eine oder mehrere Zahlen einsetzen mussten, z.B. „Geben Sie eine ganzzahlige Stelle t an, bei der die Steigung der Tangente an dem Graphen kleiner ist als die Steigung der Tangente an der Stelle $t = 7$.“ Zusätzlich gab es Items, die im Format Combined-Single-Choice vorlagen (Gerber & Quarder, 2022). Hier mussten pro Item drei Aussagen verifiziert bzw. falsifiziert werden, wobei das Item nur als korrekt gewertet wurde, wenn für alle drei Aussagen die richtige Antwortoption ausgewählt wurde. Insgesamt konnten also alle 28 Items für jeden Lernenden pro Messzeitpunkt dichotom kodiert werden.

Mittels eines einparametrischen und eindimensionalen Rasch-Modells wurden die Daten skaliert sowie Personen- und Itemparameter geschätzt. Da alle Schüler:innen zu zwei Messzeitpunkten dieselben Aufgaben bearbeitet haben, erfolgte die Schätzung der Itemparameter mit sogenannten virtuellen Personen nach Hartig und Kühnbach (2006). So wurden die Datenmatrizen aus Vor- und Nachtest untereinander angeordnet, sodass jede:r Schüler:in als zwei separate Personen betrachtet wird. Es konnte eine EAP-Reliabilität von .873 bzw. eine WLE-Reliabilität von .867 für den Leistungstest ermittelt werden, was für Gruppenvergleiche absolut ausreichend ist (Lienert & Raatz, 1998). Die *weighted mean squares* ($wMNSQ$, auch *Infit* genannt) der einzelnen Items liegen im Intervall [0.8; 1.27]. Nach Bond und Fox (2015) gelten Items in einem Multiple Choice Test mit $wMNSQ$ zwischen 0.8 und 1.2 als geeignet für High Stakes Assessments. Im eingesetzten Leistungstest weisen lediglich zwei Items einen *Underfit* auf, wobei die $wMNSQ$ noch unter 1.3 liegen und somit noch akzeptabel sind (Bond & Fox, 2015).

- *Messinstrument II: Grundvorstellungsfragebogen*

Der Grundvorstellungsfragebogen, der zusätzlich zum zuvor geschilderten Leistungstest zum zweiten Messzeitpunkt eingesetzt wurde, orientiert sich am Messinstrument von Greefrath et al. (2021). Es wurden sechs Testitems adaptiert sowie zwei weitere Items entwickelt, die alle dieselbe Form aufweisen: Der Stimulus jedes Items besteht aus einer Sachsituation in Textform und wird in den meisten Fällen mit einer graphischen Darstellung einer Funktion ergänzt (vgl. Abb. 3). Es folgen zwei Erklärungen zur Ableitung an einer Stelle, die einerseits die Grundvorstellung *Lokale Änderungsrate* und andererseits die *Tangentensteigung* fokussieren. Anschließend sollen die Schüler:innen auf einer fünfstufigen Likert-Skala von „--: Die Erklärung entspricht überhaupt nicht meiner Denkweise“ bis hin zu „++: Die Erklärung entspricht genau meiner Denkweise“ ankreuzen, inwiefern eine zur Sachsituation passende Erklärung ihrem Denken entspricht. Es wurden die Reliabilitäten der beiden Grundvorstellungen mittels Cronbachs Alpha bestimmt. Für die *Lokale Änderungsrate* ergab sich ein Wert von .711 und für die *Tangentensteigung* ein Wert von .760, was Döring und Bortz (2016) zufolge einer akzeptablen Reliabilität entspricht.

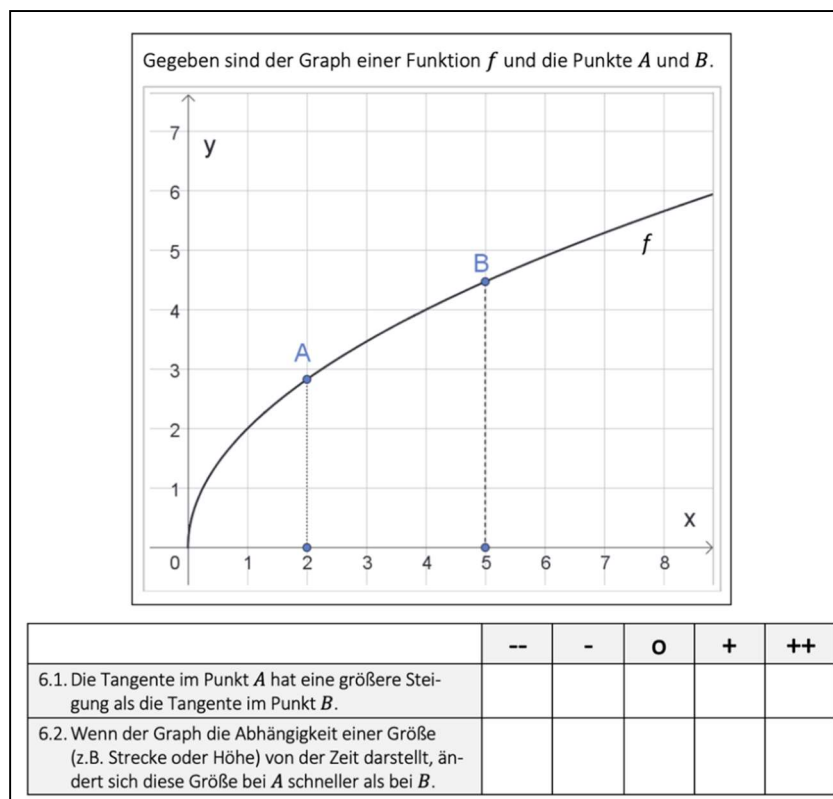


Abbildung 3: Beispielimitem aus dem Grundvorstellungsfragebogen (in Anlehnung an Greefrath et al., 2021)

Anschließend wurde für jeden Lernenden aus den Antworten je ein Mittelwert für die *Lokale Änderungsrate* und die *Tangentensteigung* separat gebildet, der den Ausprägungsgrad der jeweiligen Grundvorstellung abbildet. Jeder Mittelwert lag im Intervall von 1 bis 5, wobei 1 einer niedrigen Zustimmung entspricht.

4. Ergebnisse

4.1 Forschungsfrage 1

Im Rahmen der ersten Forschungsfrage wird die Entwicklung der Mathematikleistung im Umgang mit dem zur Ableitung relevanten Vorwissen, der Lokalen Änderungsrate und der Tangentensteigung sowie der Ableitungsfunktion zwischen Vor- und Nachtest für die dynamische und die statische Gruppe separat voneinander betrachtet. Dazu wurden jeweils mittels eines einparametrischen und eindimensionalen Raschmodells die Personenparameter für jeden Lernenden zu beiden Messzeitpunkten bestimmt.

Die deskriptiven Ergebnisse können Tabelle 1 entnommen werden. Es lässt sich konstatieren, dass Schüler:innen beider Gruppen vom Vortest zum Nachtest im Durchschnitt eine Verbesserung zeigten. Die Differenz der Mittelwerte zwischen beiden Messzeitpunkten beträgt 1.235 Logit für die dynamische Gruppe und 0.846 Logit für die statische Gruppe.

	Personenparameter (Vortest)		Personenparameter (Nachtest)	
	Dynamische Gr.	Statische Gr.	Dynamische Gr.	Statische Gr.
Anzahl Schüler:innen	65	45	65	45
Mittelwert	-0.675	-0.336	0.560	0.510
Standardabweichung	1.468	1.091	1.492	1.361
Minimum	-5.638	-2.600	-2.286	-1.990
Maximum	2.858	1.737	4.171	4.171

Tabelle 1: Deskriptive Statistiken des Leistungstests

Zur Beantwortung der ersten Forschungsfrage, ob sich die Leistungen durch die Intervention sowohl in der dynamischen als auch in der statischen Gruppe verändert haben, wurden zwei t-Tests für abhängige Stichproben gerechnet. In beiden Gruppen ist der t-Test signifikant und die Effektstärke nach Cohen als groß zu beurteilen (Cohen, 1988). Für die dynamische Gruppe ergab sich $t(64) = 7.273; p < .001; d = .902$ und für die statische Gruppe $t(44) = 5.835; p < .001; d = .870$. Schüler:innen beider Gruppen konnten somit im Durchschnitt ihre Leistung bezogen auf die in der Intervention behandelten Inhalte vom ersten zum zweiten Messzeitpunkt signifikant steigern.

4.2 Forschungsfrage 2

Zur Beantwortung der zweiten Forschungsfrage, ob die Einführung der Ableitung über dynamische Visualisierungen einen positiveren Einfluss auf die Entwicklung der Mathematikleistung im Umgang mit dem zur Ableitung relevanten Vorwissen,

der Lokalen Änderungsrate und Tangentensteigung sowie der Ableitungsfunktion im Vergleich zu der parallelisierten Einführung über statische Visualisierungen hat, wurde eine zweifaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung gerechnet. Die Innersubjektfaktoren waren die Messzeitpunkte (Vor- und Nachtest) und die Zwischensubjektfaktoren die Arten der verwendeten Visualisierungen. Bezüglich dieser Faktoren ist die Varianzanalyse nicht signifikant ($F(1,108) = 2.687; p = .104$), auch wenn die deskriptiven Ergebnisse einen stärkeren Leistungszuwachs in der dynamischen Gruppe im Vergleich zur statischen widerspiegeln (vgl. Abb. 4). Es zeigte sich also kein signifikanter Interaktionseffekt zwischen Gruppenzugehörigkeit und Messzeitpunkt.

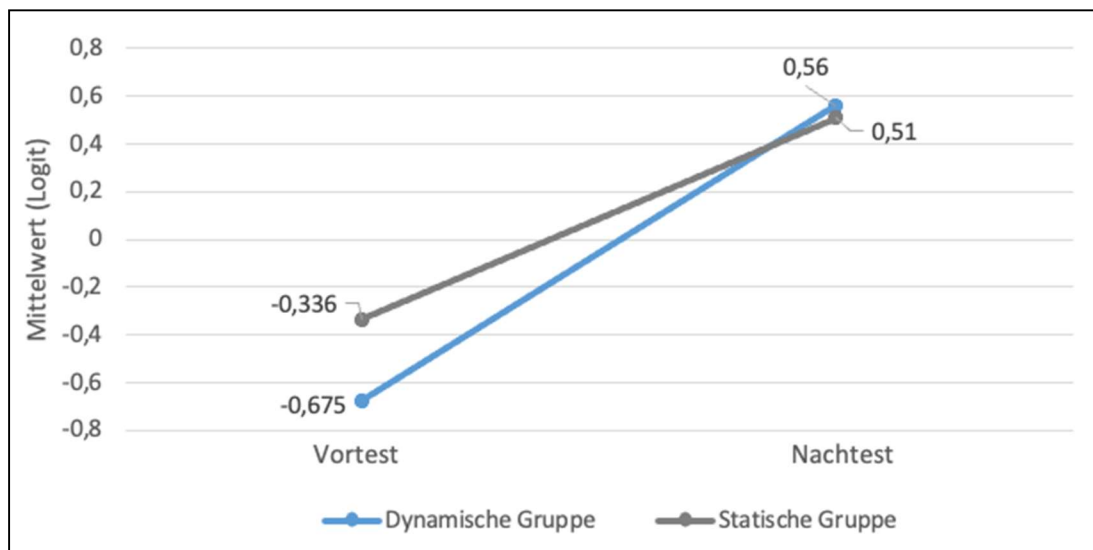


Abbildung 4: Grafische Darstellung der Mittelwerte (Logit) im Leistungstest beider Gruppen

4.3 Forschungsfrage 3

Explorativ sollte untersucht werden, inwiefern sich Unterschiede hinsichtlich des Einflusses von dynamischen oder statischen Visualisierungen auf die Ausprägung der beiden Grundvorstellungen zur Ableitung feststellen lassen (vgl. Tab. 2). Deskriptiv lässt sich festhalten, dass sich die Mittelwerte bezüglich der Grundvorstellung *Lokale Änderungsrate* um 0.240 und der Tangentensteigung um 0.116 zugunsten der dynamischen Gruppe voneinander unterscheiden. Um zu ermitteln, ob diese Mittelwertsunterschiede signifikant sind, wurden zwei t-Tests für unabhängige Stichproben gerechnet. Beide Grundvorstellungen sind auf einem Signifikanzniveau von 5 % in der dynamischen Gruppe nicht signifikant stärker ausgeprägt als in der statischen Gruppe.

	Lokale Änderungsrate		Tangentensteigung	
	Dynamisch	Statisch	Dynamisch	Statisch
Anzahl Schüler:innen	65	45	65	45
Mittelwert	3.616	3.376	3.736	3.620
Standardabweichung	0.654	0.810	0.693	0.872
Minimum	2.250	1.000	2.125	1.000
Maximum	5.000	5.000	5.000	5.000

Tabelle 2: Deskriptive Statistiken des Grundvorstellungsfragebogens

5. Diskussion

5.1 Interpretation der Ergebnisse

In Bezug auf die erste Forschungsfrage konnte eine positive Veränderung in der Leistung zu den in der Intervention behandelten Inhalten zum Ableitungsbegriff jeweils in beiden Vergleichsgruppen mit einer Effektstärke von ungefähr 0.9 festgestellt werden. Dies deutet auf die Effektivität der beiden konzipierten Unterrichtssequenzen hin, und das obwohl durch Beobachtungen einige Schwierigkeiten bezogen auf die Phasierung des Unterrichts sowie uneindeutig gestellte Arbeitsaufträge festgestellt werden konnten. Ein Vergleich mit einer Kontrollgruppe bestehend aus Klassen, die in der gleichen Zeit traditionellen Unterricht erhielten, würde die Aussagekraft der Effektstärken erhöhen.

Die Forschungsfrage 2 nahm Unterschiede in den Ergebnissen des Leistungstests zwischen der dynamischen und der statischen Gruppe in den Blick. Die statistische Auswertung ergab keinen signifikanten Vorteil für Lernende, die mit dynamischen Visualisierungen arbeiteten. Die vermuteten Vorteile – insbesondere *dyna-linking* oder der Zugmodus – führten nicht dazu, dass die dynamische Gruppe im Vergleich zur statischen einen signifikant höheren Leistungszuwachs zur Ableitung aufwies. Dieser Befund ist konsistent zu anderen Studien, die ebenso keinen Vorteil dynamischer Visualisierungen gegenüber statischen feststellen konnten (Berny & Bétrancourt, 2016). Durch die Berücksichtigung der Kriterien eines fairen Vergleichs zwischen den beiden Visualisierungsarten konnte auch für die statische Gruppe eine lernwirksame Unterrichtssequenz entwickelt werden (Castro-Alonso et al., 2016). Relativierend muss an dieser Stelle allerdings hinzugefügt werden, dass die Unterschiede im Leistungstest zugunsten der dynamischen Gruppe zumindest deskriptiv vorhanden waren und diese bei einer größeren Stichprobe und einer überarbeiteten Variante durchaus zu signifikanten Unterschieden führen könnten; auf einem Signifikanzniveau von 10 % wären die Ergebnisse dieser Pilotierungsstudie auch signifikant.

Mittels der Forschungsfrage 3 sollten Unterschiede im Ausprägungsgrad der beiden Grundvorstellungen zwischen beiden Gruppen untersucht werden. Obwohl die

Grundvorstellungen *Lokale Änderungsrate* und *Tangentensteigung* in ihrem Kern dynamisch sind, können auch hier keine signifikanten Unterschiede festgestellt werden. Deskriptiv scheint es – wie bezogen auf Forschungsfrage 2 bereits dargelegt – einen marginalen Vorteil dynamischer Visualisierungen bei der Ausbildung der beiden zentralen Grundvorstellungen zur Ableitung zu geben.

5.2 Limitationen und Ausblick

Eine erwähnenswerte Limitation der Studie war die Teilnahme eines Kurses unter Verletzung des Studiendesigns. Hier konnte der Einfluss der Lehrkraft nicht kontrolliert werden, da sie mit ihrem vollständigen Kurs die Unterrichtssequenz mit dynamischen Visualisierungen durchführte. Relativierend kann diese Tatsache vor dem Hintergrund der stattgefundenen Treatmentkontrolle betrachtet werden, da in allen Unterrichtsstunden begleitende Forschende anwesend waren. Die Umsetzung aller Unterrichtsstunden nach den Unterrichtsverlaufsplänen war gegeben. Im Gesamten hat sich das Studiendesign als praktikabel herausgestellt, da somit der Einfluss der Lehrkraft kontrolliert werden konnte. Einige Schüler:innen empfanden die Teilung des Kurses zusätzlich als gewinnbringend, da das Lernen in halber Kursstärke für sie angenehmer verlief.

Die eingesetzten Aufgaben des Leistungstests konnten zwar sehr gut zwischen den Schüler:innen differenzieren, waren aber zum Teil nicht nah genug an der Unterrichtssequenz, sodass kaum Unterschiede zwischen den Vergleichsgruppen erwartbar waren. Daher scheint dieser nicht sensitiv für die Intervention zu sein. Im Rahmen weiterer Pilotierungszyklen wurde der Leistungstest verändert, indem zusätzliche Testitems entwickelt wurden, welche die Grenzwertprozesse stärker in den Fokus nehmen (z.B. den Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate bzw. von Sekanten zur Tangente).

Die Hauptstudie mit einer Stichprobe von ungefähr 300 Lernenden ist für das Schuljahr 2023/2024 geplant. Auf Grundlage der Rückmeldungen von Lehrkräften und Beobachtungen während der Unterrichtsstunden wurde das Material für beide Gruppen optimiert, die Unterrichtsverlaufspläne angepasst sowie die Messinstrumente weiterentwickelt und wiederholt pilotiert. Bezüglich des Leistungstests wird ein Rotationsdesign mit dem Einsatz von Ankeritems angewendet, um Testwiederholungseffekte – wie sie hier aufgrund der identischen Vor- und Nachtests vermutlich vorlagen – zu vermeiden.

In späteren Analysen der Daten können weitere moderierende Variablen, wie z.B. das Geschlecht der Schüler:innen herangezogen werden. Diesbezüglich fanden Castro-Alonso et al. (2019) in einer Metastudie heraus, dass dynamische Visualisierungen eine höhere Effektivität gegenüber statischen Visualisierungen zeigten, wenn ein Überschuss an männlichen Probanden an der Studie teilnahm. Insgesamt bietet die beschriebene Interventionsstudie *AdVise* eine Vielzahl an Einsichten in das Lernen mit dynamischen und statischen Visualisierungen und den Aufbau von Grundvorstellungen bei der Einführung der Ableitung.

Literatur:

- Ainsworth, S. (1999). The functions of multiple representations. *Computers & Education*, 33(2–3), 131–152. [https://doi.org/10.1016/S0360-1315\(99\)00029-9](https://doi.org/10.1016/S0360-1315(99)00029-9)
- Avendaño, A., Ponce-Campuzano, J. C., & Cózar, D. L. (2016). *Pendiente de la Curva*. <https://www.geogebra.org/m/YepVUjxg>.
- Berney, S., & Bétrancourt, M. (2016). Does animation enhance learning? A meta-analysis. *Computers & Education*, 101, 150–167. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2016.06.005>
- Bétrancourt, M., & Tversky, B. (2000). Effect of computer animation on user's performance: A review. *Le Travail Humain*, 63(4), 311–330.
- Bressoud, D., Ghedamsi, I., Martinez-Luaces, V., & Törner, G. (2016). *Teaching and Learning of Calculus*. Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-32975-8>
- Bond, T. G., & Fox, C. M. (2015). *Applying the Rasch model: Fundamental measurement in the human sciences* (Third edition). Taylor and Francis Group.
- Brnic, M., Greefrath, G., & Reinhold, F. (2024). Working with digital textbooks or printed materials: A study with boys and girls on conditional probability. *ZDM – Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01543-x>
- Castro-Alonso, J. C., Ayres, P., & Paas, F. (2016). Comparing apples and oranges? A critical look at research on learning from statics versus animations. *Computers & Education*, 102, 234–243. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2016.09.004>
- Castro-Alonso, J. C., Wong, M., Adesope, O. O., Ayres, P., & Paas, F. (2019). Gender Imbalance in Instructional Dynamic Versus Static Visualizations: A Meta-analysis. *Educational Psychology Review*, 31(2), 361–387. <https://doi.org/10.1007/s10648-019-09469-1>
- Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences*. L. Erlbaum Associates.
- Chau, L. T. H., Duc, N. M., & Tong, D. H. (2021). The Teaching of the Concept of Derivative in High School and Its Relationship with Physics. *Universal Journal of Educational Research*, 9(1), 186–201. <https://doi.org/10.13189/ujer.2021.090121>
- Döring, N., & Bortz, J. (2016). *Forschungsmethoden und Evaluation in den Sozial- und Humanwissenschaften*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-41089-5>
- Feudel, F. (2020). Die Ableitung in der Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler: Analysen zum benötigten, gelehrt und von Studierenden erreichten Verständnis des Ableitungsbegriffs. Springer Fachmedien. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-26478-9>
- Gerber, S., & Quader, J. (2022). Erfassung von Aspekten professioneller Kompetenz zum Lehren des Simulierens und mathematischen Modellierens mit digitalen Werkzeugen. Ein Testinstrument. <https://doi.org/10.25972/OPUS-27359>
- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-48877-5>
- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2021). Test zur Erfassung von Grundvorstellungen zu Ableitungen und Integralen (GV-AI), Empirische Erfassung von Grundvorstellungen zur ersten Ableitung einer Funktion an einer Stelle und zum bestimmten Integral. Archive Ouverte HAL. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03103685>.

- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2022). Mathematics Students' Characteristics of Basic Mental Models of the Derivative. *Journal Für Mathematik-Didaktik*. <https://doi.org/10.1007/s13138-022-00207-9>
- Greefrath, G., & Ulm, V. (2021). Integral: Grundvorstellungen dynamisch visualisiert. *mathematik lehren*, 224, 36–40.
- Hahn, S. (2008). *Bestand und Änderung: Grundlegung einer vorstellungsorientierten Differentialrechnung* (1. Aufl.). Didaktisches Zentrum, Carl-von-Ossietzky-Univ.
- Hahn, S., & Prediger, S. (2004). Vorstellungsorientierte Kurvendiskussion – Ein Plädoyer für das Qualitative. *Beiträge zum MU 2004*, 217–220.
- Hartig, J. & Kühnbach, O. (2006). Schätzung von Veränderung mit „plausible values“ in mehrdimensionalen Rasch-Modellen. In A. Ittel & H. Merckens (Hrsg.), *Veränderungsmessung und Längsschnittstudien in der empirischen Erziehungswissenschaft* (S. 27–44). Verlag für Sozialwissenschaften.
- Höffler, T. N., & Leutner, D. (2007). Instructional animation versus static pictures: A meta-analysis. *Learning and Instruction*, 17(6), 722–738. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2007.09.013>
- Hong, Y. Y., & Thomas, M. O. J. (2015). Graphical construction of a local perspective on differentiation and integration. *Mathematics Education Research Journal*, 27(2), 183–200. <https://doi.org/10.1007/s13394-014-0135-6>
- Lienert, G. A., & Raatz, U. (1998). *Testaufbau und Testanalyse: Studienausgabe* (6. Aufl.). Beltz, Psychologie-Verl.-Union.
- Mayer, R. E., & Fiorella, L. (Hrsg.). (2021). *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (3. Aufl.). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781108894333>
- Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen (MSB) (2014). Kernlehrplan für die Sekundarstufe II Gymnasium/Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen Mathematik. https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/47/KLP_GOST_Mathematik.pdf
- Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, 14(3), 235–250. <https://doi.org/10.1007/BF00410540>
- Paik, E. S., & Schraw, G. (2013). Learning with animation and illusions of understanding. *Journal of Educational Psychology*, 105(2), 278–289. <https://doi.org/10.1037/a0030281>
- Rolfes, T., & Heinze, A. (2022). Vertiefte Allgemeinbildung als eine Zieldimension von Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. In *Das Fach Mathematik in der gymnasialen Oberstufe* (S. 19–46).
- Rolfes, T., Roth, J., & Schnotz, W. (2020). Learning the Concept of Function With Dynamic Visualizations. *Frontiers in Psychology*, 11, 693. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2020.00693>
- Roth, J., & Siller, H.-S. (2016). Bestand und Änderung—Grundvorstellungen entwickeln und nutzen. *mathematik lehren*, 199, 2–9.
- Salle, A., & Clüver, T. (2021). Herleitung von Grundvorstellungen als normative Leitlinien – Beschreibung eines theoriebasierten Verfahrensrahmens. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 42(2), 553–580. <https://doi.org/10.1007/s13138-021-00184-5>

- Sari, P., Hadiyan, A., & Antari, D. (2018). Exploring Derivatives by Means of GeoGebra. *International Journal on Emerging Mathematics Education*, 2(1), 65. <https://doi.org/10.12928/ijeme.v2i1.8670>
- Schukajlow, S., Krug, A., & Rakoczy, K. (2015). Effects of prompting multiple solutions for modelling problems on students' performance. *Educational Studies in Mathematics*, 89(3), 393–417. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9608-0>
- Wilzek, W. (2021). Zum Potenzial von Anschauung in der mathematischen Hochschullehre: Eine Untersuchung am Beispiel interaktiver dynamischer Visualisierungen in der Analysis. Springer Fachmedien. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-35361-2>
- vom Hofe, R., & Blum, W. (2016). “Grundvorstellungen” as a Category of Subject-Matter Didactics. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37(S1), 225–254. <https://doi.org/10.1007/s13138-016-0107-3>
- Zengin, Y. (2018). Examination of the constructed dynamic bridge between the concepts of differential and derivative with the integration of GeoGebra and the ACODESA method. *Educational Studies in Mathematics*, 99(3), 311–333. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9832-5>

Melanie Platz, Christina Bierbrauer, Laura Monz & Moein Alinaghian

Universität des Saarlandes, platz@math.uni-sb.de, bierbrauer@math.uni-sb.de,
monz@math.uni-sb.de, nixoeen@nixoeen.com

Die AR-App „Rechen-StAR“ zur Unterstützung des Zahlverständnisses in der Primarstufe

In diesem Beitrag wird die Augmented Reality App „Rechen-StAR“ vorgestellt, die den kardinalen mit dem ordinalen Zahlaspekt verknüpft: Die App überführt die flächige Darstellung einer (An-)Zahl im realen Zwanzigerfeld in eine linear angeordnete Darstellung im virtuellen Zahlenstrahl. So sollen Kinder beim Schritt vom konkreten Handeln zum Operieren in der Vorstellung unterstützt werden. Der Entwicklungsprozess der App sowie technische Hintergründe werden beleuchtet und didaktisch reflektiert.

1. Einleitung

Zum Aufbau von Zahl- und Operationsverständnis bei Kindern sollten sowohl flächige Darstellungen (wie das Zwanzigerfeld) als auch lineare (wie der Zahlenstrahl) verwendet werden (Selter & Zannettin, 2019, S. 35). Beide Arbeitsmittel bergen gewisse Hürden für den Lernprozess:

Beim Zwanzigerfeld – das auf den Kardinalzahlaspekt ausgerichtet ist – fehlt die Null als zentrales Element des Zahlenraums und beim sukzessiven Belegen der oberen Reihe mit zehn Plättchen ist das elfte Plättchen räumlich weit vom benachbarten zehnten Plättchen entfernt, was für manche Kinder problematisch sein kann und zu Schwierigkeiten beim Zehnerübergang führt (Käpnick, 2014).

Für das Verständnis des Zahlenstrahls müssen Kinder zwischen Kardinal-, Ordinal- und Maßzahlaspekt (Striche oder Lücken auf dem Zahlenstrahl) unterscheiden sowie sich links-rechts orientieren können (Lorenz, 1991, S. 120f.). Dieses Nebeneinander oder Überlagern von besonders vielen Zahlaspekten (Padberg & Benz, 2021, S. 81) kann zu Verständnisschwierigkeiten bei manchen Kindern führen (Gaidoschik, 2003, S. 83).

Vor diesem Hintergrund existieren zwischen konkreten Handlungserfahrungen mit herkömmlichen analogen Arbeitsmitteln und dem Operieren in der Vorstellung für manche Kinder „Klüfte“ (Radatz, 1991, S. 85). Die Folge ist unter anderem ein nicht tragfähiges Zahl- und Operationsverständnis sowie verfestigtes zählendes Rechnen (Wartha & Schulz, 2019).

Jedoch bieten die Arbeitsmittel auch Potenziale, die im Projekt ARithmetik genutzt werden: Beim Zwanzigerfeld mit Wendeplättchen und Fünfer- und Zehnerstreifen kann auf strukturierte Mengendarstellungen fokussiert werden, was die Entwicklung von Vorstellungsbildern fördert und darauf basierende kindliche Konstruktionsprozesse „[...] zum Aufbau von tragfähigen Zähl- und Zahlbeziehungskonzepten, insbesondere bezüglich der Fünfer- und Zehnerbünde-

lung“ (Käpnick, 2014, S. 162). Der Zahlenstrahl dient unter anderem als gute Orientierungshilfe beim Vergleichen und Ordnen von Zahlen sowie beim Erkennen der Zahlstruktur und von Analogien im Zahlssystem (ebd., S. 166). Die Augmented Reality App „Rechen-StAR“ (siehe Abbildung 1) verknüpft die Potenziale beider Arbeitsmittel.

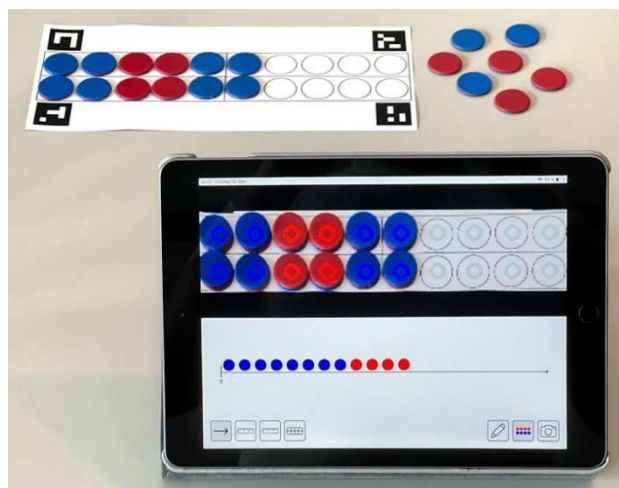


Abbildung 1: Reales Zwanzigerfeld und Tablet mit der App „Rechen-StAR“ (2. Version der App).

2. Theoretischer Hintergrund

Um oben genannten Schwierigkeiten entgegenzuwirken, sollte der Zahlenstrahl als Längen-Darstellung der Zahlen erarbeitet werden (Gaidoschik, 2003). Die Darstellung von Plättchen im Zahlenstrahl (Schulz & Wartha, 2021, S. 25) zur Darstellung der ‚Einerstrecken‘ (Gaidoschik, 2003) könnte hilfreich für den Lernprozess sein (siehe Abbildung 2).

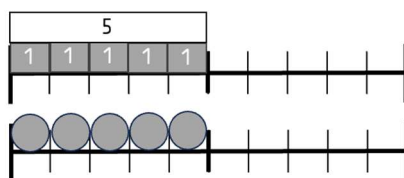


Abbildung 2: oben: Fünf als fünf Einer-Strecken am Zahlenstrahl (Gaidoschik, 2003, S. 102); unten: Darstellung von Plättchen im Zahlenstrahl (Schulz & Wartha, 2021, S. 25).

Zudem sollte ein Bezug zu flächigen Darstellungen möglich sein. Ein Ansatz ist demnach die Kombination der Arbeitsmittel Zwanzigerfeld und Zahlenstrahl und damit einhergehend die Verbindung des Kardinal- und des Ordinalzahlaspekts. Die verschiedenen Zahlaspekte, insbesondere die soeben genannten, hängen eng miteinander zusammen (Padberg & Benz, 2021, S. 8), sodass nach dem Aufbau eines grundlegenden Verständnisses des kardinalen und des ordinalen Aspekts eine integrative Behandlung sinnvoll erscheint. Das bewusste Zusammenführen der beiden zentralen Zahlaspekte soll zu einem tieferen Zahlverständnis führen (Padberg & Benz, 2021, S. 9).

Diese Zusammenführung könnte mittels Augmented Reality (erweiterte Realität) durch das Verbinden und Erweitern der Potenziale der realen und der digitalen

Welt gelingen. Augmented Reality (AR) ist eine Technologie, die die physische Welt mit virtuellen Aspekten verbindet, also z.B. computergenerierte Bilder erzeugt, die über ein physisches Objekt in der realen Welt gelegt werden. Azuma (1997, S. 1) beschreibt AR durch die Kennzeichen: Kombination von virtueller Realität und realer Umgebung, Interaktion in Echtzeit sowie dreidimensionaler Bezug virtueller und realer Objekte. Durch AR bleibt somit das „Be-greifen“, also das Handeln in der realen Welt mit realen Materialien, möglich. Die reale Welt wird darüber hinaus mit digitalen Kontextinformationen angereichert, die den Aufbau mentaler Vorstellungsbilder unterstützen können, denn: Mathematik kann als Sache des Begreifens verstanden werden. Dieses Be-greifen kann durch das Handeln mit Material unterstützt werden (Gaidoschik, 2003, S. 73).

Bei AR gibt es zwei Hauptmethoden der Interaktion: die desktopbasierte (mobiles Endgerät) und die eigenständige (Head-Mounted Display) (Alizadehsalehi et al., 2020; Lee, 2012). Im Projekt ARithmetik wird die desktopbasierte Methode angewandt, da in dieser neueren technologischen Entwicklung Potenzial für die Unterstützung schulischen Lernens in der Primarstufe gesehen wird (Csandová et al., 2020, S. 80ff.).

Zwei Herausforderungen sind bezüglich des Einsatzes von AR im Unterricht zu nennen: die Technologie selbst sowie der Einbezug der Technologie in bestehende Unterrichtskonzepte (Fehling, 2017; Ladel, 2020). Möglichkeiten von AR für das Mathematiklernen in der Primarstufe sind noch wenig differenziert entwickelt und beforscht (Ladel, 2020). Entsprechende Entwicklungen orientieren sich häufig eher an den technischen Möglichkeiten, anstatt sich am didaktisch Sinnvollen auszurichten (Ladel, 2020, S. 673f.). Der Fokus bisheriger AR-Projekte für das Unterrichtsfach Mathematik liegt eher im Bereich der Geometrie (Hütthaler, 2020; Radianti et al., 2020; Reit, 2020), insbesondere im Inhaltsbereich der Arithmetik ist AR eine wenig genutzte Technologie. Hier setzt das Projekt ARithmetik an.

3. Forschungsprozess

Im Projekt wird der Design Science Research (DSR) Ansatz verwendet. DSR ist ein in der Philosophie des Pragmatismus verwurzeltes Paradigma, das problemlösende Forschung zur Beantwortung von Forschungsfragen in Bezug auf menschliche Probleme umfasst und dabei nützliche Artefakte hervorbringt (Drechsler & Hevner, 2016). Das Ziel des Projekts ARithmetik ist die Entwicklung eines Artefakts in Form einer AR-App, die den kardinalen mit dem ordinalen Zahlaspekt verknüpft, um Kinder beim Schritt vom konkreten Handeln zum Operieren in der Vorstellung unterstützen zu können. Eine Kombination aus Educational Design Research (u.a. Plomp, 2013) und Design Science Research in Information Systems (u.a. Drechsler & Hevner, 2016) wird angewendet, bei der in Form von mehrstufigen iterativen Studien bestimmte Unterrichtsstrategien und -technologien implementiert, bewertet und modifiziert werden, um mögliche Faktoren zu bestimmen, die das Lernen beeinflussen.

In Abbildung 3 sind die Funktionen der ersten Version der App „Rechen-StAR“ (Platz & Bierbrauer, im Druck) dargestellt.

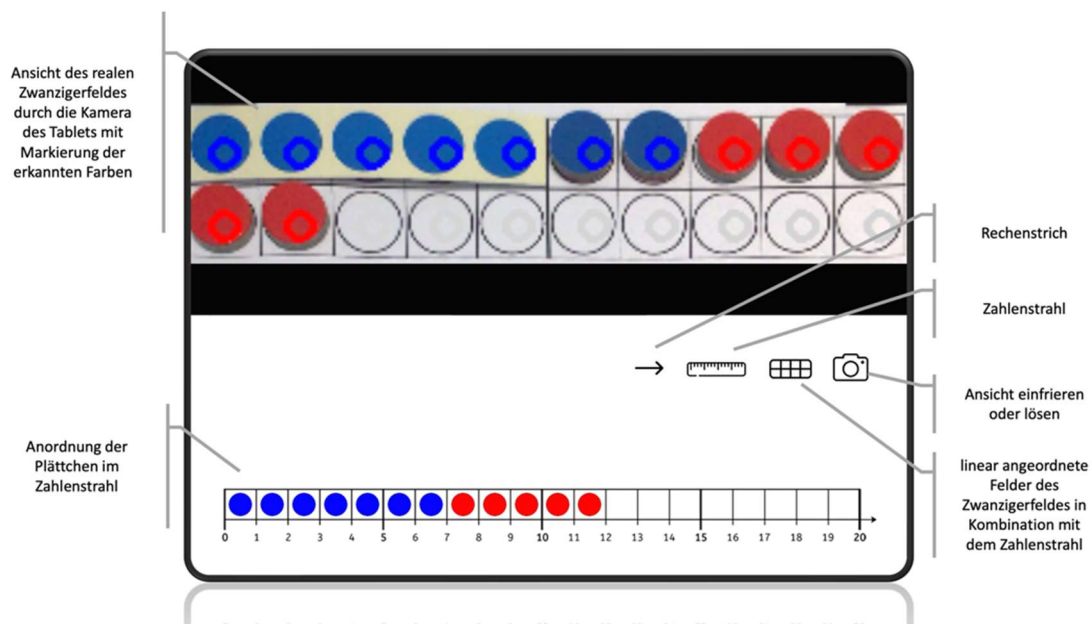


Abbildung 3: Funktionen der 1. Version der App Rechen-StAR.

Bei der Entwicklung der digitalen Anwendung „Rechen-StAR“ zur Unterstützung des Zahlverständnisses wurde nach dem Primat der Fachdidaktik zunächst vorrangig aus der Perspektive der Mathematikdidaktik gedacht. So finden beispielsweise nachfolgende Potenziale, die mathematische Lern- und Lehrprozesse unterstützen können, Berücksichtigung. Darüber hinaus wurden Gestaltungsprinzipien zum Aufbau multimedialer Lernmaterialien aus der Mediendidaktik herangezogen, wie das coherence principle (überflüssige Informationen werden ausgeschlossen; Mayer, 2014; Mayer, 2021).

Im Sinne der Kombination der Zahlaspekte soll mithilfe der App der mengentheoretische Aspekt der Kardinalität (Anzahl) auch im Zahlenstrahl sichtbar werden: Die App überführt die flächige Darstellung einer (An-)Zahl im Zwanzigerfeld in eine linear angeordnete Darstellung im Zahlenstrahl. Dazu werden das physische Zwanzigerfeld und die darin mit Plättchen gelegte Zahl über die Kamera des Tablets, das auf einer Halterung steht, erkannt und auf dem oberen Bildschirmrand angezeigt, was zu einer Passung zwischen Handlung und mentaler Operation (Sarama & Clements, 2006; Walter, 2018) beitragen kann. Ebenso wird die Farbe des jeweiligen Plättchens (rot oder blau) korrekt angezeigt. Multiple externe Repräsentationen (Bruner, 1974; Ladel, 2009) finden Anwendung und werden verknüpft (Schmidt-Thieme & Weigand, 2015; Ainsworth, 2006; Ladel, 2009), was zur kognitiven Entlastung (Ladel, 2016; Sweller, 2005; Walter, 2018) beiträgt. Im Sinne der Synchronität und Vernetzung von Darstellungen (Rink & Walter, 2020) werden die Plättchen automatisch von der Markierung der Null an auffallend passend in den Zahlenstrahl als Abstand zwischen zwei Markierungen „eingelegt“ – der kardinale Aspekt bleibt dabei erhalten und mit dem ordinalen Aspekt, der Folge

der Zahlen, verknüpft (Abbildung 3). Die dargestellten Objekte werden strukturiert (Krauthausen, 1995, Walter, 2018).

In der App kann zwischen drei verschiedenen Ausführungen des Zahlenstrahls gewählt werden:

- Zahlenstrahl mit vollständiger Markierung und Beschriftung
- Zahlenstrahl mit vollständiger Markierung und Beschriftung in Verbindung mit den linear angeordneten Feldern des Zwanzigerfeldes
- Rechenstrich (lediglich Markierung und Beschriftung der Null; leerer Zahlenstrahl)

Dies eröffnet mehrere Möglichkeiten: So kann etwa jeweils die für das konkrete Vorhaben bzw. für die spezifische Aufgabe geeignetste Zahlenstrahlvariante ausgewählt werden oder aber verschiedene Darstellungsformen in Beziehung miteinander gesetzt und Zusammenhänge thematisiert werden. Zudem kann zur Differenzierung beigetragen werden, indem die Lernenden die Entscheidung für einen Zahlenstrahl selbst treffen, denn die unterschiedlichen Varianten bieten einen unterschiedlichen Grad an Unterstützung.

Ferner gibt es die Möglichkeit, die Ansicht des Zwanzigerfeldes „einzufrieren“ und durch erneutes Tippen auf den Button wieder zu lösen. Im „eingefrorenen Modus“ kann das Tablet von der Halterung genommen und auf den Tisch gelegt werden, sodass ein bequemerer Arbeiten möglich ist.

Zur technischen Umsetzung der AR-App wurden, wie es bei AR-Apps üblich ist, Marker zur Identifikation von Plättchen verwendet (Avola, 2016). Jeder Marker ermöglicht die Erfassung der dreidimensionalen Ausrichtung des Plättchens. Aufgrund der variablen Größe und der flexiblen Materialeigenschaften von Plättchen, wurden jeweils vier Marker an den Ecken des Zwanzigerfeldes positioniert (siehe Abbildung 4).

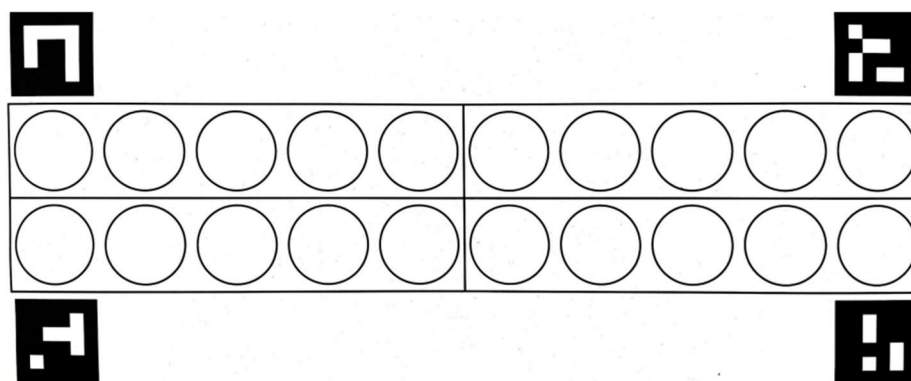


Abbildung 4: Zwanzigerfeld mit Markern.

Dadurch ist es möglich, ein Plättchen trotz eventueller Verzerrungen präzise zu erkennen und es mittels Bildperspektiventransformation (Szeliski, 2022) übersichtlich auf dem Tablet darzustellen.

Statt QR-Codes, die für AR-Anwendungen nicht empfohlen werden (Avola, 2016), werden bei Rechen-StAR ArUco-Marker verwendet. Die Erkennung der Marker erfolgt dabei mithilfe von OpenCV in C++, während der Rest der App in Swift entwickelt wurde. Dies ermöglicht eine effiziente und zuverlässige Marker-Erkennung in der App.

Zur ersten Evaluation der App wurde eine Fallstudie (Yin, 2018) mit qualitativen Erhebungs- und Auswertungsmethoden durchgeführt. Klinische Interviews (Selter & Spiegel, 1997) mit vier Erstklässler:innen-Tandems (zwei englisch- und zwei deutschsprachige) wurden durchgeführt. Im Rahmen dieser Pilotstudie wurde Benutzerfreundlichkeit und die User Experience der App untersucht.

Benutzerfreundlichkeit (usability) wird in den ISO 9241 Standard on Ergonomics of Human System Interaction (Part 11 1998) definiert als das Ausmaß, in dem ein Produkt von bestimmten Nutzern verwendet werden kann, um bestimmte Ziele mit Effektivität, Effizienz und Zufriedenheit in einem bestimmten Nutzungskontext zu erreichen. „Die User Experience (UX) betrachtet den Umgang eines Nutzers mit einem (digitalen) Produkt sowie die Gefühle und Assoziationen, das Erlebnis, das aus dieser Interaktion resultiert“ (van de Sand, 2017, S. 7).

Die Kinder wurden beobachtet, während sie bestimmte Aufgaben mit Version 1 der App (Abbildung 3) lösten, um spezifische Bedürfnisse zu erkennen, die in das aktuelle System integriert werden können oder zur Entwicklung eines neuen Prototyps oder Artefakts führen (Preece et al., 2015; Wilson, 2013). Die Beobachtung erfolgte anhand von Videoaufnahmen, die transkribiert und mittels qualitativer Inhaltsanalyse (Mayring, 2015) ausgewertet wurden.

Das Kategoriensystem ist das zentrale Element der qualitativen Inhaltsanalyse (Mayring, 2015), wodurch das Datenmaterial systematisiert und zusammengefasst wird. So wurde ein Kategoriensystem zunächst theoriegeleitet erarbeitet, sodass bereits vor der Kodierphase eine inhaltliche Systematisierung vorlag (Rädiker & Kuckartz, 2019): „Using a concept-driven, deductive strategy means basing your work on previous knowledge. This can come from different sources: a theory, prior research, everyday experience, or logic“ (Schreier, 2012, S. 85). Das Kategoriensystem wurde dann am Material induktiv weiterentwickelt „To work inductively is to create categories and sub-categories in a data-driven way. This is especially useful if you want to describe your material in depth“ (Schreier, 2012, S. 88). Auf Basis der Ergebnisse wurde die App weiterentwickelt. Sowohl UX-Kriterien als auch mathematikdidaktische Kriterien wurden betrachtet (siehe Tabelle 1).

Nr.	Kategorie	Definition	Ankerbeispiel	Kodierregel	Bewertung
1	Attraktivität, Stimulation	Gesamteindruck des Produkts. Mögen die Kinder die App oder nicht? (Schrepp, 2015) Ist es spannend und motivierend, das Produkt zu benutzen? (Schrepp, 2015)	Tandem 1: S2: That's so crazy. Wow. I cannot stand. Tandem 3: S2: (lachen) Der hats gemerkt.	Erkennbare Freude vs. Erkennbare Abneigung bei Nutzung der App.	+ Denn: Die Kinder freuten sich, dass die Plättchen richtig erkannt wurden und sie schienen die App zu mögen.

	Ist eine ästhetische Qualität gegeben? (Krauthausen, 2018)			
2	Übersichtlichkeit Ist es einfach, sich mit der App vertraut zu machen? Ist es einfach zu lernen, wie man die App benutzt? (Schrepp, 2015)	Tandem 2: S1: What are we going to do with the app? S2: (legt Plättchen in das Zwanzigerfeld und zeigt auf das Tablet) Look. I: Hm (agreeing)	Nutzung der App ohne Einführung seitens der Lehrperson vs. viel Hilfe beim Umgang mit der App wird benötigt.	+ Denn: Die Kinder konnten die App sofort ohne Einführung bedienen.
3	Effizienz, Verlässlichkeit Können die Kinder ihre Aufgaben ohne unnötigen Aufwand lösen? (Schrepp, 2015) Hat das Kind das Gefühl, die Kontrolle über die Interaktion zu haben? (Schrepp, 2015) Ist eine angemessene Haltbarkeit auch unter Alltagsbedingungen gegeben? (Krauthausen, 2018) Inwiefern benötigen die Lernenden Unterstützung, um mit der App eigenständig arbeiten zu können? Steht der Aufwand in einem guten Verhältnis zum erwünschten Ertrag? (PIKAS digi) Ist die Handhabbarkeit auch für Kinderhände und ihre Motorik angemessen? (Krauthausen, 2018)	Wenn Marker verdeckt sind, oder bei ungenauem Legen werden Plättchen nicht erkannt. Das Zwanzigerfeld muss weit weg von den Kindern liegen, dass das Feld und die Plättchen erkannt werden.	Die App funktioniert zuverlässig vs. die App funktioniert nicht zuverlässig.	- Denn: Das Lösen der Aufgaben ohne unnötigen Aufwand war nicht immer möglich. Bspw. werden Plättchen, wenn Marker verdeckt sind oder bei ungenauem Legen, nicht erkannt. Dass die App funktioniert und die Marker erkennt, muss das Zwanzigerfeld recht weit weg von den Kindern liegen und das Tablet schräg davorstehen, was das Arbeiten an der App erschwert.
4	Unterstützung der Ablösung vom zählenden Rechnen Wird die Simultanerfassung von Anzahlen bis fünf bzw. die strukturierte (Quasi-Simultan-)Erfassung von größeren Anzahlen unterstützt? Werden die Ausbildung von Vorstellungsbildern und das mentale Operieren unterstützt? Wird die Verfestigung des zählenden Rechnens vermieden bzw. die Ablösung vom zählenden und der Übergang zum denkenden Rechnen unterstützt? (Krauthausen, 2018) Bietet die App Strukturierungshilfen an, indem unstrukturierte Mengen oder Darstellungen automatisch geordnet werden können und quasi-simultane Zahlerfassung möglich wird? (PIKAS digi)	Tandem 4: I: Hm (bejahend) warte, ich helfe dir mal im ersten Schritt (..) (legt einen Fünferstreifen) So, wie viele hab ich denn jetzt schon hingelegt? S2: Fünf. S1: Fünf. I: Genau. Kannst Du von da Weiterlegen? (6) (legt einen weiteren Fünferstreifen) Wie viele sind das jetzt? S1: Zehn. I: Zehn, hm (bejahend) (5) siehst du das auch in der App, dass das die zehn sind? S1: Hm (bejahend) Tandem 4: S1: (während S2 einzelne Plättchen in das Zwanzigerfeld legt, zählt S1) Elf, zwölf, dreizehn.	Unterstützung der Ablösung vom zählenden Rechnen vs. Verleitung zum zählenden Rechnen	0 Denn: Die Kinder kannten die Arbeit mit Fünfer- und Zehnerstreifen nicht und bearbeiteten die Aufgaben zunächst (zählend) mit einzelnen Plättchen. Nach einer kurzen Anregung durch die Interviewerin nutzten die Kinder die Fünfer- und Zehnerstreifen (evtl. da man dann in der App schneller etwas „sieht“). Durch die Nummerierung der Markierung des Zahlenstrahls kann einerseits eine Umlagerung von Arbeitsprozessen erzielt werden, andererseits könnte jedoch zum Zählen verleitet werden
5	Umlagerung von Arbeitsprozessen Nimmt die App den Lernenden einfache (Rechen-)Tätigkeiten ab und ermöglicht ihnen so einen fokussierten Blick auf Veränderungen, Strukturen und	Tandem 4: S1: (während S2 einzelne Plättchen in das Zwanzigerfeld legt, zählt S1) elf, zwölf, dreizehn.		0: Denn: Durch die Nummerierung der Markierung des Zah-

		mathematische Zusammenhänge? (PIKAS digi)			lenstrahls kann einerseits eine Umlagerung von Arbeitsprozessen erzielt werden, andererseits könnte jedoch zum Zählen verleitet werden.
6	Ermöglichung des entdeckenden Lernens	Ermöglicht die App den Lernenden Entdeckungen zu machen und daran zu lernen? (PIKAS digi)	Bei Aufgaben zu Zahlenfolgen wurde deutlich, dass die App die Plättchen nach Reihenfolge im Zwanzigerfeld (links oben ‚die‘ 1, daneben ‚die‘ 2, ...) im Zahlenstrahl abbildet. Dadurch war das Stellen der Aufgabe „Was glaubt ihr warum die App das so anzeigt?“ möglich: „Ah, weil das die als Reihe zählt.“ (Tandem 3, S2).		0: Denn: Durch die vorab nicht intendierte Darstellung in der App war das Stellen von Aufgaben zum Entdecken der Funktionsweise der App möglich.

Tabelle 1: Kategoriensystem mit Bewertungen: +: positiv, 0: neutral, - negativ.

Weiterentwicklungsbedarf besteht also hauptsächlich bezüglich der Kategorien 3, 4, 5, und 6.

4. Weiterentwicklung der App Rechen-StAR

Das Hauptproblem stellt die fehlende Zuverlässigkeit der App auf Grund der technologischen Möglichkeiten dar (Kategorie 3). Für die Steigerung der Effizienz und Verlässlichkeit konnte bisher noch keine praktikable Lösung gefunden werden, es wird weiter daran gearbeitet. Um zumindest die Kooperation zwischen Lernenden zu unterstützen, führt nun ein doppeltes Tippen auf das digitale Zwanzigerfeld zu einer Drehung desselben um 180°. Dadurch ist es möglich, dass zwei sich gegenüber sitzende Lernende mit jeweils einem Tablet gleichzeitig an einem physischen Zwanzigerfeld arbeiten können und beide die Zahl im digitalen Zwanzigerfeld in gewohnter Darstellung sehen.

Um die Ablösung vom zählenden Rechnen noch stärker unterstützen und der Verleitung zum zählenden Rechnen entgegenzuwirken (Kategorie 4), wurde ein Zahlenstrahl mit ausschließlicher Markierung und Beschriftung der Fünferschritte ergänzt (in Anlehnung an die Zwanzigerreihe mit Fünferzäsur, Wittmann & Müller, 1990, S. 8). So soll auch eine Umlagerung von Arbeitsprozessen ermöglicht werden (Kategorie 5), ohne zum zählenden Rechnen zu verleiten.

Neben der nicht-intendierten Darstellung (Kategorie 6), wurde die intendierte Darstellung technisch umgesetzt: Entscheidend für die Darstellung im Zahlenstrahl ist lediglich die Anzahl an Plättchen im Zwanzigerfeld, die spezielle Anordnung im Zwanzigerfeld spielt keine Rolle – auch „Lücken“ zwischen Plättchen haben keinen Einfluss (Abbildung 6). Dies ermöglicht eine Darstellungsvielfalt beim Legen der Zahl im Zwanzigerfeld und gewährleistet sogleich die korrekte (eindeutige) Darstellung der Zahl im Zahlenstrahl. Die Veränderung der Plättchen am Zwanzigerfeld

gerfeld führt automatisch und gleichzeitig zur Änderung der Plättchen am virtuellen Zahlenstrahl (Verknüpfung externer Repräsentationen; Schmidt-Thieme & Weigand, 2009; Ladel, 2009). Im Sinne der Cognitive Load Theory (Sweller, 2014) wird die kognitive Beanspruchung (Rink & Walter, 2020), die durch eine Übersetzung der Darstellung einer Zahl im Zwanzigerfeld in eine Darstellung im Zahlenstrahl entsteht, durch die App reduziert (Kategorie 5), sodass der Fokus auf den Zusammenhang kardinaler und ordinaler Darstellungen gelegt werden kann.

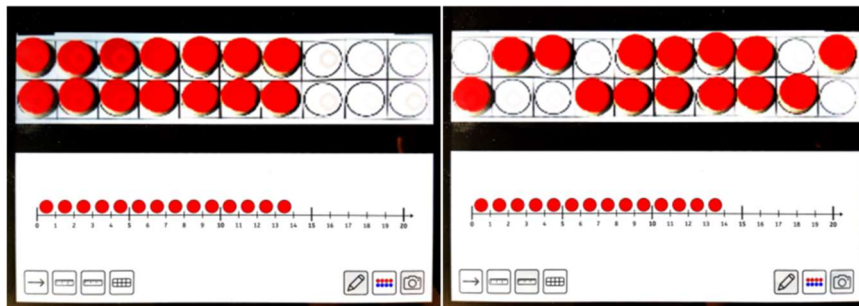


Abbildung 6: Die Anordnung der Plättchen im Zwanzigerfeld (links: zeilenweise, rechts: mit „Lücken“) hat keinen Einfluss auf die Darstellung der Zahl im Zahlenstrahl.

Des Weiteren verfügt die App über eine Sortierfunktion: Im Zahlenstrahl können die Plättchen durch Tippen auf den entsprechenden Button der Farbe nach sortiert werden. Die erste Farbe ist die, die auch im Zwanzigerfeld zuerst vorkommt. Damit ist schnell erkennbar, wie viele rote und wie viele blaue Plättchen insgesamt im Zwanzigerfeld liegen. Durch erneutes Tippen wird wieder die ursprüngliche Anordnung angezeigt.

Durch die Stiftfunktion können Notizen im unteren Bildschirmbereich am Zahlenstrahl gemacht werden, beispielsweise um Rechenstrategien zu veranschaulichen. Mithilfe eines Radier-Buttons wird das Geschriebene wieder gelöscht. In Abbildung 5 ist eine Übersicht über die Funktionen der zweiten Version der App dargestellt.

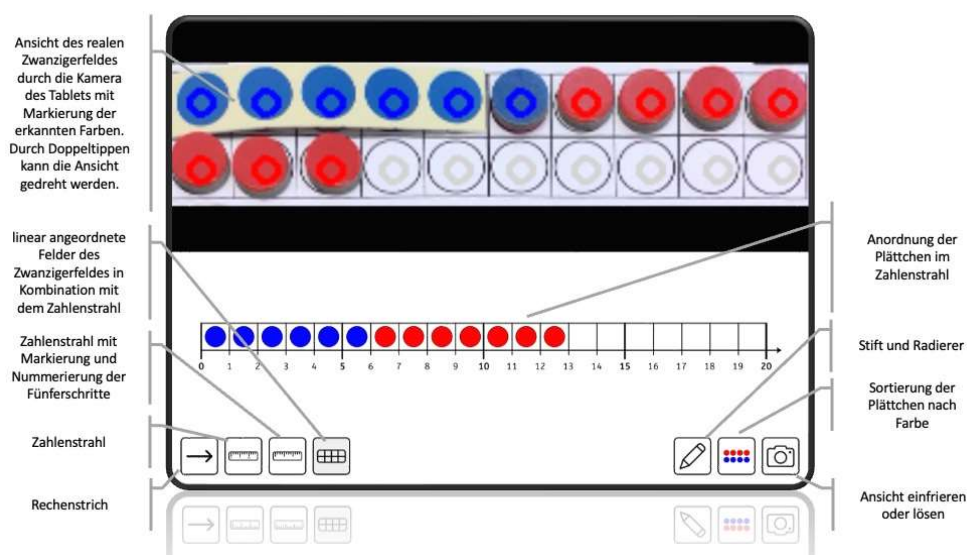


Abbildung 5: Funktionen der 2. Version der App Rechen-StAR.

5. Zusammenfassung & Ausblick

Im vorliegenden Beitrag wurden der Entwicklungsprozess der App Rechen-StAR und der aktuelle Entwicklungsstand sowie technische Hintergründe beleuchtet und didaktisch reflektiert. Im nächsten Schritt werden ko-konstruktiv mit Lehrpersonen Lernumgebungen, in denen die App eingesetzt wird, entwickelt und mit Erstklässler:innen erprobt, d.h. eine multiple Fallstudie (Yin, 2018) mit qualitativen Erhebungs- und Auswertungsmethoden wird durchgeführt, um neben Benutzerfreundlichkeit und User Experience auch Rückschlüsse des Einflusses auf den Lernprozess ziehen zu können. Zudem wird die Lehrendenperspektive einbezogen und Maßnahmen, um einen Einsatz der App im regulären Mathematikunterricht zu ermöglichen, werden abgeleitet.

Danksagung

Das Projekt ARithmetik wird mit Mitteln des Ministeriums der Finanzen und für Wissenschaft Saarland gefördert.

Literatur:

- Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction*, 16(3), 183–198.
- Alizadehsalehi, S., Hadavi, A., & Huang, J. C. (2020). From BIM to extended reality in AEC industry. *Automation in Construction*, 116(March), 103254. <https://doi.org/10.1016/j.autcon.2020.103254>
- Avola, D., Cinque, L., Foresti, G. L., Mercuri, C., & Pannone, D. (2016). A Practical Framework for the Development of Augmented Reality Applications by using ArUco Markers. In *ICPRAM* (pp. 645-654).
- Azuma, R. T. (1997). A survey of augmented reality. *Presence: teleoperators & virtual environments*, 6(4), 355–385.
- Bruner, J. S. (1974). From communication to language—A psychological perspective. *Cognition*, 3(3), 255–287.
- Csandová, E., Tothova, R., Korenova, L. (2020). Uses of Augmented Reality in Primary Education. In: Prodromou, T. (Ed.). *Augmented Reality in Educational Settings*. Brill/Sens.
- Drechsler, A., & Hevner, A. (2016). A four-cycle model of IS design science research: capturing the dynamic nature of IS artifact design. Paper presented at the *Breakthroughs and Emerging Insights from Ongoing Design Science Projects: Research-in-progress papers and poster presentations from the 11th International Conference on Design Science Research in Information Systems and Technology (DESRIST) 2016*. St. John, Canada, 23-25 May.
- Fehling, C. (2017). Neue Lehr- und Lernformen in der Ausbildung 4.0. Social Augmented Learning in der Druckindustrie. *Berufsbildung in Wissenschaft und Praxis*, 46 (2017) 2, 30-33, URL: <https://www.bibb.de/veroeffentlichungen/de/bwp/show/8285> - ISSN: 0341-4515
- Gaidoschik, M. (2003). *Rechenschwäche – Dyskalkulie*. PERSEN.

- Hütthaler, M. (2020). *Zur Relevanz von Augmented Reality in der Primarstufe: Chancen und Herausforderungen aus der Sicht angehender Lehrkräfte beim Einsatz von Augmented Reality*. R&E- SOURCE.
- Käpnick, F. (2014). *Mathematiklernen in der Grundschule*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-37962-8>
- Krauthausen, G. (1995). Die "Kraft der Fünf" und das denkende Rechnen. In E. C. Wittmann & G. N. Müller (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen* (S. 81–108). Arbeitskreis Grundschule.
- Krauthausen, G. (2018). *Einführung in die Mathematikdidaktik - Grundschule*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-54692-5>
- Ladel, S. (2009). *Multiple externe Repräsentationen (MERs) und deren Verknüpfung durch Computereinsatz*. Verlag Dr. Kovac.
- Ladel, S. (2016). Digitale Medien im Mathematikunterricht der Grundschule. In M. Peschel & T. Irion (Hrsg.), *Neue Medien in der Grundschule 2.0. Grundlagen-Konzepte-Perspektiven* (S. 154–165). Grundschulverband – Arbeitskreis Grundschule e. V.
- Ladel, S. (2020). Bildungstechnologie im Mathematikunterricht (Klassen 1–6). Niegemann, H., & Weinberger, A. (Hrsg.), *Handbuch Bildungstechnologie* (pp. 645–666). Springer.
- Lee, K. (2012). Augmented Reality in Education and Training. *TechTrends*, 56(2), 13–21. <https://pubs.acs.org/doi/10.1021/jo971990i>
- Lorenz, J.-H. (1991). Materialhandlungen und Aufmerksamkeitsfokussierung zum Aufbau interner arithmetischer Vorstellungsbilder. In J.-H. Lorenz (Hrsg.), *Störungen beim Mathematiklernen* (S. 53–73). Aulis.
- Mayer, R. E. (Hrsg.) (2014). *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (2. Auflage). Cambridge University Press.
- Mayer, R. E. (2021). *Multimedia Learning*, Third Edition. Cambridge University Press.
- Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken*. Beltz. https://doi.org/10.1007/978-3-531-18939-0_38
- NCTM. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Padberg, F. & Benz, C. (2021). *Didaktik der Arithmetik* (5. Aufl.). Springer Spektrum.
- PIKAS digi (o.J.) *Leitfragenkatalog zur Softwareauswahl für den Einsatz im Mathematikunterricht*. https://pikas-digi.dzlm.de/sites/pikasdgi/files/uploads/Software/kriteriengeleitete-softwareauswahl/sw_leitfragenkatalog_appauswahl.pdf
- Platz, M. & Bierbrauer, C. (im Druck). ARithmetik – Augmented Reality zum Lehren und Lernen arithmetischer Inhalte in der Primarstufe. In B. Brandt & L. Bröll (Hrsg.), *Sammelband zum 4. Symposium „Lernen Digital“*. Waxmann Verlag.
- Plomp, T. (2013). Educational design research: An introduction. In T. Plomp & N. Nieveen (Hrsg.), *Educational Design Research* (S. 11–50). Netzdruk, SLO – Netherlands institute for curriculum development.
- Preece, J., Sharp, H., Rogers, Y., & Sharp, H. (2015). Interaction Design: Beyond Human Computer Interaction. *Design*, 18(1), 68–68. [https://doi.org/10.1016/S0010-4485\(86\)80021-5](https://doi.org/10.1016/S0010-4485(86)80021-5)

- Radatz, H. (1991). Einige Beobachtungen bei rechenschwachen Schülern. In J.-H. Lorenz (Hrsg.), *Störungen beim Mathematiklernen* (S. 74–89). Aulis.
- Radianti, J., Majchrzak, T. A., Fromm, J., & Wohlgenannt, I. (2020). A systematic review of immersive virtual reality applications for higher education: Design elements, lessons learned and research agenda. *Computers & Education*, 147. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2019.103778>
- Rädiker, S. & Kuckartz, U. (2019). *Analyse qualitativer Daten mit MAXQDA*. Springer VS.
- Reit, X.-R. (2020). Augmented Reality in der analytischen Geometrie: Hat das Potenzial? In H.-S. Siller, W. Weigel, & J. F. Wörler (Eds.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2020: Auf der 54. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM): (09.–13.03.2020 bzw. 28.09.–01.10.2020)*. WTM-Verlag. <https://doi.org/10.17877/DE290R-21509>
- Rink, R. & Walter, D. (2020). *Digitale Medien im Mathematikunterricht. Ideen für die Grundschule*. Cornelsen.
- Sarama, J., & Clements, D. H. (2006). Mathematics, young students, and computers: Software, teaching strategies and professional development. *The Mathematics Educator*, 9(2), 112–134.
- Schmidt-Thieme, B. & Weigand, H.-G. (2015). Medien. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 461–490). Heidelberg: Springer.
- Schreier, M. (2012). *Qualitative content analysis in practice*. Sage Publications.
- Schrepp, M. (2015). *User experience questionnaire handbook. All you need to know to apply the UEQ successfully in your project*. <https://www.ueq-online.org>. Abgerufen am 19.08.2023.
- Selter, C. & Spiegel, H. (1997). *Wie Kinder rechnen*. Klett.
- Selter, C. & Zannetin, E. (2019). *Mathematik unterrichten in der Grundschule*. Klett.
- Schulz, A., & Wartha, S. (2021). *Zahlen und Operationen am Übergang Primar-/Sekundarstufe*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-62096-0>
- Szeliski, R. (2022). *Computer vision: algorithms and applications*. Springer Nature.
- Sweller, J. (2005). Implications of cognitive load theory for multimedia learning. In R. Mayer (Hrsg.), *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (S. 135–146). Cambridge University Press.
- Van de Sand, F. (2017). *User Experience Identity*. Springer
- Walter, D. (2018). *Nutzungsweisen bei der Verwendung von Tablet-Apps. Eine Untersuchung bei zählend rechnenden Lernenden zu Beginn des zweiten Schuljahres*. Springer Spektrum.
- Wartha, S. & Schulz, A. (2019). *Rechenproblemen vorbeugen*. Cornelsen
- Wilson, C. (2013). *User Interface Inspection Methods: A User-Centered Design Method*. In *User Interface Inspection Methods: A User-Centered Design Method*. <https://doi.org/10.1016/C2012-0-06519-2>
- Wittmann, E. C., & Müller, G. N. (1990). *Handbuch produktiver Rechenübungen*. Klett.
- Yin, R. K. (2018). *Case study research and Applications: Design and methods*. Sage.

Ein Modell zum Operationsverständnis

Ein wesentliches Ziel der Grundschuldidaktik ist die Ausbildung eines konzeptuellen Verständnisses der vier Grundrechenarten. Digitale Medien bieten hierbei neue Möglichkeiten, den individuellen Lernprozess zu unterstützen. Ein theoretisches Modell, das verschiedene Wissensbereiche eines konzeptuellen Operationsverständnisses in Beziehung setzt und gleichzeitig die Möglichkeit bietet, Teilelemente zu fokussieren, kann einen strukturierten Ansatz bieten, um solche digitale Lernumgebungen fachdidaktisch fokussiert zu entwickeln.

1. Konzeptuelles Begriffsverständnis

Begriffsverständnis kann als konzeptuelles Begriffsverständnis aufgefasst werden. Dabei zeichnet sich konzeptuelles Begriffsverständnis durch reichhaltige und vielfältige Verknüpfungen zwischen verschiedenen Wissensarten aus (Hiebert & Lefevre, 1986). Hierbei ist zwischen der prozeduralen und der konzeptuellen Wissensart zu unterscheiden (Rittle-Johnson & Schneider, 2015). Prozedurales Wissen wird dabei als das Wissen zur Ausführung von Verfahren bezeichnet und bezieht sich auf lineare Verknüpfungen auf gleicher Abstraktionsebene. Konzeptionelles Wissen hingegen wird als begriffliches Wissen oder Wissen über Verfahren umschrieben (DiSessa et al., 2004). Die Verknüpfungen liegen dabei auf verschiedenen (teils) reflexiven Ebenen (Hiebert & Lefevre, 1986). Konzeptuelles Wissen enthält somit neben prozeduralem Wissen insbesondere konzeptuelle Verknüpfungen, die es ermöglichen, einzelne Handlungsschritte rückgängig zu machen und auch darüber zu reflektieren (Hiebert & Carpenter, 1992). Die Menge und Ausprägung der Verknüpfungen nehmen dabei im Laufe des Lernprozesses zu (Rittle-Johnson & Schneider, 2015). Je dichter das Wissensnetz – die Verknüpfungen – zu einem Begriff sind, desto sicherer können die Wissens Elemente zur Bearbeitung einer Aufgabe abgerufen und verwendet werden (Hiebert & Carpenter, 1992).

Das Verständnis der Grundrechenarten sollte in der Grundschule im Sinne eines solchen Wissensnetzes vermittelt werden, sodass gemäß den Bildungsstandards die Schüler:innen am Ende der vierten Jahrgangsstufe „über ein Operationsverständnis zu den vier Grundrechenarten“ verfügen (KMK, 2022, S. 14). In den Lehrplänen von Nordrhein-Westfalen (2021) wird dies mit dem Begriff eines tragfähigen Operationsverständnisses umschrieben und in den Kompetenzerwartungen näher ausgeführt. Hier werden neben dem ‚Aufbau von Grundvorstellungen‘ zu den einzelnen Operationen der ‚Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungen‘ als auch das ‚Nutzen von Aufgabenbeziehungen‘ als wesentliche Elemente genannt. Diese Elemente sollen hier als Wissensbereiche eines konzeptuellen Verständnisses zum mathematischen Begriff verstanden werden.

Im Rahmen des hier vorgestellten Modells zum Operationsverständnis wird neben der Darstellungsvernetzung, den Grundvorstellungen und dem Nutzen von Aufgabenbeziehungen der Gebrauch des gesamten Sprachkontinuums von der Alltags- bis hin zur Fachsprache als ein weiterer Wissensbereich hinzugenommen. Das so entstehende Gesamtmodell zum Operationsverständnis zeigt Zusammenhänge zwischen diesen Wissensbereichen auf, welche im Sinne eines konzeptuellen Wissensnetzes verstanden werden können.

Abschnitt 2 erläutert kurz die einzelnen Wissensbereiche, bevor sie in Abschnitt 3 zu einem Gesamtkonzept eines konzeptuellen Operationsverständnisses zusammengefasst werden. Im Abschnitt 4 werden dann zwei Anwendungsmöglichkeiten des Modells (normativ und deskriptiv) in Zusammenhang mit der App 1·1tool vorgestellt. Schließlich folgt ein kurzer Ausblick.

2. Wissensbereiche des Operationsverständnisses

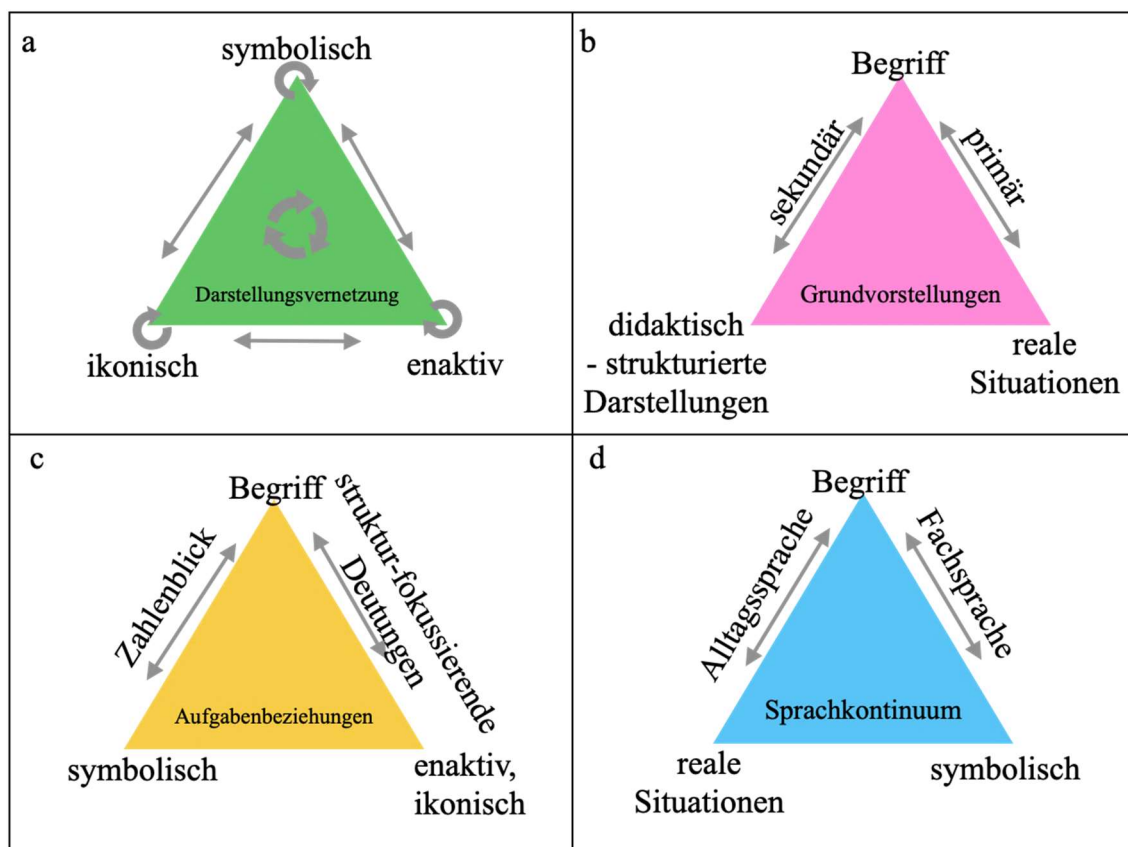


Abbildung 19a-d: Wissensbereiche zum Operationsverständnis

Ein Operationsverständnis kann im oben beschriebenen konzeptuellen Sinne verschiedene Wissensbereiche umfassen, die sich zu einem Gesamtgefüge im Laufe des Lernprozesses zusammensetzen. In der Literatur wird hierzu zunächst die *Darstellungsvernetzung* (Abb. 1a) als Grundlage eines Operationsverständnisses genannt (Bönig, 1995; Kuhnke, 2013; Royar, 2013; Wessel, 2015). Beruhend auf dem E-I-S Prinzip nach Bruner (1974) gilt es zwischen enaktiven, ikonischen, symbolischen Darstellungen inter- und intramodal wechseln zu können. Das Ziel

dieses Darstellungswechsels besteht darin, mentale Repräsentationen eines Begriffs aufzubauen, mit denen dann mental operiert werden kann (Lorenz, 1991; Aebli, 1981). Der Ausdruck ‚Vernetzung‘ betont dabei die Gleichberechtigung aller Darstellungsformen im Gegensatz zu einem Wechsel von zum Beispiel der enaktiven auf die symbolische Ebene (Wessel, 2015; Duval, 2006). In Bezug auf die Ausbildung eines konzeptuellen Operationsverständnisses ist diese Vernetzung von grundlegender Bedeutung. Studien belegen jedoch, dass die Möglichkeit, zwischen verschiedenen Darstellungsformen wechseln zu können, zwar eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für ein Operationsverständnis darstellt (Kuhnke, 2013).

Ein weiterer wichtiger Aspekt ist deshalb der Aufbau von *Grundvorstellungen* (Abb. 1b) zu den einzelnen Grundrechenarten (vom Hofe, 1995). Hier gilt es zunächst auf bereits vorhandene Erfahrungen aus dem Alltag die primären Grundvorstellungen der Kinder aufzubauen. Anschließend können weitere sekundäre Grundvorstellungen entwickelt werden. Insbesondere die sekundären Grundvorstellungen ergeben sich dabei aus den gezielt im Unterricht verwendeten didaktisch-strukturierten Darstellungen auf der enaktiven und ikonischen Ebene (vom Hofe, 2014).

Neben diesen beiden Aspekten ist auch das Nutzen von *Aufgabenbeziehungen* (Abb. 1c) ein wesentlicher Punkt zum Aufbau eines tragfähigen Verständnisses. Durch das Erkennen von Strukturen im kleinen $1+1$ und $1 \cdot 1$ (als auch deren Umkehroperationen), welche auf der Verwendung der gültigen Eigenschaften der Operationen beruhen, können flexibel geschickte Rechenwege angewandt werden. Dies geschieht im Sinne struktur-fokussierender Deutungen (Transchel, 2020; Häsel-Weide, 2016) von didaktisch-strukturierten Darstellungsformen und über die Schulung des Zahlenblicks (Rechtsteiner-Merz, 2014) auf symbolischer Ebene.

In Bezug auf die kognitive Funktion von Sprache stellt die Fähigkeit des Einsatzes des gesamten *Sprachkontinuums* (Abb. 1d) einen weiteren notwendigen Bereich für ein tragfähiges Operationsverständnis dar. Bringen die Kinder in Bezug auf reale Situationen alltagsbezogene Sprachmittel mit, gilt es, an diese anzuknüpfen und durch die Fachsprache zu ergänzen. Hierzu haben sich insbesondere bedeutungsbezogene Versprachlichungen im Register der Bildungssprache als hilfreich erwiesen, an die sich ein formalbezogener Wortschatz anschließt, der auch die symbolische Darstellung umfasst (Wessel, 2015; Prediger & Wessel, 2013).

3. Modell zum Operationsverständnis

Um die Bereiche Darstellungsvernetzung, Grundvorstellungen, Aufgabenbeziehungen und Sprachkontinuum zu einem Modell zum Operationsverständnis zusammenzufassen, soll auf ein Modell von Huinker (1993) zurückgegriffen werden (Abbildung 20). Diesem Modell zufolge basiert ein konzeptuelles Begriffsverständnis auf dem Darstellungswechsel zwischen konkreten und zeichnerischen sowie symbolischen und realen Darstellungen. Das Zusammenspiel zwischen diesen

Darstellungen bildet die Grundlage für ein mathematisches Konzept (Huinker, 1993). Die Seitenflächen und Kanten, die zur Spitze des Tetraeders – dem Konzept – führen, werden dabei nicht näher beschrieben.

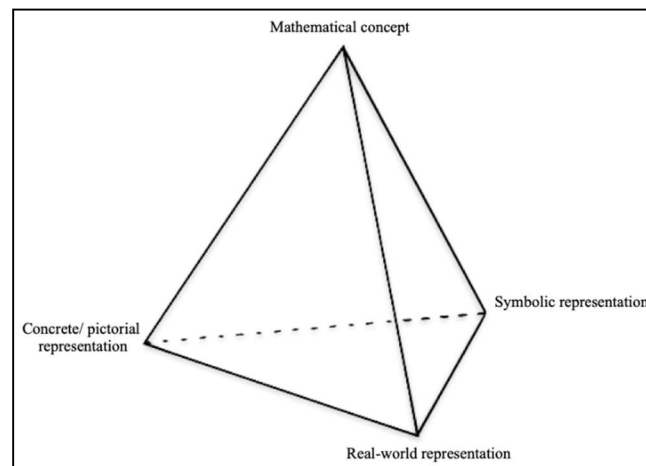


Abbildung 20: Connections among conceptual knowledge (Huinker, 1993, S. 83)

Diese Lücke versucht das im Folgenden darauf aufbauende Modell zum Operationsverständnis zu schließen. Hierdurch sollen Zusammenhänge zwischen den einzelnen Wissensbereichen für die Entwicklung der Lernsoftware aufgezeigt werden.

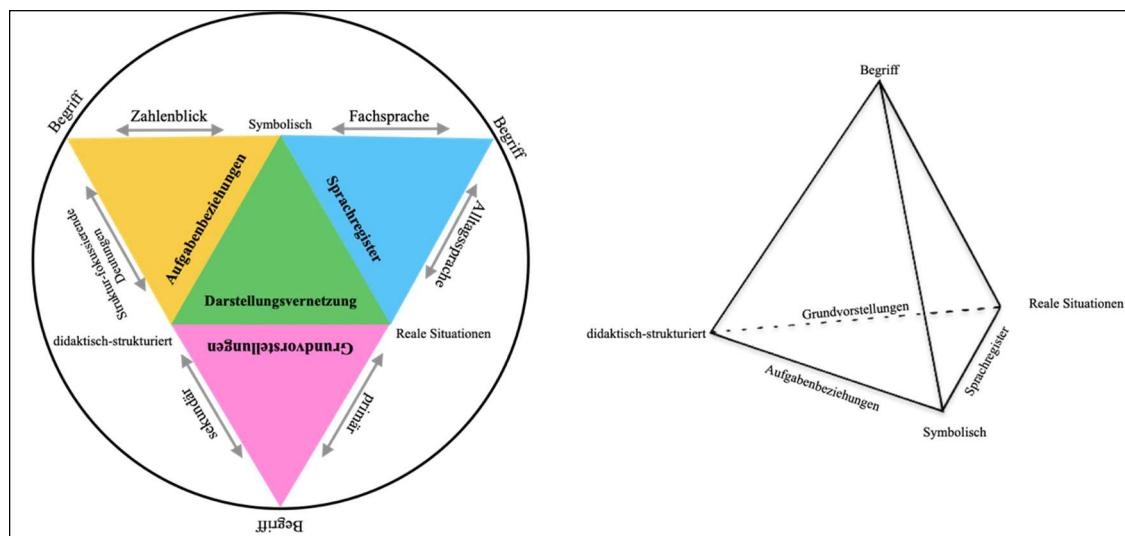


Abbildung 21: Gesamtmodell zum Operationsverständnis

Indem die Eckpunkte der Darstellungsvernetzung (vgl. Abb.1a) durch reale Situationen ergänzt und die ikonische und enaktive Ebene als didaktisch-strukturiert zusammengefasst werden, bildet die Darstellungsvernetzung weiterhin die Grundfläche des Tetraeders. Die Grundvorstellungen, unterteilt in primäre und sekundäre Vorstellungen, können dann an die realen und die didaktisch-strukturierten Darstellungen an den Eckpunkten des Tetraeders angebunden werden und bilden eine erste Seitenfläche. Das ‚Erkennen und Nutzen von Aufgabenbeziehungen‘ wieder-

rum lässt sich über die Eckpunkte symbolische und didaktisch-strukturierte Darstellungen als weitere Seitenfläche ansetzen. Abschließend ergänzt das Sprachkontinuum von der Alltagssprache bis hin zur Fachsprache die letzte Seitenfläche des Tetraeders. Es ergibt sich das in Abbildung 21 dargestellte Gesamtmodell eines konzeptuellen Operationsverständnisses.

Somit lässt sich Operationsverständnis als ein Wissensnetz aus den Wissensbereichen Grundvorstellungen, Aufgabenbeziehungen und Sprachkontinuum auf Grundlage der Darstellungsvernetzung definieren. Operationsverständnis äußert sich somit in der Fähigkeit in entsprechenden (Aufgaben-)Kontexten diese Wissensbereiche gezielt anzuwenden und in Beziehung zu setzen.

4. Normative und deskriptive Anwendungsmöglichkeiten des Modells am Beispiel der App 1·1tool

Das Modell des konzeptuellen Operationsverständnisses diene zunächst *normativ* als Grundlage für die Entwicklung einer App zum Aufbau eines tragfähigen Multiplikationsverständnisses bei der Einführung des kleinen Einmaleins in der Grundschule. Die daraus entstandene App 1·1tool²⁴ umfasst dabei die verschiedenen Bereiche des Operationsverständnisses und bezieht das zugehörige Punktestreifenmaterial mittels augmented Virtuality (AV) ein.²⁵ Die für das Modell wesentlichen Designelemente zeigt Abbildung 22.

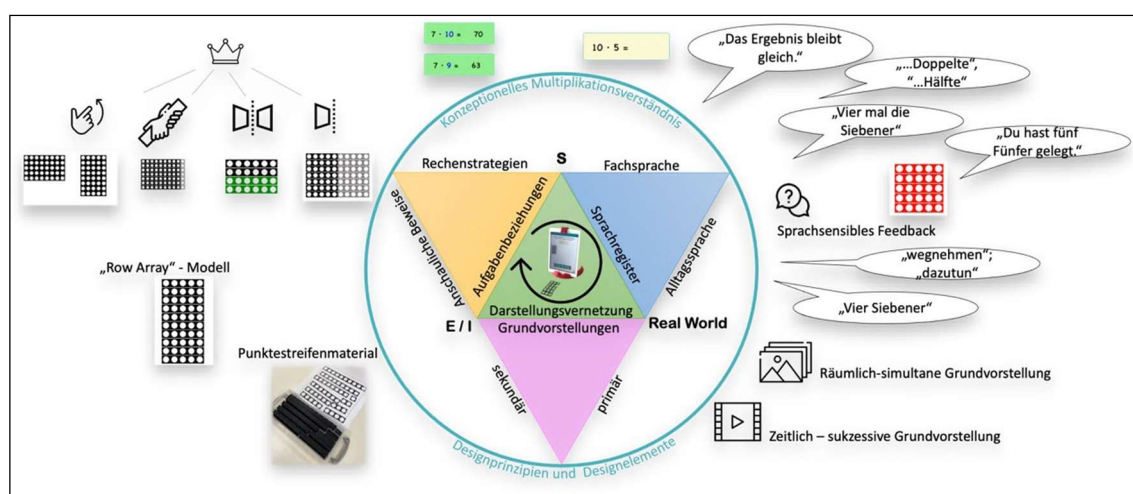


Abbildung 22: Elemente der App 1·1tool am Modell

Zunächst beinhaltet die App Aufgabenmodi zu den beiden primären Grundvorstellungen zeitlich-sukzessiv und räumlich-simultan, die zur Einführung der Multiplikation zentral sind (Padberg & Benz, 2021). Hierdurch wird an alltagssprachliche Ressourcen in realen Darstellungen angeknüpft und gleichzeitig führt die App in die bedeutungsbezogene Versprachlichung (Götze & Baiker, 2020; Götze, 2019;

²⁴ <https://apps.apple.com/de/app/1-1-tool/id1569232497>

²⁵ Für eine detaillierte Vorstellung der App sei auf Götze et al. (2022), Rahn (2022) oder Rahn & Götze (2022) verwiesen

Wessel, 2015) ein, die im weiteren Verlauf in formalbezogenes erklärendes Feedback übergeht. Gleichzeitig können über die Hilfefunktion weiterhin bedeutungsbezogene Versprachlichungen aufgerufen werden.

Der Aufbau der sekundären Grundvorstellung des *multiplikativen Unitizings* basiert auf der Unterscheidung der beiden Faktoren in Multiplikator und Multiplikand und dem Denken in gleich großen Gruppen auf drei Abstraktionsebenen (Clark & Kamii, 1996; Lamon, 1994; Steffe, 1994) und ist Grundlage für die verlinkten Darstellungsformen in der App.

Das Erkennen und Nutzen der Aufgabenbeziehungen wird ausgehend von den Kernaufgaben (Königsaufgaben) über die Rechenstrategien (Tauschaufgaben, Nachbараufgaben, Verdoppeln und Halbieren) gefördert. Die Kinder werden sprachsensibel und handlungsorientiert durch vorgegebene Rechenwege geleitet. Eigene Rechenwege können anschließend mithilfe eines Werkzeugmodus durchgeführt werden.

Der Einbezug der augmented Reality bezieht die *echt-enaktive Ebene* trotz der Verwendung eines digitalen Mediums mit ein und fokussiert dabei die Handlungsorientierung der App im Sinne des operativen Prinzips (Piaget, 2016; Aebli, 1983). So wird explizit die erste Stufe des Verinnerlichungsprozesses ‚Das Kind handelt am geeigneten Material‘ nach (Schulz & Wartha, 2021) mit einbezogen.

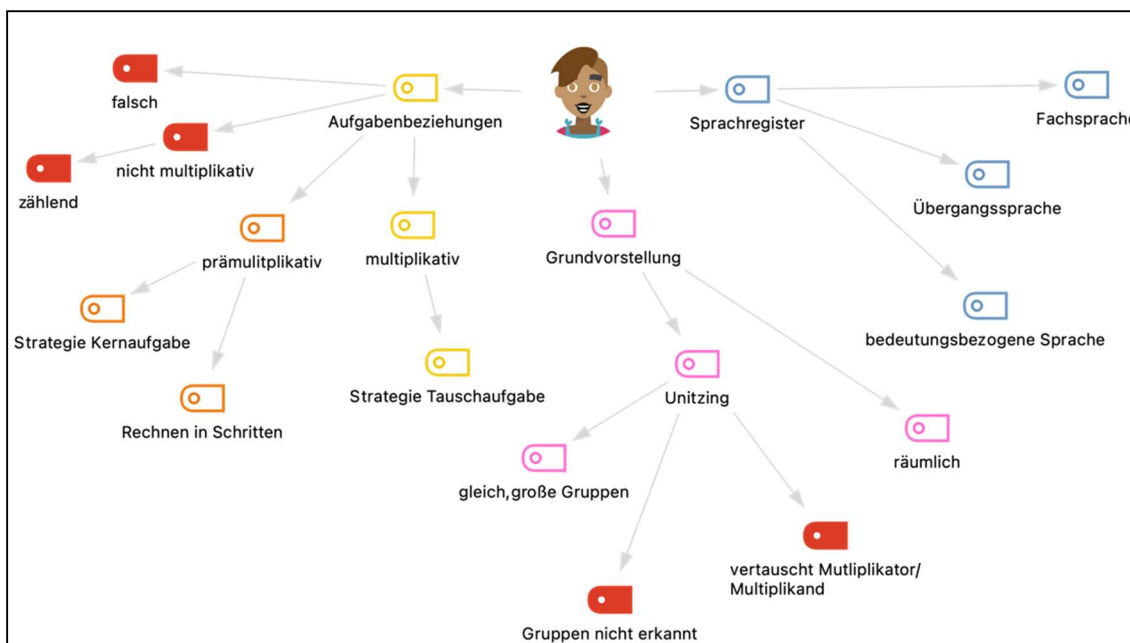


Abbildung 23: Einzel-Fall-Modell eines Begriffsverständnisses am Ende der Einführung des kleinen 1·1 mittels der App 1·1tool in Anlehnung an das vorgeschlagene Modell zum Operationsverständnis

In einem zweiten Schritt soll das Modell auch zur *deskriptiven* Beschreibung des Begriffsverständnisses eines Kindes als Ergebnis einer Begriffsentwicklung zu einem bestimmten Zeitpunkt verwendet werden (Weigand & Ruwisch, 2023).

Hierzu wurden nach Einführung der Multiplikation mittels der App 1·1tool in vier zweiten Klassen leitfadengestützte Interviews durchgeführt. Mittels qualitativer Inhaltsanalyse (Mayring & Fenzl, 2014) dieser Schüler:inneninterviews können erste Erkenntnisse über bestehende Wissens Elemente eines konzeptuellen Operationsverständnisses festgehalten werden. Das Auswertungsbeispiel mittels MAXQDA Einzel-Fall-Analyse in Abbildung 23 zeigt sowohl vorhandene förderliche Elemente des Operationsverständnisses zur Multiplikation als auch hinderliche oder sogar fehlerhafte.²⁶ Es zeigt sich zum einen, dass das Kind beim Nutzen von Aufgabenbeziehungen einzig die multiplikative Strategie der Tauschaufgabe nutzen kann. Zusätzlich scheinen die Grundvorstellungen zur Multiplikation nicht ausreichend aufgebaut zu sein, da Fehlinterpretationen codiert wurden. Weitere Analysen können mögliche Zusammenhänge der Wissensbereiche oder zum verwendeten Referenzkontext der App aufdecken.

5. Ausblick

Mit dem hier vorgestellten Modell eines konzeptuellen Operationsverständnisses sollten die Zusammenhänge zwischen den als wesentlich erachteten Bereichen Darstellungsvernetzung, Grundvorstellungen, Aufgabenbeziehungen und Sprachkontinuum aufgezeigt werden. Damit sollte eine theoretische Grundlage für normative Entscheidungs- und deskriptive Beschreibungsprozesse geschaffen werden. Normativ in dem Sinne, dass auf Basis des Modells (digitale) Designentwicklungen stattfinden und deskriptiv zur Beschreibung und Analyse von Schüler:innenvorstellungen im Hinblick auf die Entwicklung tragfähiger Operationsverständnisse. Inwieweit dieses Modell geeignet ist, müssen sowohl weitere Analysen im Rahmen der Studie zum 1·1tool als auch weiterführende Studien zeigen. Auch die Übertragbarkeit des Modells auf andere Inhaltsbereiche ist zu prüfen.

Dennoch wurde insbesondere versucht, mithilfe dieses Modells die *fachdidaktisch* orientierte Entwicklung digitaler Lernumgebungen für die Grundrechenarten in der Grundschule zu fokussieren und einen Ansatz für weitere Entwicklungen zu setzen.

Literatur:

Aebli, H. (1981). *Denken, das Ordnen des Tuns, 2: Denkprozesse*.

Aebli, H. (1983). *Zwölf Grundformen des Lehrens: eine allgemeine Didaktik auf psychologischer Grundlage*. Klett-Cotta.

Bönig, D. (1995). *Multiplikation und Division: empirische Untersuchungen zum Operationsverständnis bei Grundschulern*. Waxmann.

²⁶ Anhand dieser Darstellung können dabei jedoch keine Aussagen über die Qualität oder Zusammenhänge der aufgebauten Begriffselemente getroffen werden.

- Bruner, J. S. (1974). *Entwurf einer Unterrichtstheorie* (A. Harttung, Trans.). Berlin-Verlag. (Toward a theory of instruction)
- Clark, F. B. & Kamii, C. (1996). Identification of Multiplicative Thinking in Children in Grades 1-5. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(1), 41-51. <https://doi.org/10.2307/749196>
- DiSessa, A. A., Gillespie, N. M. & Esterly, J. B. (2004). Coherence versus fragmentation in the development of the concept of force. *Cognitive science*, 28(6), 843-900.
- Duval, R. (2006, 2006/02/01). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1), 103-131. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Götze, D. (2019). Schriftliches Erklären operativer Muster fördern. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 40(1), 95-121. <https://doi.org/10.1007/s13138-018-00138-4>
- Götze, D. & Baiker, A. (2020, 2021/05/01). Language-responsive support for multiplicative thinking as unitizing: results of an intervention study in the second grade. *ZDM – Mathematics Education*, 53(2), 263-275. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01206-1>
- Häsel-Weide, U. (2016). *Vom Zählen zum Rechnen: struktur-fokussierende Deutungen in kooperativen Lernumgebungen*. Springer-Verlag.
- Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Hrsg.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. (S. 1-27). Lawrence Erlbaum Associates.
- Hiebert, J. & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 65-97). Macmillan Publishing Company.
- Huinker, D. (1993). Interviews: A window to students' conceptual knowledge of the operations. *Assessment in the mathematics classroom*, 80-86.
- KMK. (2022). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4): Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004, i.d.F. vom 23.06.2022*.
- Kuhnke, K. (2013). *Vorgehensweisen von Grundschulkindern beim Darstellungswechsel : Eine Untersuchung am Beispiel der Multiplikation im 2. Schuljahr*. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-658-01509-1>
- Lamon, S. J. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. In G. Harel & J. Confrey (Hrsg.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (S. 89-120). State University of New York Press.
- Lorenz, J. H. (1991). Materialhandlungen und Aufmerksamkeitsfokussierung zum Aufbau interner arithmetischer Vorstellungsbilder. In J. H. Lorenz (Hrsg.), *Störungen beim Mathematiklernen* (S. 53-73). Aulis Köln.

- Mayring, P. & Fenzl, T. (2014). Qualitative Inhaltsanalyse. In N. Baur & J. Blasius (Hrsg.), *Handbuch Methoden der empirischen Sozialforschung* (S. 543-556). Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-531-18939-0_38
- Padberg, F. & Benz, C. (2021). *Didaktik der Arithmetik: fundiert, vielseitig, praxisnah*. Springer Spektrum.
- Piaget, J. (2016). *Meine Theorie der geistigen Entwicklung* (H. Kober, Trans.; R. Fatke, Hrsg.). Beltz. (1970)
- Prediger, S. & Wessel, L. (2013). Fostering German-language learners' constructions of meanings for fractions—design and effects of a language- and mathematics-integrated intervention. *Mathematics Education Research Journal*, 25(3), 435-456.
- Rechtsteiner-Merz, C. (2014). *Flexibles Rechnen und Zahlenblickschulung: Entwicklung und Förderung von Rechenkompetenzen bei Erstklässlern, die Schwierigkeiten beim Rechnenlernen zeigen*. Waxmann.
- Rittle-Johnson, B. & Schneider, M. (2015). Developing Conceptual and Procedural Knowledge of Mathematics. In R. Cohen Kadosh & A. Dowker (Eds.), *The Oxford Handbook of Numerical Cognition* (S. 0). Oxford University Press. <https://doi.org/10.1093/oxfordhb/9780199642342.013.014>
- Royar, T. (2013). *Handlung – Vorstellung – Formalisierung Entwicklung und Evaluation einer Aufgabenreihe zur Überprüfung des Operationsverständnisses für Regel- und Förderklassen*. Kovač.
- Schulz, A. & Wartha, S. (2021). Multiplikation und Division. In *Zahlen und Operationen am Übergang Primar-/Sekundarstufe* (S. 127-192). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-62096-0_5
- Steffe, L. P. (1994). Children's multiplying schemes. In G. Harel & J. Confrey (Hrsg.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (S. 3-39). State University of New York Press.
- Transchel, S. (2020). *Gemeinsames Lernen multiplikativer Zusammenhänge: Struktur-fokussierende Deutungen bei Kindern mit Schwierigkeiten im Fach Mathematik*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-29237-9>
- vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Spektrum Akad. Verl.
- vom Hofe, R. (2014). Primäre und sekundäre Grundvorstellungen. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 1267–1270). WTM.
- Weigand, H.-G. & Ruwisch, S. (2023). Begriffe bilden. In R. Bruder, A. Büchter, H. Gasteiger, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (Vol. 2, S. 281-311). Springer Spektrum.
- Wessel, L. (2015). Fach- und sprachintegrierte Förderung durch Darstellungsvernetzung und Scaffolding: Ein Entwicklungsforschungsprojekt zum Anteilbegriff. *Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts*. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-07063-2>

Individuelle Unterstützung von Primarschulkindern beim Lösen von Zahlenmaueraufgaben mithilfe eines intelligenten Tutors

*Im vorliegenden Entwicklungsprojekt bearbeiteten Schüler*innen der 2. Primarklasse im Rahmen eines leitfadengestützten Interviews Zahlenmaueraufgaben in einem intelligenten Tutorsystem und wurden gebeten, Rückmeldungen zum Tutor zu geben. Es wurde untersucht, ob die Nutzendenoberfläche, die Rückmeldungen, Hilfestellungen und Symbole umfasste, von den Schüler*innen in der intendierten Weise interpretiert und bedient werden konnte.*

1. Intelligente Tutorsysteme

Intelligente Tutorsysteme (ITS) erlauben es den Schüler*innen beim Lösen von Aufgaben ihren eigenen Weg zu verfolgen (Aleven et al., 2016) und zu jedem Zeitpunkt des individuellen Lösungsprozesses Hilfe einzufordern, wenn sie allein nicht mehr weiterkommen (VanLehn, 2006). Die angebotene Hilfestellung ist dabei jeweils von den bisherigen Lösungsschritten abhängig. Während die Kinder die Hilfe bei Schwierigkeiten selbst aktiv aufrufen müssen, greift das System bei Fehlern von sich aus ein, indem es einerseits inkorrekte Eingaben markiert und andererseits eine entsprechende Rückmeldung gibt. ITS wurden für unterschiedliche Fächer entwickelt, wobei ein Schwerpunkt auf der Mathematik liegt (Fancsali et al., 2021; Long & Aleven, 2017; Nagashima et al., 2022; Sklavakis & Refanidis, 2013). Untersuchungen zur Wirksamkeit des Einsatzes von ITS hinsichtlich des Kompetenzaufbaus wurden bislang allerdings primär in der Sekundar- und der Tertiärstufe durchgeführt (Olsen et al., 2017), weshalb das im Folgenden vorgestellte Projekt den Fokus auf die Primarstufe richtete.

Konkret wird im vorliegenden Beitrag die Entwicklung einer Nutzendenoberfläche für einen intelligenten Zahlenmauertutor vorgestellt. Der Tutor soll Kinder der 1. und 2. Klasse unterstützen, die einerseits Schwierigkeiten mit den Grundoperationen haben und andererseits noch nicht genügend gut lesen können, um schriftliche Hilfestellungen verstehen zu können. Zahlenmauern sind im gesamten deutschsprachigen Raum ein im Mathematikunterricht etabliertes Aufgabenformat (Brandenberg et al., 2016; Wittmann & Müller, 2017). Ihr größtes Potenzial liegt im Bereich explorativer Aufgaben. Sie eignen sich zudem für das Trainieren von Fertigkeiten in den Grundoperationen Addition und Subtraktion (Spiegel & Selter, 2003) und somit für den Einsatz im Anfangsunterricht. Die Konzeption des Tutors, zu dessen Designelementen im vorliegenden Projekt Rückmeldungen von Schüler*innen eingeholt werden sollten, wird nachfolgend im Detail erläutert.

2. Entwicklung eines intelligenten Zahlenmauertutors

Die Entwicklung des vorzustellenden ITS basierte auf Vorarbeiten aus einem vorausgehenden Teilprojekt, in dessen Rahmen Mathematikdidaktikexpert*innen videografiert worden waren, als sie Schüler*innen der 1. und 2. Klasse kinder- und zielstufengerecht das Lösen von Zahlenmaueraufgaben erklärten (Schmalfeldt & Aleven, 2023). Die Aufgaben mussten auf Papier gelöst werden, weshalb die Expert*innen für ihre Erläuterungen verschiedenfarbige Stifte und Leuchtmarker nutzen konnten. Der Fokus der darauffolgenden Videoanalyse lag darauf, welche Begriffe und Sprachbausteine die Expert*innen verwendet hatten, damit diese linguistischen Elemente bei der Entwicklung des Zahlenmauertutors für die Formulierung von Hinweisen und Rückmeldungen als Referenz herangezogen werden konnten. Bei der Analyse stellte sich heraus, dass die Expert*innen während des Erklärens einerseits Bereiche der Zahlenmauern durch Einkreisen markiert und andererseits während des Erklärens mit den Fingern oder einem Stift auf etwas gezeigt hatten.

Im Kontext des nachfolgend vorgestellten Teilprojekts sollte auf dieser Grundlage der Frage nachgegangen werden, wie diese grafisch und gestisch unterstützten Erklärungen bestmöglich im Tutor implementiert werden konnten. Diesbezüglich galt es zu beachten, dass eine Herausforderung bei der Entwicklung von ITSs für den Eingangsmathematikunterricht darin besteht, dass die Lesekompetenzen der Kinder oft noch nicht ausreichen, um schriftliche Rückmeldungen verstehen zu können. Deshalb muss mit gezielt abspielbaren audiovisuellen Instruktionen und Hilfestellungen gearbeitet werden. Dies erforderte ein Redesign der bislang verfügbaren ITSs, die hauptsächlich für Schüler*innen und Themen ab der Sekundarstufe I entwickelt wurden. Unter anderem musste die Oberfläche entsprechend gestaltet sein, damit sich die Kinder möglichst ohne zusätzliche Erklärungen zurechtfinden können.

Unter Berücksichtigung dieser zentralen Aspekte wurden die folgenden Designentscheidungen für die Gestaltung der Oberfläche, auf die Zielgruppe ausgerichtet, getroffen (siehe Abbildung 1):

- Außer dem Titel gibt es keinen geschriebenen Text.
- Korrekte Eingaben in den Zahlenfeldern werden grün gekennzeichnet, falsche Antworten rot.
- Zu jeder Aufgabe stehen drei gestufte Hilfestellungen zur Verfügung, die gesprochen werden. Die Buttons für die Hilfestellungen sind durch Glühbirnen erkennbar, die mit einer Zahl von 1 bis 3 versehen sind. Zu Beginn ist nur der erste Tipp aktiv (gelb hinterlegt): erst nach dem Abspielen eines Tipps wird der jeweils nächste Tipp freigeschaltet (grau zu gelb).
- Wenn in einem gesprochenen Tipp ein Bereich der Zahlenmauer genannt wird (in Abbildung 1 z. B. „der mittlere und der rechte Basisstein“), wird der Bereich während dieser Zeitspanne gelb markiert.

- Wenn eine Aufgabe fertig gelöst wurde, kann dies durch Klicken auf die grün hinterlegte Zielflagge eingegeben werden. Dieser Button ist immer aktiv.

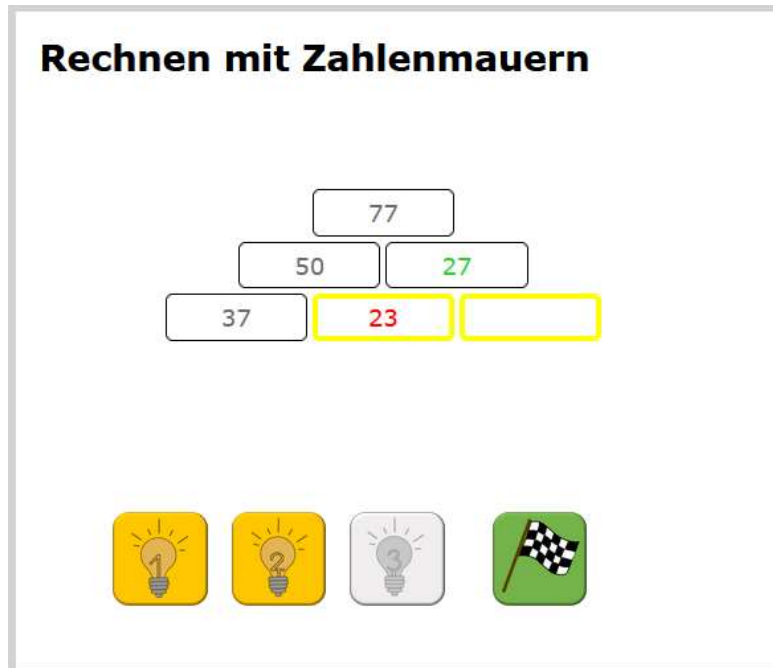


Abbildung 1: Nutzendenoberfläche des Zahlenmauertutors während des Bearbeitungsprozesses

Die im Audioformat abrufbaren Tipps werden mittels Sprachsynthese generiert. Auf diese Weise können beispielsweise die Zahleingaben der Schüler*innen im Erklärtext wiedergegeben werden. Des Weiteren kann ein bereits konsultierter Tipp durch erneutes Klicken des Buttons mehrmals abgespielt werden. Das Einblenden und das Ausblenden der Kennzeichnungen (beispielsweise der gelben Umrandungen) wurden mittels Markups im Erklärtext programmiert. Dadurch kann das Hervorheben wortgenau gesteuert werden.

Ein wichtiges Element bei der Konzeption war die Wahl der Icons. Innerhalb des Autor*innenteams wurden deshalb verschiedene Ideen gesammelt und diskutiert. Die Wahl fiel schließlich auf die in Abbildung 1 dargestellten Icons. Mit Blick auf die Evaluation des Tutors wurden jedoch noch weitere Icons ausgearbeitet (Abbildung 3), damit diese mit den am Projekt beteiligten Schüler*innen diskutiert werden konnten. Im nächsten Abschnitt werden die Teilnehmenden wie auch das Forschungsdesign näher beschrieben.

3. Methode

Ein Ziel der Untersuchung war die Gewinnung von Schüler*innenrückmeldungen zum neu konzipierten ITS, wozu ein qualitatives Verfahren eingesetzt wurde. Ein quantitativer Zugang schien bei der Zielgruppe angesichts der in Abschnitt 1 erläuterten Herausforderungen bei der Bedienung eines ITS nicht zielführend zu sein (Akremi, 2014; Döring & Bortz, 2016).

3.1 Teilnehmende

Um bei der Zielgruppe Einschätzungen zum Design der Nutzendenoberfläche und zu den Funktionen des ITS einzuholen, wurden mit sechs Schülerinnen und sechs Schülern der 2. Primarklasse videografierte Interviews durchgeführt. Die Kinder waren zwischen sieben und acht Jahre alt und stammten aus einer ländlich und einer städtisch geprägten Schweizer Gemeinde. Eine Einverständniserklärung seitens der Erziehungsberechtigten musste zum Zeitpunkt der Erhebung unterzeichnet vorliegen. Nach der Befragung lagen 12 auf Video aufgezeichnete Interviews vor. Das Vorgehen bei der Durchführung der Datenerhebung wird nachfolgend erläutert.

3.2 Leitfadengestütztes Interview

Die Befragung wurde mittels leitfadengestützter Interviews durchgeführt. Zusätzlich zu den grundsätzlichen Herausforderungen beim Einsatz von Interviews wie dem Vermeiden von Suggestivfragen (Roos & Leutwyler, 2017) gibt es weitere Aspekte, die bei Kindern spezifisch zu beachten sind. So besteht die Gefahr, dass die kindlichen Kompetenzen und Fähigkeiten als Folge einer erwachsenenzentrierten Sichtweise vorwiegend als defizitär wahrgenommen werden (Hartnack, 2019). Zudem muss die Klärung des Gesprächsrahmens zu Beginn des Interviews aufgrund der anzunehmenden fehlenden Erfahrung mit Befragungssituationen besonders sorgfältig gestaltet werden. Die im Interview sodann gestellten Fragen sollten kurz, verständlich und mit möglichst wenig Fremd- und Fachwörter formuliert werden. Bei der Aufrechterhaltung eines Gesprächs mit Sieben- bis Achtjährigen nimmt das Nachfragen eine wichtige Funktion ein. Visuelle Reize sollten zurückhaltend eingesetzt werden, da diese zwar das Gespräch auflockern können, jedoch auch die Gefahr einer übermäßigen Ablenkung bergen. Des Weiteren sollte ein Interview mit dieser Zielgruppe in Anbetracht ihrer Aufmerksamkeitsspanne lediglich 10–20 Minuten dauern (Vogl, 2021). Da die Kinder im Interview als Expert*innen fungieren, sollten sie unter anderem durch einen freundlichen, unterstützenden, ermutigenden und geduldischen Umgang in dieser Rolle gestärkt werden (Wehr, 2014). Mit Blick auf das Setting der Befragungssituation sollte unter anderem auf eine störungsfreie Umgebung geachtet werden, die den Kindern bereits vertraut ist. Aus diesem Grund wurden die Interviews in der vorliegenden Untersuchung während der Unterrichtszeit in einem separaten Raum im Schulhaus durchgeführt (Vogl, 2021).

Hartnack (2019) zufolge sind diese Aspekte bedeutsamer als der Aufbau des Interviews. Gleichwohl sollten die Befragungen einer klar festgelegten Struktur folgen, damit die Antworten systematisch ausgewertet und verglichen werden konnten. Zu diesem Zweck wurde ein Interviewleitfaden erstellt, der einen Einstieg, die beiden Themenbereiche „Nutzendenoberfläche“ und „Symbole“ sowie einen Ausklang umfasste. Im Einstieg wurde den Schüler*innen einerseits der Gesprächsrahmen erklärt und andererseits wurden sie durch eine Aktivierungsübung in das Thema „Zahlenmauern“ eingeführt. Bevor die Kinder mit dem zu evaluierenden

ITS arbeiten konnten, hatten sie eine Zahlenmaueraufgabe auf Papier zu lösen. Bei dieser vorbereitenden Aufgabe erhielten die Kinder eine leere Zahlenmauer (nach Wahl mit drei oder vier Basissteinen), füllten frei wählbare Startzahlen aus und ergänzten anschließend die übrigen Steine der Mauer. Während des Ausfüllens wurden die Kinder dazu aufgefordert, ihre Gedanken zu artikulieren. Der Aufgabentyp „Zahlenmauer“ war den Schüler*innen aus dem eigenen Unterricht bereits bekannt. Neu hingegen war die Bearbeitung solcher Aufgaben am Computer.

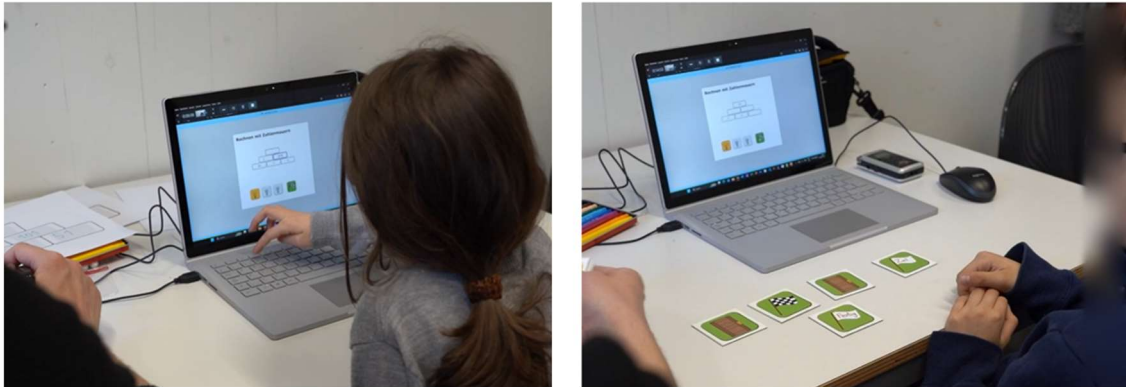


Abbildung 2: Evaluation der Arbeit mit dem Tutor (links) und der Wahl der Icons (rechts)

Im darauffolgenden Hauptteil des Interviews wurden den Kindern zum Themenbereich „Nutzendenoberfläche“ Fragen bezüglich der Usability sowie zur Gestaltung und zur Interaktion mit der Nutzendenoberfläche des ITSs gestellt. In dieser Phase arbeiteten die Kinder mit dem intelligenten Zahlenmauertutor (siehe Abbildung 2 links). In den meisten Fällen wurden sie von den Interviewenden dahingehend instruiert, dass sie vor dem Eingeben einer Zahl zuerst in ein Zahlenfeld zu klicken hatten und nach der letzten Zahl die Entertaste drücken sollten. Teilweise wurden diese Instruktionen im Verlauf der ersten oder zweiten Aufgabe wiederholt. Nachdem die Schüler*innen die Aufgaben bearbeitet und diesbezügliche Fragen beantwortet hatten, wurden ihnen im Zusammenhang mit dem Themenbereich „Symbole“ Bildkarten vorgelegt (siehe Abbildung 2 rechts). Auf diesen Karten waren jeweils verschiedene Symbole für die Buttons „Tipps“ und „Fertig“ abgebildet (siehe Abbildung 3). Die Kinder wählten jeweils eine der Bildkarten und wurden aufgefordert, ihre Wahl zu begründen.



Abbildung 3: Symbolauswahl für Schüler*innen

Im Ausklang wurde abschließend ein generelles Feedback zum Videointerview eingeholt, wonach das Gespräch mit einem Dank für die Teilnahme beendet wurde.

3.3 Datenauswertung

Die Verschriftlichung der audiovisuellen Daten erfolgte in Form einer erweiterten Transkription nach Dresing und Pehl (2018). Diese Form von inhaltlicher-semantischer Transkription ist sehr detailliert. So wurden zum Beispiel Gesprächspartikel und Fülllaute („hm, ja, aha, ähm“ etc.) aller Personen transkribiert. Dadurch konnten auch spontane Reaktionen der Kinder auf die Funktionalitäten oder Outputs des Programms erfasst werden, wie dies im nachfolgenden Auszug aus dem Interview mit Schülerin A4 ersichtlich wird:

B: (Klickt auf Bildschirm) Hä? (Schaut genau auf Bildschirm) (..) (Beginnt zu tippen und zu rechnen) (...) #00:03:51#

I: Genau (B ist fertig mit Aufgabe), jetzt darfst du auf Enter drücken, auf diese Taste (zeigt Enter). Genau. Fällt dir nun etwas auf? Hat sich etwas verändert? #00:04:32#

B: Hmm (überlegt) (..) Nein. #00:04:42#

Nach der Transkription wurden die Gespräche mithilfe von MAXQDA mit einheitlich gesetzten Zeitmarken versehen und in einer teaminternen Projektdatei verwaltet (Kuckartz & Rädiker, 2019).

Für die darauffolgende Analyse der Transkripte wurde ein Kodierleitfaden entwickelt. Die Kategorienbildung erfolgte zunächst deduktiv anhand der drei Hauptka-

tegorien des Interviewleitfadens. Diese Basiskategorien wurden nach der Kodierung von drei Interviews in einer Kodierkonferenz induktiv erweitert (Mayring, 2022). In der finalen Version umfasste das Kategoriensystem die folgenden sechs Hauptkategorien, anhand deren anschließend sämtliche Interviews kodiert wurden:

- Bedienung des Programms,
- Aussagen zur Nutzung,
- Wahl der Icons,
- Interpretation der Icons,
- Einsatz des Tutors und
- Aussagen zu Hilfestellungen.

Nach der vollständigen Kodierung aller 12 Transkripte wurden die Interviews in Berichtsform zusammengefasst.

4. Resultate

In den folgenden Abschnitten werden die Ergebnisse aus der Videoanalyse zur Interaktion mit dem ITS und der Auswertung der Interviews in drei Themensträngen verdichtet.

4.1 Nutzendenoberfläche und Rückmeldungen

Die Nutzendenoberfläche ist zentraler Bestandteil eines ITSs. Die Schüler*innen wurden daher zu Beginn des Interviews aufgefordert, darzulegen, welche Elemente des Tutors sie erkennen und welche Funktionalität sie diesen zuschreiben würden. Wie die Antworten zeigten, verbanden die Kinder mit dem Glühbirnen-symbol unterschiedliche Bedeutungen wie beispielsweise den Schwierigkeitsgrad oder die Kennzeichnung der Klassenstufe. Die Zielflagge hingegen wurde von den meisten Kindern korrekt interpretiert: Man ist mit dem Lösen der Aufgabe fertig. Die Kinder bekamen von den Interviewenden zu diesem Zeitpunkt noch keine Rückmeldung bezüglich ihrer Vermutungen über die Funktion der Buttons. Nach dieser Einstiegssequenz arbeiteten die Schüler*innen mehrheitlich selbstständig mit dem ITS.

Das Symbol der Glühbirne wurde von den Schüler*innen selten aus eigener Initiative angeklickt. Vielmehr waren es mehrheitlich die Interviewenden, die im Verlauf des Gesprächs dazu aufforderten, die Glühbirne durch Anklicken auszuprobieren. Deutlich weniger Instruktionen erforderte im Gegensatz dazu das Symbol der Zielflagge. Da die Schüler*innen größtenteils selbst auf die Fahne geklickt hatten, war am Ende der ersten Aufgabe nur in wenigen Fällen ein kurzer Hinweis nötig.

Die meisten Reaktionen und Interaktionen wurden durch die Bedienung des Programms ausgelöst. Zu nennen ist diesbezüglich insbesondere die, je nach eingetragener Zahl, farbig angezeigte Rückmeldung. Auf eine rote Rückmeldung, die eine falsche Eingabe kennzeichnete, folgten meist ein eher zögerliches Verhalten und das Löschen der eingegebenen Antwort, wie dies im folgenden Beispiel von B2 der Fall war: „(tippt eine 5 in das Feld, Antwort wird rot) (löscht die 5 und blickt zu I).“ Obwohl sich die Interviewenden bei falsch gelösten Aufgaben mit Instruktionen oder dem Erteilen von Hilfestellungen zurückhielten, erkannten die Schüler*innen ihre Fehler meist durch die farbliche Rückmeldung selbst und gaben auf Nachfragen der Interviewenden auch Auskunft dazu. Bei grünen Zahlen und somit korrekten Antworten brachten viele Kinder ihre Freude durch Lachen, Grinsen oder Nicken zum Ausdruck.

4.2 Hilfestellungen

Es ist vorgekommen, dass die Schüler*innen während der Aufgabenbearbeitung selbstständig einen Tipp anwählten, interpretierten und anschließend umsetzten. Es konnte allerdings nicht abschließend geklärt werden, welches der entscheidende Hinweis für das korrekte Lösen der Aufgabe gewesen war. Der erste Tipp beispielsweise gab an, wie man den nächsten Schritt angeht: „Wenn man die Zahlen von zwei benachbarten Steinen [Anm.: im Tutor gelb markiert] zusammenzählt, erhält man die Zahl im darüberliegenden Stein [Anm.: im Tutor blau markiert].“ (vgl. Abbildung 4) Die Schüler*innen bejahten mehrheitlich, dass die gehörten Tipps resp. die Hilfestellungen des ITS einen Mehrwert für das Lösen der Aufgaben generiert hatten. Der jeweils dritte und letzte Tipp der gestuften Hilfestellungen eines Lösungsschritts hatte bei einigen Kindern allerdings Verwunderung ausgelöst. So hielt ein Kind fest, dass dieser durch die Nennung der Lösung am hilfreichsten gewesen sei. Bei mehreren Kindern konnte zudem beobachtet werden, dass die Stimme des Tutors und auch die Inhalte der Tipps für Erstaunen sorgten. Ein Kind äußerte sich nach dem ersten Tipp folgendermaßen: „(Schaut zu I) Ich bin jetzt gerade etwas überrascht worden. (I lacht, B erfreut und grinst) Weil, es ist viel moderner als früher“ (Kind A1). Einige der Schüler*innen konnten jedoch nichts mit den erhaltenen Tipps anfangen. Ob dies auf das Akustische oder die inhaltliche Qualität des Tipps in den einzelnen Situationen zurückzuführen war, konnten sie nicht sagen. Ein Kind bejahte zwar die Nützlichkeit des Tipps, gab danach jedoch erneut eine falsche Zahl in das entsprechende Feld ein.

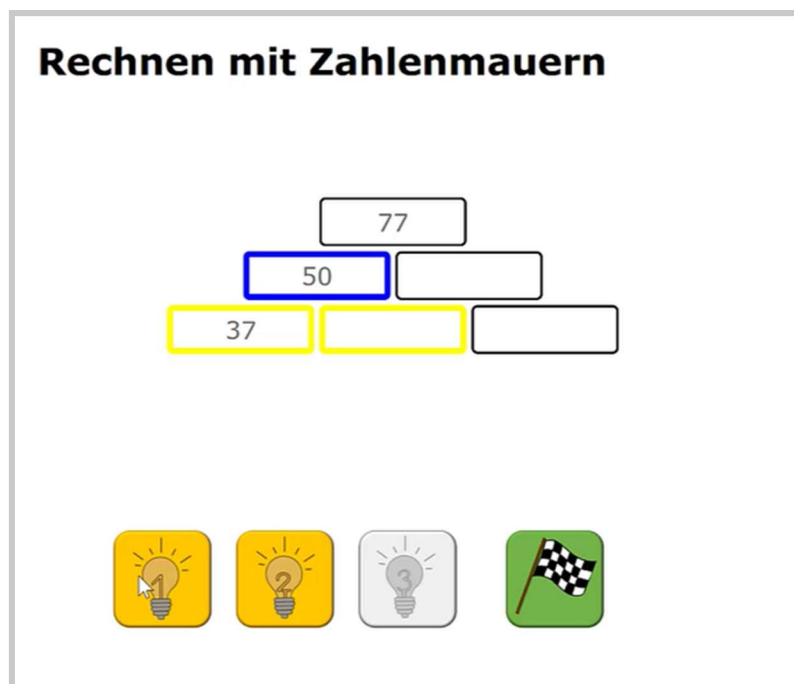


Abbildung 4: Bildschirmfoto der Nutzendenoberfläche mit farblichen Markierungen zur Unterstützung des gesprochenen Tipp 1

4.3 Einsatz des ITS

Am Ende des Interviews wurden die befragten Schüler*innen um ihr generelles Feedback zum ITS gebeten. Drei Kinder gaben Auskunft dazu, wo sie einen Vorteil des Tutors gegenüber dem für sie bekannten Unterricht sehen: „[...] wenn man nicht weiterweiß, dann kann man zum einen (meint Tipp) zuhören gehen“ (Kind B6). Viele gaben bei dieser Gelegenheit an, dass sie im Unterricht gern mit dem Zahlenmauertutor arbeiten würden und die Arbeit am Computer dem Lösen der Aufgaben auf Papier vorzögen. Einige der Befragten begründeten diese Präferenz mit den implementierten Hilfestellungen. Ein Kind äußerte sich beispielsweise folgendermaßen zu diesem Aspekt: „Weil es/ es ist zum Kindern helfen, dann muss man nicht immer zum Lehrer gehen und es hat eine ganze Reihe (zeigt mit den Armen eine Reihe), das, also mit dem finde ich es eine sehr gute Idee - muss ich schon sagen“ (Kind A1). Einzelne Kinder nannten auch Gründe wie den Entertainmentfaktor des iPads. Ein weiteres Kind erwähnte, das Programm sei moderner und gut für die Umwelt, da die Aufgaben nicht auf Papier ausgedruckt werden müssten.

Andere Schüler*innen brachten aber auch Kritik am Einsatz eines ITSs an. Die negativen Kommentare bezogen sich hauptsächlich auf die Bedienung des Programms. So nannte ein Kind (B6) beispielsweise den folgenden Kritikpunkt: „Beim Papier kann man selber schreiben und beim Computer muss man es eintippen.“ Weiter äußerte es sich wie folgt: „Da (meint Papier) kann ich es noch ausradieren“ (Kind B6).

5. Diskussion

Die im vorhergehenden Abschnitt festgehaltenen Beobachtungen und Rückmeldungen werden nachfolgend mit Blick auf die gleichen drei thematischen Schwerpunkte wie in Kapitel 4 (Nutzendenoberfläche und Rückmeldungen, Hilfestellungen und Einsatz des ITS) interpretiert und diskutiert.

5.1 Nutzendenoberfläche und Rückmeldungen

Die Reaktionen der Schüler*innen auf die farbig angezeigten Rückmeldungen lassen darauf schließen, dass die implementierten Rückmeldungen grundsätzlich intuitiv sein dürften. Das zu diesem Zweck gewählte Farbschema scheint bekannt und etabliert zu sein, das heißt, Rot wurde mit „Falsch“ verbunden, während Grün mit „Richtig“ assoziiert wurde.

Aus der Beobachtung, dass die durch eine Glühbirne symbolisierten Tipps von den Schüler*innen kaum selbst angeklickt wurden, lassen sich verschiedene Schlüsse ziehen. Einen möglichen Interpretationsansatz böte die Hypothese, dass sich die Kinder hinsichtlich der Funktion der Buttons im Unklaren waren. Zugleich ist es aber auch denkbar, dass viele Schüler*innen keine Hilfe benötigten, diese nicht in Anspruch nehmen wollten oder sich nicht trauten, die Symbole anzuklicken.

Im Vergleich zur Glühbirne waren bei der Zielflagge weniger Instruktionen seitens der Interviewenden erforderlich. Auch dies könnte verschiedene Gründe haben. Ein bereits im Design des Tutors angelegter Hauptgrund dürfte darin bestehen, dass es sich bei der Zielflagge im Gegensatz zur Glühbirne um ein Symbol handelte, das zwingend angeklickt werden musste, um weiterzukommen. Ob sich die Beobachtung auch so interpretieren ließe, dass die symbolische Bedeutung der Flagge für die Schüler*innen intuitiv einfacher erschließbar war als diejenige der Glühbirne, kann auf der Grundlage der vorliegenden Daten nicht eindeutig geklärt werden. Die häufigen Instruktionen der Interviewenden bezüglich des Anklickens eines Zahlenfelds oder der Entertaste wiederum könnten darauf hinweisen, dass die Bedienung des Programms in diesen beiden Punkten für die Zielstufe noch nicht intuitiv genug ist.

5.2 Hilfestellungen

Die Schüler*innen wirkten bei der Arbeit mit dem Zahlenmauertutor engagiert und zeigten emotionale Reaktionen wie Verwunderung oder Freude, wenn sie eine Rückmeldung des Tutors erhalten hatten. Das durch eine Glühbirne symbolisierte Element „Tipp“ wurde von den Schüler*innen, wie bereits im vorhergehenden Abschnitt festgehalten, allerdings eher zurückhaltend genutzt. In diesem Zusammenhang konnte beobachtet werden, dass die Kinder zwar meist emotional auf das Gehörte reagierten, es jedoch teilweise nicht vollständig umsetzten. Mögliche Gründe dafür könnten das akustische oder semantische Nichtverstehen im ersten Durchlauf, das Erstaunen über die „sprechende“ Hilfestellung oder die Länge des Tipps, das heißt, die Sprechdauer, gewesen sein. Zudem ist es denkbar, dass diese

Form von Tutoring für Schüler*innen der 2. Klasse ungewohnt resp. noch unbekannt ist. Obwohl diese Vermutungen mögliche Erklärungsansätze liefern könnten, bleibt festzuhalten, dass nicht abschließend geklärt werden konnte, weshalb nur wenige Schüler*innen die Hilfestellungen nicht selbstständig genutzt resp. warum sie die erhaltenen Tipps nicht angenommen oder berücksichtigt hatten.

5.3 Einsatz des ITS

Eine Interpretation zu der überwiegend geäußerten Bevorzugung des ITS gegenüber Zahlenmaueraufgaben auf Papier könnten die automatischen, farbig angezeigten Rückmeldungen sein. Diese Art von Feedback könnte sich positiv auf die Motivation auswirken, da sie unmittelbar auf die Eingabe folgt. Dies würde es den Schüler*innen unter anderem ermöglichen, zügig vorwärtszukommen, da sie nicht auf eine Rückmeldung einer außenstehenden Person angewiesen sind. Außerdem ist es möglich, dass Fehler dank der umgehenden Rückmeldung von den Schüler*innen selbst erkannt und anschließend eventuell sogar selbst korrigiert werden können. Ein weiterer möglicher Grund für das Präferieren des Programms gegenüber den Aufgaben auf Papier könnte das eingebaute Hilfesystem sein. Dieses System könnte die Selbstständigkeit der Schüler*innen durch die Vermeidung von Wartezeiten fördern.

6. Fazit

Zusammenfassend äußerte sich die Mehrheit der Schüler*innen positiv zur Bedienung und zur Nutzung des Zahlenmauertutors. Im Rahmen der vorliegenden Evaluation hat sich jedoch gezeigt, dass vor einem Einsatz des Zahlenmauertutors im Mathematikunterricht noch einige Aspekte optimiert werden könnten. So sollten unter anderem die Bedienung und die Nutzendenoberfläche des Tutors noch intuitiver gestaltet werden, als dies in der aktuellen Version der Fall ist. Die Schüler*innen sollten das Programm ohne individuelle Unterstützung von Lehrpersonen verstehen und bedienen können. Eine Alternative dazu könnte ein zielstufengerecht-konzipiertes Tutorial sein, in dem die Bedienung, beispielweise das Drücken der Entertaste, eingeführt wird. Was die Symbole anbelangt, so ergab die Befragung der Schüler*innen mit den Symbolkarten, dass die Zielflagge auf positive Resonanz gestoßen ist und das Zielflaggensymbol für den intendierten Einsatzzweck somit geeignet zu sein scheint. Das Symbol der Glühbirne fiel positiv hinsichtlich seiner Gestaltung auf, benötigte jedoch oftmals eine Erläuterung zur zugewiesenen Funktion. Auch die implementierten farbig angezeigten Rückmeldungen waren bereits korrekt interpretiert worden. Um auch Kindern mit einer Rot-grün-Schwäche gerecht zu werden und dadurch die Barrierefreiheit zu erhöhen, könnten die bunten Rückmeldungen mit äquivalenten Symbolen ergänzt werden.

Ein weiterer Aspekt, der vor einem regulären Einsatz des ITS noch optimiert werden müsste, ist das Berücksichtigen weiterer Rechenwege. Dies ist insbesondere deshalb erforderlich, weil der Tutor im derzeitigen Entwicklungsstand in den im-

plementierten Hilfestellungen noch Lösungswege vorschlägt, die nicht den tatsächlichen Rechenstrategien der Schüler*innen entsprechen. Daher müssen vor- gängig noch Aufgaben implementiert werden, anhand welcher das System die in- dividuellen Strategien der Kinder erkennen kann.

Zusammenfassend lässt sich somit festhalten, dass sowohl die positiven Rückmel- dungen der Schüler*innen als auch die Ergebnisse der Videoanalysen das Poten- zial des Zahlenmauertutors aufzeigen und konkrete Hinweise für dessen Weiter- entwicklung liefern können.

Literatur:

- Akremit, L. (2014). Stichprobenziehung in der qualitativen Sozialforschung. In N. Baur & J. Blasius (Hrsg.), *Handbuch Methoden der empirischen Sozialforschung* (S. 265–282). Springer VS.
- Aleven, V., McLaren, B. M., Sewall, J., van Velsen, M., Popescu, O., Demi, S., Ringen- berg, M. & Koedinger, K. R. (2016). Example-tracing tutors: Intelligent tutor devel- opment for non-programmers. *International Journal of Artificial Intelligence in Edu- cation*, 26(1), 224–269. <https://doi.org/10.1007/s40593-015-0088-2>
- Brandenberg, M., von Grünigen Mota Campos, S., Keller, B., Keller, R., Müller, B. N., Schärli Wechsler, M. & Walser, M. (2016). *Mathematik I Primarstufe*. Lehrmittelver- lag Zürich.
- Döring, N. & Brotz, J. (2016). *Forschungsmethoden und Evaluation in den Sozial- und Humanwissenschaften*. Springer.
- Dresing, T. & Pehl, T. (Hrsg.) (2018). *Praxisbuch Transkription: Regelsysteme, Software und praktische Anleitungen für qualitative ForscherInnen* (8. Aufl.). Dr. Dresing und Pehl GmbH.
- Fancsali, S. E., Pavelko, M., Fisher, J., Wheeler, L. & Ritter, S. (2021). Scaffolds and nudges: A case study in learning engineering design improvements. In I. Roll, D. McNamara, S. Sosnovsky, R. Luckin & V. Dimitrova (Hrsg.), *Artificial intelligence in education. AIED 2021. Part II* (S. 441–445). Springer.
- Hartnack, F. (2019). Mit Kopf, Herz und Hand – Leibphänomenologische Forschung mit Kindern am Beispiel des Zweikämpfers im Sportunterricht. In F. Hartnack (Hrsg.), *Qualitative Forschung mit Kindern* (S. 381–402). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-24564-1_12
- Kuckartz, U. & Rädiker, S. (2019). *Analyzing qualitative data with MAXQDA*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-15671-8>
- Long, Y. & Aleven, V. (2017). Enhancing learning outcomes through self-regulated learning support with an open learner model. *User Modeling and User-Adapted Inter- action*, 27(1), 55–88. <https://doi.org/10.1007/s11257-016-9186-6>
- Mayring, P. (2022). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken* (13., überarb. Aufl.). Beltz.
- Nagashima, T., Britti, J., Wang, X., Zheng, B., Turri, V., Tseng, S. & Aleven, V. (2022). Designing Playful Intelligent Tutoring Software to Support Engaging and Effective Algebra Learning. In I. Hilliger, P. J. Muñoz-Merino, T. de Laet, A. Ortega-Arranz &

- T. Farrell (Hrsg.), *Lecture Notes in Computer Science. Educating for a New Future: Making Sense of Technology-Enhanced Learning Adoption* (Bd. 13450, S. 258–271). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-031-16290-9_19
- Olsen, J. K., Rummel, N. & Aleven, V. (2017). Learning alone or together? A combination can be best! In B. K. Smith, M. Borge, E. Mercier & K. Y. Lim (Hrsg.), *Making a difference: Prioritizing equity and access in CSCL. 12th International Conference on Computer Supported Collaborative Learning (CSCL) 2017, Volume 1* (S. 95–102). International Society of the Learning Sciences.
- Roos, M. & Leutwyler, B. (2017). *Wissenschaftliches Arbeiten im Lehramtsstudium. Recherchieren, schreiben, forschen* (2., überarb. Aufl.). Hogrefe
- Schmalfeldt, T. & Aleven, V. (2023). Individuelle Unterstützung beim Lösen von Zahlenmaueraufgaben mit Intelligent Tutoring Systems. In J. Hoth, S. Rollnik, S. Schnell & R. Vogel (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2022. 56. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* (S. 79–82). WTM.
- Sklavakis, D. & Refanidis, I. (2013). MATHESIS: An intelligent web-based algebra tutoring school. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, 22(4), 191–218.
- Spiegel, H. & Selter, C. (2003). *Kinder & Mathematik: Was Erwachsene wissen sollten. Wie Kinder lernen*. Kallmeyer.
- VanLehn, K. (2006). The behavior of tutoring systems. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, 16(3), 227–265.
- Vogl, S. (2021). Mit Kindern Interviews führen: Ein praxisorientierter Überblick. In I. Hedderich, J. Reppin & C. Butschi (Hrsg.), *Perspektiven auf Vielfalt in der frühen Kindheit. Mit Kindern Diversität erforschen* (S. 142–157). Klinkhardt. <https://doi.org/10.35468/5895-08>
- Wittmann, E. C., & Müller, G. N. (2017). *Das Zahlenbuch 1*. Klett.

Rebecca Schneider, Frederik Dilling, Kathrin Holten, Kevin Hörnberger & Ingo Witzke

Universität Siegen, schneider@mathematik.uni-siegen.de

Gelingensfaktoren digitaler Transformation im Mathematikunterricht – erste Ergebnisse einer explorativen Studie aus dem Projekt DigiMath4Edu

Im Modellprojekt DigiMath4Edu wird die Implementierung digitaler Medien und Werkzeuge in den Mathematikunterricht in Zusammenarbeit mit 15 Schulen aller Schulformen über drei Jahre organisatorisch und wissenschaftlich begleitet. Dabei wird der Frage nachgegangen, welche Faktoren sich beschreiben lassen, die die Einbindung digitaler Medien und Werkzeuge in den Mathematikunterricht fördern können und so zum Gelingen einer Implementierung in den regulären Mathematikunterricht beitragen. In diesem Beitrag werden erste Ergebnisse der explorativen Studie vorgestellt und diskutiert.

1. Projektidee und strukturelle Kernkomponenten

1.1 Grundidee

Die nachhaltige Implementierung digitaler Medien und Werkzeuge in den Mathematikunterricht stellt Schulen und Lehrkräfte vor anhaltende Herausforderungen. Curriculare Forderungen, eine stetig zunehmende Vielfalt und Verfügbarkeit digitaler Medien und Werkzeuge an den Schulen sowie zahlreiche Forschungsergebnisse zu Chancen für das Mathematiklernen durch ihren Einsatz erhöhen dabei die Erwartungshaltung an einen digital gestützten Mathematikunterricht. So heißt es zum Beispiel im Strategiepapier der Kultusministerkonferenz zur „Bildung in der digitalen Welt“, dass „Lehrkräfte digitale Medien in ihrem jeweiligen Fachunterricht professionell und didaktisch sinnvoll nutzen sowie gemäß dem Bildungs- und Erziehungsauftrag inhaltlich reflektieren können“ (KMK, 2016, S.25). Die Herausforderungen sind dabei auf unterschiedlichen Ebenen hoch. Organisatorische, technische sowie weitere professionsbezogene Faktoren der Lehrkräfte sind notwendig, um eine grundständige Implementierung digitaler Medien und Werkzeuge in den Mathematikunterricht zu ermöglichen. Die dem Projekt DigiMath4Edu zu Grunde liegende Modellstruktur ermöglicht es unter anderem, Hinweise auf die Frage zu erhalten, welche Faktoren sich dahingehend beschreiben lassen und inwiefern sich diese günstig auf eine langfristige Implementierung digitaler Medien und Werkzeuge in den Mathematikunterricht auswirken können.

Zur Gestaltung von Fortbildungsveranstaltungen und -strukturen für Lehrer:innen gibt es bereits vergleichsweise gut ausgearbeitete Forschungsergebnisse, welche Lipowsky und Rzejak (2017) zusammenfassen: Demnach regen erfolgreiche Fortbildungen zur Bildung professioneller Lerngemeinschaften an, lassen die Wirkung

des eigenen Handelns erleben, knüpfen an Befunde der Bildungsforschung an, ermöglichen Coaching und Feedback, sind fachlich orientiert, verschränken Input-, Erprobungs- und Reflexionsphase und finden mehr als nur einmalig statt.

Bei Fortbildungen handelt es sich allerdings nur um einen Aspekt gelingender digitaler Transformationsprozesse – eine allgemeinere Ebene wird in der mathematikdidaktischen Forschung bisher wenig in den Blick genommen. Erste Ergebnisse liefern Kafyulilo, Fisser und Voogt (2016) mit Bezug auf Baldwin und Ford (1988): Sie untersuchen Faktoren für die nachhaltige Implementationen von digitalen Medien in den Mathematik- und Naturwissenschaftsunterricht. Hierzu unterscheiden sie persönliche Faktoren (Beliefs, verfügbare Zeit, Motivation, Zugang), institutionelle Faktoren (Unterstützung in der Schule, Ausstattung), technologische Faktoren (Effektivität für Lernprozesse, Einfachheit der Bedienung) und schließlich das Fortbildungsprogramm.

Die Modellstruktur des Projekts DigiMath4Edu, auf das wir uns in diesem Artikel beziehen, unterliegt der Auffassung, dass die Unterstützung der Lehrkräfte in ihrem Unterricht vor Ort in den Schulen bei der (Weiter)entwicklung ihrer professionsbezogenen Kompetenzen ein wichtiger Faktor ist. Gleichzeitig ist sie Ausdruck der leitenden Forschungshypothese:

„Nachhaltige digitale Transformation gelingt im Bildungsbereich durch systematische, konkrete und wissenschaftlich fundierte Begleitung vor Ort.“

Aus dieser Annahme entspringt die Grundidee des Projekts: Mathematiklehrpersonen werden in einer wissenschaftlich begleiteten Fort- und Weiterbildungsstruktur sowie durch ein „training on the job“ in Bezug auf den Einsatz digitaler Medien und Werkzeuge anhand konkreter Einsatzszenarien, vor Ort an den Schulen sowie bei der Planung, Vorbereitung und Durchführung des eigenen Mathematikunterrichts unter Einsatz digitaler Medien und Werkzeuge durch geschultes Personal unterstützt. Im Rahmen der begleitenden wissenschaftlichen Untersuchung wird diese Projektstruktur hinsichtlich der Frage nach Gelingensfaktoren zur nachhaltigen Implementierung digitaler Medien und Werkzeuge in den Mathematikunterricht explorativ untersucht.

1.2 Strukturelle Kernkomponenten

Die Modellstruktur setzt sich aus fünf strukturellen Kernmerkmalen zusammen: 1. Unterrichtsassistent:innen, 2. Schulen, 3. Universität, 4. Ausstattung, 5. Unternehmen. Tabelle 1 gibt einen zusammenfassenden Überblick über die Kernkomponenten sowie ihre intendierten Funktionen.

A) Unterrichtsassistent:innen	B) Schulen	C) Universität	D) Ausstattung	E) Unternehmen
Ausbildung „Training on the Job“ Unterstützung in den Schulen	Lehrkräfte Schüler:innen Schulentwicklung Unterrichtsskizzen	Organisation Forschung Fortbildungsstruktur Begleitung und Beratung	Verfügbarkeit Nutzung Wartung	Kooperation Schülerworkshops Berufsorientierung

Tabelle 1: Übersicht über die strukturellen Kernkomponenten des Projekts DigiMath4Edu

A) Unterrichtsassistent:innen

Das Projekt bringt durch den Einsatz der Unterrichtsassistent:innen für Digitalisierung gezielt Lehramtsstudierende und praktizierende Lehrkräfte zusammen und schafft so eine Verbindung zwischen der ersten und dritten Phase der Lehrer:innenbildung. Die Unterrichtsassistent:innen sind ausgewählte und speziell ausgebildete Lehramtsstudierende höheren Semesters, die im Rahmen eines studentischen Arbeitsverhältnisses vor Ort in den Schulen eingesetzt werden. Pro Schule unterstützen jeweils zwei Unterrichtsassistent:innen die Lehrkräfte bei der Planung und Durchführung von Mathematikunterricht mit digitalen Medien und Werkzeugen. Die Betreuung der Unterrichtsassistent:innen erfolgt durch ein Team aus wissenschaftlich sowie schulpraktisch erfahrenen Mitarbeiter:innen der Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Siegen.

Dabei werden die Unterrichtsassistent:innen sowohl im technischen Umgang mit Medien und Werkzeugen als auch in den Möglichkeiten der didaktischen Einbettung geschult. Neben der Schulung im Einsatz grundständiger digitaler Medien wie z.B. dem Einsatz von Tablets oder ausgewählten Apps, werden auch innovative digitale Werkzeuge wie die 3D-Druck-Technologie, Augmented Reality (AR) oder Virtual Reality (VR) in die Ausbildung integriert. In Ihrem Einsatz in den Schulen stehen die Unterrichtsassistent:innen interessierten Lehrkräften zur Verfügung, um bei der Planung, Vorbereitung und Durchführung von Mathematikunterricht unter Einsatz digitaler Medien und Werkzeuge zu unterstützen. Während die Unterrichtsassistent:innen insbesondere über technische Fähigkeiten hinsichtlich der jeweiligen Medien und Werkzeuge verfügen, mögliche Einsatzszenarien kennen und durch ihr Studium regelmäßig mit aktuellen fachdidaktischen Fragestellungen konfrontiert werden, kommen durch die erfahrenen Lehrkräfte vor Ort wichtige unterrichtspraktische sowie umfangreiche fachdidaktische Erfahrungen hinzu. Neben der Unterstützung bei der Ideenfindung und Planung unterstützen die Unterrichtsassistent:innen auch während der Unterrichtsstunden sowie in der Nachbereitung.

B) Schulen

Für jeden der drei Zyklen werden im Anschluss an einen Bewerbungsprozess fünf Projektschulen ausgewählt. Die Projektteilnahme wird allen Schulformen gleichermaßen ermöglicht, sodass von einer Förderschule über Grundschulen, Sekundarschulen, Gesamtschulen bis hin zu Gymnasien viele verschiedene Schulformen beteiligt sind. Die Schulen liegen im urbanen sowie ländlichen Raum der Kreise Siegen-Wittgenstein und Olpe. An den Schulen werden jeweils zwei Mathematiklehrpersonen mit dem Projekt in der Koordination vor Ort betraut (Projektkoordinator:innen). Die Strukturen und Angebote des Projekts stehen dann allen Mathematiklehrpersonen der Projektschulen zur Verfügung. Von den Projektschulen werden in jedem Zyklus fünf Unterrichtsentwürfe schriftlich ausgearbeitet und dem universitären Projektteam zum Zweck der Forschungs- und Entwicklungsarbeit zur Verfügung gestellt. Dabei handelt es sich in der Regel um Unterrichtsstunden, die aus Sicht der Lehrkräfte besonders gelungen waren. Häufig handelt es sich dabei auch um solche Unterrichtsstunden, die von Unterrichtsassistent:innen begleitet wurden.

Die Schulen werden durch das Projekt umfangreich mit digitalen Medien und Werkzeugen ausgestattet, sodass ein Digitallabor eingerichtet werden kann. Die Universität wählt hierzu nach Rücksprache mit den Schulen digitalen Medien und Werkzeuge bedarfsgerecht aus. Die Ausstattung fällt entsprechend individuell aus und reicht von ausgewählten Apps über 3D-Druckgeräte bis hin zu VR-Brillen.

C) Universität

Organisatorisch und wissenschaftlich begleitet wird das Projekt durch die Fachgruppe für Didaktik der Mathematik der Universität Siegen. Hier findet neben der Auswahl auch die Ausbildung der Unterrichtsassistent:innen, deren Verteilung an die Schulen sowie die damit verbundene Kommunikation statt. Die Universität kooperiert darüber hinaus mit den beteiligten Unternehmen und organisiert Termine, an denen sich alle Beteiligten der aktiven und vergangenen Projektzyklen treffen, um über ihre Erfahrungen aber auch weitere Perspektiven zu diskutieren. In regelmäßigen Treffen der Unterrichtsassistent:innen mit betreuenden Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern der Fachgruppe werden aktuelle Unterrichtsangelegenheiten der Schulen besprochen, Möglichkeiten des Einsatzes digitaler Medien und Werkzeuge im Team diskutiert oder Unterrichtsideen, die bereits umgesetzt wurden, weitergegeben und für den weiteren Einsatz weiterentwickelt.

Die Universität veröffentlicht begleitend zum Projekt jedes Jahr einen Sammelband mit einer Sammlung von Unterrichtsskizzen aus den Projektschulen. Diese werden durch die Schulen ausgewählt und der Universität für diesen

Zweck zur Verfügung gestellt. Die Schulen verpflichten sich im Projekt zur Einreichung von fünf Unterrichtsentwürfen aus der aktiven Projektlaufzeit²⁷.

Im Rahmen der wissenschaftlichen Begleitung erfolgt eine systematische Untersuchung übergeordneter Forschungsfelder sowie konkreter Aspekte zum Einsatz digitaler Medien und Werkzeuge. Im vorliegenden Beitrag stellen wir Ergebnisse zum übergeordneten Forschungsfeld der Gelingensfaktoren vor²⁸.

Begleitend zu der Ausstattung der Schulen mit digitalen Medien und Werkzeugen sowie der Unterstützung vor Ort durch die Unterrichtsassistent:innen existiert ein auf den Einsatz digitaler Medien und Werkzeuge im Unterricht ausgerichtetes Fortbildungsangebot. Eine gezielte Untersuchung der Fortbildungsangebote ermöglicht es, die Fortbildungsstruktur während der Projektlaufzeit an die Bedürfnisse der teilnehmenden Lehrkräfte sowie die Ergebnisse der Begleitforschung anzupassen. Unterschiedliche Strukturen wurden auf diese Weise erprobt: i) Fortbildungstage im Tagungsformat mit zahlreichen unterschiedlichen Fortbildungsthemen, ii) Regelmäßige Fortbildungsangebote über einen längeren Zeitraum, bei dem z.B. wöchentlich ein anderes Thema angeboten wurde, iii) Mikrofortbildungen vor Ort an den Schulen zu einzelnen digitalen Medien²⁹.

D) Ausstattung

Ein Kernmerkmal der Projektstruktur stellt die unmittelbar verfügbare Ausstattung mit digitalen Medien und Werkzeugen an den jeweiligen Projektschulen dar. Dies bedeutet, dass jede Schule im Rahmen der Projektteilnahme mit digitalen Medien und Werkzeugen umfangreich ausgestattet wurde. Die ausgewählten Medien und Werkzeuge stehen in den Schulen zum Einsatz im Unterricht bereit und sind allen Mathematiklehrkräften zugänglich. Nach dem Ende der jeweils aktiven Projektlaufzeit verbleiben diese Medien und Werkzeuge in den Schulen. Eine Pflege und Wartung der Ausstattung erfolgt innerhalb der Projektlaufzeit durch die Unterrichtsassistent:innen. Ziel dieses Strukturmerkmals ist es, die digitalen Medien und Werkzeuge in den Schulen jederzeit einsatzbereit zu halten. Die durch die Schulen gewählte Ausstattung ist dabei sehr unterschiedlich und umfasst unter anderem digitalen Tafeln, Apps, digital-analoge Lernspiele (z.B. Osmo), LEGO-Robotik, 3D-Drucker oder VR-Brillen.

E) Unternehmen

Eine Vernetzung der Schulen mit den Unternehmen vor Ort erfolgte durch eine explizite Projektbeteiligung der Unternehmen sowie eine direkte Zuweisung

²⁷ Der Sammelband zu den Unterrichtsskizzen aus dem ersten Projektjahr kann unter folgendem Link abgerufen werden: <http://dx.doi.org/10.25819/ubsi/10237>

²⁸ Eine Übersicht über die übergeordneten Forschungsfelder sowie die konkreten Forschungsfragen findet sich in Dilling, Hörnberger, Reifenrath, Schneider, Vogler und Witzke (2022).

²⁹ Im vorliegenden Beitrag werden solche Aspekte der Fortbildungsstruktur aufgenommen, aus denen sich Hinweise für die grundlegenden Gelingensfaktoren im Rahmen der Untersuchung ergeben. Eine vertiefende Untersuchung der Fortbildungsstruktur erfolgt parallel. Einblicke hierzu werden in einem anderen Beitrag in diesem Band gegeben.

von Schulen und Unternehmen als Projektpartner. Diese Kooperation umfasst neben der Umsetzung von Berufsorientierungstagen an den Schulen auch die Entwicklung und Durchführung von Schülerworkshops. Dazu stellen die Unternehmen authentische Problemstellungen bereit, die durch Mitarbeiter:innen der Universität für Schüler:innen aufbereitet werden. Die Workshops werden dann an den Schulen von der Universität durchgeführt und von den Unternehmen begleitet. Im Anschluss erfolgt jeweils eine Begehung der Unternehmen mit den Schüler:innen.

2. Explorative Untersuchung der Gelingensfaktoren

2.1 Fragestellung und Forschungssystematik

Die Untersuchung der Gelingensfaktoren basiert auf der leitenden Forschungshypothese des Projekts DigiMath4Edu:

„Nachhaltige digitale Transformation gelingt im Bildungsbereich durch systematische, konkrete und wissenschaftlich fundierte Begleitung vor Ort.“

Diese Grundannahme greift die Idee des Entdeckungsprozesses von Innovationen auf, die im Papier zur Innovationsstrategie NRW erläutert wird (MWIDE-NRW, 2021). Ziel ist es, Erkenntnisse zur Professionalisierung in den verschiedenen Phasen der Lehrer:innenbildung zu generieren und daraus konkrete Maßnahmen abzuleiten.

Die Fragestellung lässt sich wie folgt konkretisieren:

- (i) Welche Faktoren im Prozess der Implementierung digitaler Medien und Werkzeuge lassen sich innerhalb der Projektstruktur beschreiben?
- (ii) Inwiefern könnten diese Faktoren günstige Bedingungen für eine (nachhaltige) Implementierung digitaler Medien und Werkzeuge in den Mathematikunterricht darstellen?

Zur Beantwortung dieser Fragen wurden innerhalb der Projektstruktur unterschiedliche Methoden der Datenerhebung genutzt (vgl. Abbildung 2). Im Wesentlichen lässt sich die Struktur durch eine Kombination aus teilnehmender Beobachtung ([1.1], [2.1], [3.1]), der Entwicklung und Weiterentwicklung von Leitfadeninterviews und Fragebögen ([1.2], [2.2]) sowie deren Durchführung und Auswertung beschreiben ([1.3], [2.3], [3.2], [3.3]).

2.2 Teilnehmende Beobachtung

Jedes Projektjahr stellt einen wissenschaftlich begleiteten Zyklus dar, der im Rahmen der forschungsmethodischen Gesamtsystematik ein Teilziel umfasst. Gleichzeitig ermöglicht es die genuine Einbindung des Forschungsteams in die Begleitung der Lehrkräfte, über die gesamte Projektlaufzeit hinweg wichtige Einblicke in die angeregten Implementierungsprozesse durch teilnehmende Beobachtung zu erhalten (vgl. Abbildung 1: [1.1], [2.1], [3.1]).

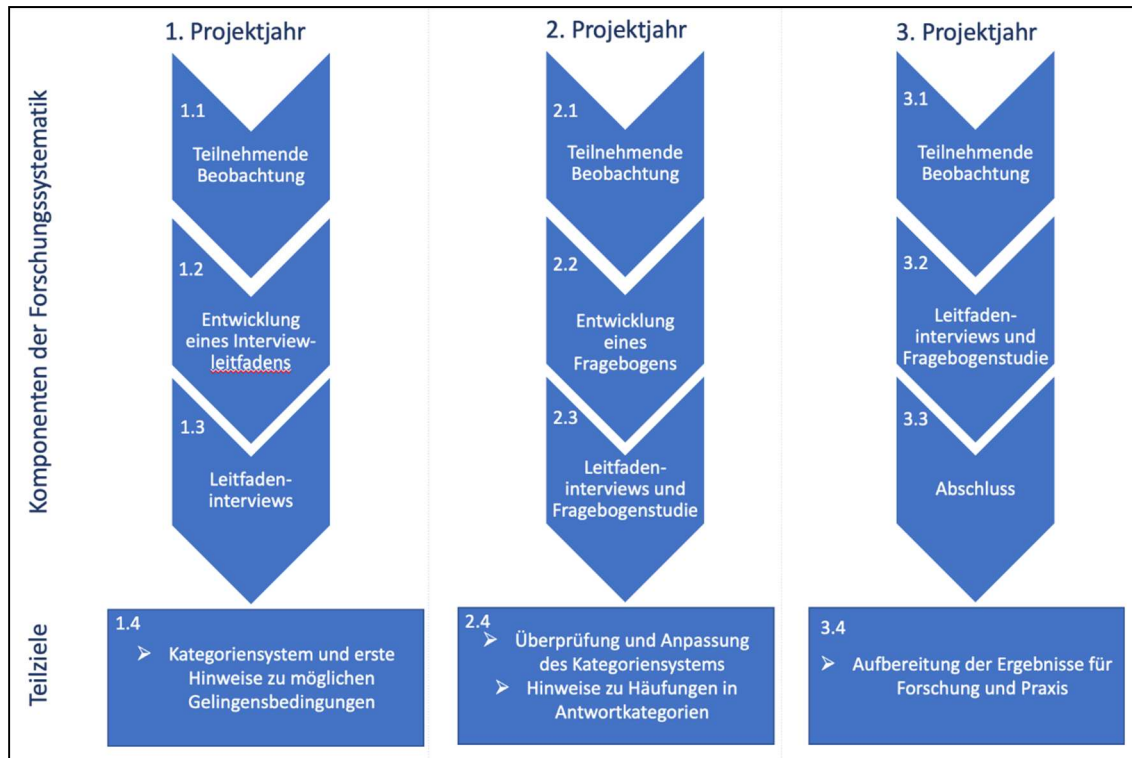


Abbildung 1: Darstellung der Forschungssystematik zu Gelingensfaktoren

Im Laufe des Forschungszeitraumes konnten auf diese Weise prozesshaft Hinweise auf förderliche oder hinderliche Faktoren der Projektstruktur für die Implementierung digitaler Medien und Werkzeuge erfasst und die Projektstruktur sukzessive an diese Einsichten angepasst werden. Insbesondere durch den Einsatz der Unterrichtsassistent:innen vor Ort, konnten wichtige Einblicke in die unmittelbaren Prozesse an den Schulen erlangt werden, die wesentlich zur sukzessiven Anpassung der Projektstruktur beigetragen haben.

Eine weitere Ebene der teilnehmenden Beobachtung wird durch den unmittelbaren Einsatz des Projektteams in den Kooperationsschulen erreicht. Das Team ist durch eine übergeordnete Betreuung der Schulen, durch die Betreuung und Koordinierung der Unterrichtsassistent:innen aber auch durch die Gestaltung und Umsetzung der Fort- und Weiterbildungsmaßnahmen selbst Teil der Projektstruktur. Prozesse der Implementierung können so durch das Projektteam unmittelbar beobachtet

werden. Gleichzeitig ermöglichen es Reflexionsrunden des Projektteams, die Beobachtungen aus wissenschaftlicher Sicht zu ordnen, zu beschreiben und unter Rücksprache mit den weiteren Beteiligten die Projektstruktur zu verändern oder bewusst beizubehalten. Diese Art der teilnehmenden Beobachtung stellt eine wesentliche Informationsquelle und die Basis der organisatorischen wie auch wissenschaftlichen (Weiter)Entwicklung dar.

2.3 Datengrundlage und Kategoriensystem

Zum Ende des ersten Projektjahres wurden an jeder der teilnehmenden Schulen Leitfadeninterviews geführt. Dazu wurden jeweils die Schulleitung, die Projektkoordinator:innen sowie weitere Lehrkräfte, die sich besonders aktiv am Projekt beteiligt haben, von Mitarbeiter:innen des Projekts interviewt. Der Leitfaden umfasst drei Teilbereiche: 1. Persönliche Weiterentwicklung und professionelle Medienkompetenz, 2. Persönliche Weiterentwicklung und Projektanlage und 3. Offene Rückmeldungen. Hinweise auf Gelingensbedingungen ergaben sich in der Regel aus dem zweiten Teil des Interviews, wobei zur Analyse grundsätzlich alle Teile herangezogen wurden. Der zweite Teil des Leitfadens umfasst in der Grundlage die Projektstrukturen, die in der Anlage angenommen und im Rahmen des Projekts implementiert wurden (vgl. 1.2). Darüber hinaus wurden solche Beobachtungen aufgegriffen, von denen weitere Hinweise auf mögliche Gelingensbedingungen erwartet werden konnten. Die übergeordnete Frage lautete: „Welche Komponenten der Projektanlage hatten aus Ihrer Sicht besonderen Einfluss auf Ihre persönliche Weiterentwicklung hinsichtlich digitaler Medien im Mathematikunterricht?“. Darunter fielen u.a. Fragen zur Art der Einführung unbekannter digitaler Medien, zur Art der Unterstützung bei der Umsetzung im eigenen Unterricht, zur Bedeutung der Verfügbarkeit der digitalen Medien, zu den Fortbildungsveranstaltungen sowie zur Projektlaufzeit.

Die Datenbasis umfasst Interviews von 20 Interviewpartner:innen aus fünf Projektschulen. Diese wurden nach den Regeln von Dresing und Pehl (2015) transkribiert und anschließend mit der Methode der strukturierenden qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2022) kategorisiert. Hierzu wurde zunächst das zu analysierende Material beschrieben und die Analyseeinheit festgelegt. Es folgten Wiederholungen aus Paraphrasierung und Generalisierung, bis der durch das Forschungsanliegen festgelegte Abstraktionsgrad erreicht war. Schließlich wurden die Kategorien in einem Kategoriensystem zusammengefasst, welches anschließend am Datenmaterial geprüft wurde.

Aus den Analysen ergaben sich durch eine induktive Kategorienbildung sieben Oberkategorien und 13 Unterkategorien, die als Grundlage zur ersten Beschreibung von möglichen Gelingensfaktoren dienen (vgl. Tabelle 2). Darüber hinaus wurden die Kategorien durch Unterkategorien weiter spezifiziert, die es ermöglichten, eine Wertung der Interviewpartner:innen abzubilden (in der Regel jeweils durch: Positiv – Neutral – Negativ). Tabelle 2 zeigt die Aufstellung des Kategoriensystems.

Oberkategorien	Kategorien
Vernetzung	· Vernetzung Uni Siegen · Vernetzung Firmen und Schulen · Vernetzung Schulen und Schulen
Fortbildungsmaßnahmen	· Schulinterne Fortbildungsmaßnahmen durch Universität · Fortbildungen an der Universität
Technische Ausstattung	· Vorauswahl durch Universität · Einfache Verfügbarkeit technischer Ausstattung
Unterrichtsassistent:innen	· Professionelle Rolle der Unterrichtsassistent:innen · Präsenz der Unterrichtsassistent:innen
Laufzeit	· Ein Jahr als sinnvolle Zykluslänge
Verpflichtungen zwischen Projektpartnern	· Verpflichtungen sind notwendig aber herausfordernd
Einführung digitaler Medien	· An individuellen Themen · Unter Fachbezug
7 Oberkategorien	13 Kategorien

Tabelle 2: Kategoriensystem Gelingensfaktoren

2.4 Mögliche beschreibbare Gelingensfaktoren

Im Folgenden werden die wichtigsten Ergebnisse der Analyse vorgestellt. Dabei wird ein Fokus auf die ersten vier Oberkategorien gelegt, da diese in besonders vielen Interviews mit vergleichsweise detaillierten Aussagen thematisiert wurden und daher gut expliziert werden können. Zur Illustration der hier zusammenfassend dargestellten Ergebnisse werden exemplarisch Interviewausschnitte ausgewiesen, die als Ankerbeispiele im Sinne von Mayring (2022) dienen.

- *Vernetzung*

Die Vernetzung mit der Universität Siegen wurde häufig als förderlich zum Gelingen des Projektes und als positiv wahrgenommen. Hervorgehoben wurde dabei, dass die Vernetzung mit der Universität im Allgemeinen als Ansporn zu einer hohen Qualität und einer intensiven Auseinandersetzung mit den im Unterricht umgesetzten Themen und ausgewählten Medien wahrgenommen wird. Im Projekt verpflichteten sich die Schulen zur Einreichung von jeweils fünf Unterrichtsskizzen zu ausgewählten Stunden, bei denen digitale Medien im Mathematikunterricht zum Einsatz kommen. Die Erstellung der Entwürfe während des laufenden Schulbetriebs wurde durch die Lehrkräfte in der Regel als deutlicher Mehraufwand zurückgemeldet. Dennoch wurde diese Art der Vernetzung als für beide Seiten gewinnbringend wahrgenommen, was bedeutet, dass die Erstellung der Unterrichtsskizzen gewissermaßen als Investition in die Begleitung und den Austausch mit der Universität verstanden wurden:

„Ähm, wo ich selber, ich bin/ ich glaube ich bin kein fauler Mensch, aber das ist schon teilweise echt an der Leistungsgrenze, ne und wenn man dann weiß, gut man stößt bei dem Einreichen von Unterrichtsentwürfen nicht auf taube Ohren, dann ist man/ dann fühl ich mich in der Verpflichtung da auch Qualität reinzubauen.“

Auch der regelmäßige Austausch sowie der Einsatz von Lehramtsstudierenden vor Ort wurde positiv hervorgehoben. Ebenfalls positiv bewertet wurde die im Projekt angelegte Vernetzung mit anderen Schulen. Hier wurde insbesondere der Austausch von Erfahrungen aber auch der Austausch fertig entwickelter Materialien und Unterrichtsentwürfe betont, wie der folgende Transkriptausschnitt zeigt:

„Man hat halt nochmal eher Sachen ausprobiert und sich auch nochmal Ideen von anderen genommen auch so kleine Tipps und Tricks, die man sonst vielleicht nicht alleine hingekriegt hätte, hat man dann auch nochmal bekommen von/ vor allen Dingen

von Leuten, die auch aus der Praxis kommen und die dann eigentlich direkt auch umsetzbar waren.“

Besonders herausfordernd gestaltet sich die Organisation der Vernetzung durch eine vorausschauend planbare und strukturierte Kommunikationsstruktur bei der Beteiligung vieler unterschiedlicher Schulen, was sich auch in den Interviewdaten widerspiegelt.

- *Fortbildungsmaßnahmen*

Begleitende Fortbildungsmaßnahmen wurden grundsätzlich als notwendig und sinnvoll wahrgenommen. An diese werden jedoch hohe Qualitätsansprüche gestellt. Das bedeutet, dass Fortbildungen, denen durch die Teilnehmer:innen eine hohe Qualität zugesprochen wird, als wichtiger Gelingensfaktor identifiziert werden können. Neben der wahrgenommenen Qualität trägt eine hohe Bandbreite angebotener Themen dazu bei, sich mit dem Einsatz eines (womöglich bislang unbekannten) digitalen Mediums auseinanderzusetzen und dieses in den eigenen Mathematikunterricht zu integrieren. Die in den Fortbildungsmaßnahmen gewonnenen Einblicke in Möglichkeiten zur Einbindung digitaler Medien in den Mathematikunterricht wurden als Ausgangspunkt eines geweckten Interesses an den dort vorgestellten digitalen Medien benannt, auf deren Basis eine Einbindung in den eigenen Mathematikunterricht folgen konnte. Diese Faktoren wurden durch die befragten Lehrkräfte als positive Erfahrung und Beitrag zur persönlichen Weiterentwicklung gewertet.

Ein passendes Angebot für alle Schulformen zu entwickeln, bei dem die jeweils individuellen Ausstattungen mit digitalen Medien berücksichtigt werden können und ein für möglichst viele Beteiligte passender Termin gefunden werden kann, bringt hohe organisatorische und inhaltliche Herausforderungen mit sich. Darauf wurde reagiert, indem Workshops zum Teil vor Ort an den Projektschulen angeboten wurden, an denen alle interessierten Lehrkräfte der Schulen teilnehmen konnten. Während die Funktion zur Ideenfindung und somit zur möglichen Initialzündung zum Einsatz digitaler Medien in den eigenen Mathematikunterricht sowie die wahrgenommene hohe Qualität der Workshops im Vergleich zu den zentral organisierten Fortbildungsmaßnahmen ähnlich wahrgenommen wurden, konnten durch die Dezentralisierung organisatorische Hürden für die Lehrkräfte vor Ort verringert werden. Eine hohe Teilnahmequote an den Workshops an den Schulen vor Ort unterstreicht die hohe Effektivität dieser Workshops hinsichtlich der Erreichbarkeit von Lehrkräften.

„Das war schön, weil dadurch auch wirklich viele (...) Mathekollegen teilgenommen haben. Ich glaube, wenn der in Siegen

stattgefunden hätte, dann wären nicht alle mitgekommen. Einfach ja, Unterrichtsausfall, dass man nach Siegen fahren muss... Das hindert halt oft viele oder hemmt viele. Das war schön, dass das bei uns stattfinden konnte, weil wirklich alle sich einen Tag mal mit Virtual und Augmented Reality da auseinandergesetzt haben.“

- *Technische Ausstattung vor Ort*

Die an den Schulen verfügbare technische Ausstattung (im Projekt in Form eines Digitallabors umgesetzt) wurde als wichtiger Gelingensfaktor von den Projektteilnehmer:innen identifiziert, nicht zuletzt sogar als notwendige Voraussetzung zum Gelingen des Projekts. Die unmittelbar vorhandene Ausstattung wurde als motivierend wahrgenommen, da die vorhandenen digitalen Medien das Interesse der Lehrpersonen weckten und so zum freien Ausprobieren animierten. Dazu war es wichtig, dass ein Zugriff durch die Lehrpersonen möglichst unproblematisch möglich ist. Insbesondere für eine nachhaltige, also über die Projektzeit hinaus bestehende Implementierung dieser Medien in den Mathematikunterricht wird die Verfügbarkeit vor Ort als wesentliche Voraussetzung verstanden. Gleichzeitig wurde die Bedeutung der Verbindung mit konkreten Einsatzszenarien betont, wie sie zum Beispiel in Fortbildungsveranstaltungen oder durch die Vernetzung mit anderen Schulen oder Lehrkräften erreicht werden kann (vgl. Abschnitt: „Vernetzung“). Betont wurde dabei, dass die Schulen direkten Einfluss auf die Wahl der Ausstattung nehmen können, sodass die gewählte Ausstattung zu den Vorstellungen und Zielsetzungen der Schulen und beteiligten Lehrkräfte passt. Als herausfordernd wurde angesehen, dass einzelne Medien im aktiven Projektzeitraum nicht von den Lehrer:innen genutzt wurden, beispielsweise aufgrund von eingeschränkten Einsatzmöglichkeiten:

„Oh großen Einfluss. Also dadurch/ Wir hatten vorher einen 3D-Drucker nur in der Physik. Der war dann ja natürlich so gar nicht für mich zugänglich und jetzt haben wir da oben mehrere 3D-Drucker stehen und können, wenn wir möchten, damit arbeiten. Das hatte auf jeden Fall einen Einfluss. Gut, die VR-Brille ist halt schwierig zu nutzen. Je nachdem, welches Thema man hat, kann man sie ja nur einsetzen, weil es da noch nicht so viel zu gibt, aber das entwickelt sich ja hoffentlich noch.“

- *Die Rolle der Unterrichtsassistent:innen*

Die durch die Universität ausgebildeten und an den Schulen vor Ort eingesetzten Lehramtsstudierenden (Unterrichtsassistent:innen) wurden als weiterer wichtiger Gelingensfaktor identifiziert. Die Analysen zeigen, dass dazu jedoch eine genuine Einbindung der Unterrichtsassistent:innen in das

Kollegium vor Ort, eine gute Erreichbar- und Verfügbarkeit sowie eine gute Ausbildung für die Aufgabe an den Schulen wesentlich sind. Die Unterrichtsassistent:innen werden dann von den Lehrkräften als Fachpersonal für Technik, zum Teil auch als Fachpersonal für Unterrichtsprozesse mit digitalen Medien wahrgenommen. Von allen Lehrkräften wurde die Arbeit der Unterrichtsassistent:innen als sehr professionell wahrgenommen. Die Rolle der Unterrichtsassistent:innen vor Ort wurde dabei sehr unterschiedlich beschrieben. Zum Beispiel als Multiplikator:innen der universitären Entwicklungen, als Unterstützung und Sicherheit im Unterricht, als Ideengeber:innen oder Starthilfe zur Auseinandersetzung mit digitalen Medien und deren Einsatz im eigenen Mathematikunterricht, stellenweise aber auch als „Mentoren“ oder „Berater“ der Lehrkräfte vor Ort (vgl. Dilling & Witzke, 2024). Diese Wahrnehmung ist insbesondere deshalb nennenswert, da es sich um Lehramtsstudierende handelt, die von fertig ausgebildeten Lehrpersonen mit zum Teil bereits langjähriger Praxiserfahrung als Expert:innen wahrgenommen werden:

I: „Was würden Sie denn jetzt so sagen, was war denn so ja die Komponente, die den größten Einfluss Ihrer Meinung nach auf die Weiterentwicklung im Kollegium hatte?“

L1: „Unterrichtsassistenten würde ich sofort sagen. Du auch?“

L2: „Ja, auf jeden Fall. Weil die hier waren und hier vor Ort auch ganz eng mit unseren Fachlehrern zusammengearbeitet haben, weil sie sehr zuverlässig waren und sich wirklich auch um das Digitallabor gekümmert haben, das war auf jeden Fall eine sehr gute und gewinnbringende Arbeit, die die geleistet haben.“

Zusammenfassung der Ergebnisse

Nach Ende des ersten Projektjahres und auf Basis der hier vorgestellten Untersuchung können folgende Faktoren als potenziell förderlich zum Gelingen einer (nachhaltigen) Implementation digitaler Medien in den Mathematikunterricht beschrieben werden:

- ⇒ Die Vernetzung mit der Universität als Kooperationspartner zur Unterstützung der Weiterentwicklung von Mathematikunterricht unter Einsatz digitaler Medien.
- ⇒ Die Vernetzung mit anderen Schulen und Lehrkräften als Austauschpartner und weitere Ideengeber.

- ⇒ Bedarfsgerechte und qualitativ hochwertige Fortbildungsmaßnahmen, welche die Bandbreite der vorhandenen Ausstattung abdecken und mit möglichst geringem organisatorischem Aufwand erreichbar sind.
- ⇒ Die Verfügbarkeit einsatzbereiter digitaler Medien vor Ort sowie deren einfache Zugänglichkeit für alle interessierten Lehrpersonen.
- ⇒ Vor Ort greifbare personelle Unterstützung durch gezielt und gut ausgebildetes Fachpersonal zur Beratung und Entlastung vor Ort als Teil eines erweiterten Kollegiums.

3. Diskussion und Ausblick

Die hier vorgestellten Faktoren geben erste wichtige Hinweise auf förderliche Einflüsse zur nachhaltigen Implementierung digitaler Medien in den Mathematikunterricht. Sie basieren auf der Analyse von Interviewdaten, die am Ende des ersten Projektjahres durch Leitfadeninterviews mit 20 am Projekt beteiligten Lehrpersonen geführt wurden. Das bedeutet, dass wir durch die vorliegenden Daten einen wichtigen ersten Einblick auf Faktoren erlangen konnten, die von den interviewten Lehrpersonen im Projekt als förderlich zur Einbindung digitaler Medien in den Mathematikunterricht wahrgenommen wurden. Im Wesentlichen decken sich die gewonnenen Einsichten mit den in der Literatur zu findenden Kriterien für erfolgreiche Fortbildungen z.B. nach Lipowsky und Rzejak (2017) sowie den Einflussfaktoren auf den nachhaltigen Einsatz digitaler Medien in den Unterricht von Kafyulilo, Fisser und Voogt (2016). Einige Aspekte, insbesondere in Bezug auf die Unterstützung vor Ort sowie die Ausstattung mit digitalen Medien, lassen sich im Rahmen des Projekts ausdifferenzieren.

Die hier vorliegenden Ergebnisse sind richtungsweisend für (Weiter)entwicklungen im Projekt sowie für weiterführende Prozesse der Begleitforschung und können entsprechend dem Paradigma der qualitativen Forschung als Hypothesen verstanden werden. So dient das im Rahmen der vorliegenden Analyse entwickelte Kategoriensystem im Folgenden als Grundlage für weiterführende quantitative Erhebungen, die dazu dienen sollen, die Bedeutung der Faktoren im Projekt besser beurteilen zu können. Dazu wurde basierend auf den Kategorien aus der hier beschriebenen qualitativen Interviewstudie aus dem ersten Projektjahr sowie weiteren Beobachtungen und Erfahrungen ein quantitativer Fragebogen entwickelt, der am Ende des zweiten und dritten Projektjahres (evtl. in angepasster Form) an alle Mathematiklehrpersonen der beteiligten Projektschulen herausgegeben wird, um darauf aufbauend eine quantitative Auswertung vorzunehmen.

Literatur:

- Baldwin, T. T. & Ford, J. K. (1988). Transfer of training: A review and directions for future research. *Personnel Psychology*, 41, 63–105.
- Dilling, F. & Witzke I. (2024). Studierende als Expert*innen in Praxisphasen? Eine Fallstudie zur Verbindung der ersten und dritten Phase der Lehrer*innenbildung im Kontext der digitalen Transformation im Mathematikunterricht. *HLZ – Herausforderung Lehrer*innenbildung Zeitschrift*, 7(1), 90–107.
- Dilling, F., Hörnberger, K., Reifenrath, M., Schneider, R., Vogler, A. & Witzke, I. (2022). Das Forschungs- und Entwicklungsprojekt DigiMath4Edu – Digitale Transformation im Bildungsbereich am Beispiel des Mathematikunterrichts. In F. Dilling, F. Pielsticker & I. Witzke (Hrsg.), *Neue Perspektiven auf mathematische Lehr-Lern-Prozesse mit digitalen Medien* (S. 73–84). Springer Spektrum.
- Dresing, T & Pehl, T. (2015). Praxisbuch Interview, Transkription & Analyse. Anleitungen und Regelsysteme für qualitative Forschung. <https://d-nb.info/1077320221/34>
- Kafyulilo, A., Fisser, P. & Voogt, J. (2016). *Factors Affecting Teachers' Continuation of Technology Use in Teaching. Education and Information Technologies*, 21, 1535–1554.
- KMK – Kultusministerkonferenz der Länder (2016). *Bildung in der digitalen Welt. Strategie der Kultusministerkonferenz. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 08.12.2017*. KMK. https://www.kmk.org/fileadmin/pdf/PresseUndAktuelles/2018/Digitalstrategie_2017_mit_Weiterbildung.pdf
- Lipowsky, F. & Rzejak, D. (2017). Fortbildungen für Lehrkräfte wirksam gestalten – Erfolgsversprechende Wege und Konzepte aus Sicht der empirischen Bildungsforschung. *Bildung und Erziehung*, 70(4), 379–399.
- Mayring, P. (2022). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken*. Beltz.
- MWIDE-NRW (Ministerium für Wirtschaft, Innovation, Digitalisierung und Energie des Landes Nordrhein-Westfalen) (2021). *Regionale Innovationsstrategie des Landes Nordrhein-Westfalen*. https://www.wirtschaft.nrw/sites/default/files/documents/21-0924_mwide_broschuere_regionale_innovationsstrategie_des_landes_nrw-web2.pdf

Einsatz KI-basierter Taschenrechner in der Grundschule – Grundlegende Einordnung und empirische Eindrücke

Künstliche Intelligenz (kurz: KI oder AI) erfährt eine beachtliche mediale Aufmerksamkeit, wohingegen sie im Kontext der Grundschule bisher noch wenig rezipiert wird. Der Beitrag widmet sich der grundlegenden Einordnung KI-basierter Taschenrechner im Arithmetikunterricht und diskutiert ausgehend von Eindrücken einer explorativen Studie Anwendungsmöglichkeiten und Grenzen solcher KI-basierter Werkzeuge im Mathematikunterricht der Primarstufe.

1. Einleitung

Angeführt von technischen Systemen wie *ChatGPT* erfährt künstliche Intelligenz (kurz: KI), die Bilder, Videos oder Texte generiert, im Jahr 2023 eine außerordentliche Aufmerksamkeit. Entfacht durch diese zuvor nicht dagewesene Leistungsfähigkeit von KI-Systemen fallen insbesondere zu Beginn der fachdidaktischen Auseinandersetzung mit der Thematik die üblichen Schlagworte: Herausforderungen, Potenziale u. Ä. (Buchholtz et al., 2023). Beachtliche technische Entwicklungen und wiederkehrende Diskurse um ihre möglichen Folgen für die Unterrichtswirklichkeit (Weber & Auhagen, 2023) werden in der Mathematikdidaktik nicht selten mit „Déjà-vu-Erfahrungen“ (Krauthausen, 2020, S. 52) oder auch einem „Déjà-vu-Erlebnis“ (Hischer, 2023, S. 6) verbunden, an dessen Ende die Frage steht, „welche Aspekte menschlichen Denkens und Handelns werden möglicherweise ‚trivialisiert‘ und wie ist dann damit sinnvollerweise in Schule [...] umzugehen?“ (ebd., S. 11). Dort wo Technik oder digitale Medien eine Unterlegenheit menschlichen Vermögens suggerieren, schließen sich nicht selten Ressentiments an (Krauthausen, 2012). Ein allzu bekanntes Beispiel liefert der Taschenrechnereinsatz in der Grundschule. Selbst nach Jahrzehnten der Einführung des Taschenrechners (Spiegel, 1988) ist er „in den Augen mancher Lehrerinnen [...] immer noch nicht konzeptionell integrierter Bestandteil des Mathematikunterrichts“ (Krauthausen, 2018, S. 338) – und das obwohl er im Kern eine weitere Rechenmethode (Plunkett, 1987) sowie ein Arbeitsmittel in der Grundschule darstellt (Krauthausen, 2018). Die Annahme, dass die Bewältigung von Rechenanforderungen (Padberg & Benz, 2021) im Sinne kindlichen Handelns und Denkens trivialisiert werde (Hischer, 2023) mag zum Sinnbild des Taschenrechners als „Rechenvermeidungsgerät“ (Krauthausen, 2018, S. 93) geführt haben. Dabei liegen zum Taschenrechnereinsatz durchaus zahlreiche didaktische Konzepte vor, die von der Durchführung von Experimenten über Entdeckungen von Gesetzmäßigkeiten, der Kontrolle von Ergebnissen und Problemlösen bis hin zum Erforschen von Zusammenhängen reichen (Krauthausen, 2018; Fuchs & Käpnick, 2009; Spiegel, 1988; Ruthven, 2007). So wie bereits vor dreißig Jahren Taschenrechner als

allgemein verfügbar galten (Krauthausen, 1993), sind heutzutage digitale Sprachassistenten wie *Alexa* von *amazon* oder auch *Siri* von *Apple* in ähnlicher Weise gegenwärtig, deren kontinuierliche Entwicklung auf die Implementierung aktueller generativer KI abzielt (Rausch, 2023). In Anlehnung an Krauthausen (1993) ist daher zu diskutieren, welche Bedeutung KI-Systeme im Mathematikunterricht der Primarstufe einnehmen werden. Mit Blick auf die Bewältigung von Rechenanforderungen kann der Primus unter den digitalen Sprachassistenten *Alexa* bis dato als *KI-basierter Taschenrechner* bezeichnet werden, dessen Funktionsweisen die Anzahl der Eingaben und Rechenschritte potenziell reduziert, die Benutzer*innen durchführen müssen, um zur Lösung einer Aufgabe zu gelangen (Van Vaerenbergh & Pérez-Suay, 2022). Angesichts eines abermaligen möglichen Déjà-vu-Erlebnisses befürchten Skeptiker*innen, dass KI-basierte Taschenrechner Schüler*innen vom Lernen abhielten (Kovács & Recio, 2020), obwohl aus mathematikdidaktischer Perspektive eine Revision der „spezifischen Merkmale, Zielsetzungen und Stärken der jeweiligen Methoden“ (Krauthausen, 2018, S. 93) wünschenswert ist.

Die skizzierte Problemlage legt nahe, dass Einsatzmöglichkeiten KI-basierter Taschenrechner im Mathematikunterricht der Grundschule ein Desiderat eröffnen. Im Folgenden werden didaktische Empfehlungen für den Einsatz herkömmlicher Taschenrechner im Arithmetikunterricht und Funktionsweisen KI-basierter Taschenrechner betrachtet. Im Anschluss wird eine explorative Studie vorgestellt, deren Ziel in der Identifikation der Nutzungsweisen von Kindern (Walter, 2018) bei der Verwendung von KI-basierten Taschenrechnern liegt. Abschließend wird anhand der Eindrücke eine Diskussion um mögliche Ankerpunkte eines KI-basierenden Taschenrechnereinsatzes in der Grundschule eröffnet.

2. Theoretische Hintergründe

2.1 Taschenrechner in der Grundschule

Wie angedeutet finden sich in der einschlägigen fachdidaktischen Literatur zahlreiche Empfehlungen zum Einsatz des Taschenrechners im Arithmetikunterricht der Grundschule (Krauthausen, 2018; Padberg & Benz, 2021). Prinzipiell gilt, dass die Entwicklung von Rechenfähigkeiten durch die Verwendung von Taschenrechnern nicht negativ beeinflusst wird, sofern auf Seite der Lernenden bestimmte grundlegende Kompetenzen vorhanden sind. Neben sicheren Zahlvorstellungen und einem tragfähigen Gefühl von Größenordnungen, sollten Schüler*innen bereits über zuverlässige Kopfrechenfähigkeiten und Kompetenzen in der flexiblen Nutzung halbschriftlicher Rechenstrategien verfügen (Becker & Selter, 1996; Wittmann & Müller, 2018).

Die Erfüllung dieser Voraussetzungen impliziert mit Blick auf das Curriculum in der Regel den Einsatz des Taschenrechners im vierten Schuljahr (Krauthausen, 2018; Padberg & Benz, 2021). Für Lehrkräfte sind überdies methodisch-didaktische Empfehlungen zu berücksichtigen. Die Integration von Kopfrechenmethoden

sollte weiterhin Bestandteil des Unterrichts sein, um das Vertrauen der Schüler*innen in ihre eigenen Kompetenzen zu stärken (Krauthausen, 2018). Daran schließt sich im Unterricht gleichfalls der Vergleich zwischen Rechenmethoden und Taschenrechner an, um seinen sinnvollen Einsatz vor dem Hintergrund von Rechenanforderungen zu reflektieren. Bevor der Taschenrechner in den Mathematikunterricht erfolgreich integriert werden kann, gilt es zu beachten, dass seine Bedienungen respektive Funktionsweisen zunächst selbst einen Lerngegenstand darstellen. An dieser Stelle ist etwa zu klären, ob der Taschenrechner bei der Berechnung eines Ergebnisses strikt die Reihenfolge der Eingabe im Sinne einer arithmetischen Logik oder algebraisch korrekt etwa „Punkt vor Strich“ automatisch berücksichtigt (Becker & Selter, 1996; Krauthausen, 2018; Padberg & Benz, 2021).

Im Mathematikunterricht der Grundschule kann der Taschenrechner laut Spiegel (1988) sinnvolle Funktionen übernehmen und zu unterschiedlichen Zwecken eingesetzt werden. Als Instrument zur Kontrolle soll der Taschenrechner ein Nachdenken und Überprüfen von Ergebnissen ermöglichen sowie das Eindringen in strukturelle Zusammenhänge und ein allmähliches Annähern an die Aufgabenlösung eröffnen. Stehen im Unterricht vor allem das Entdecken von Gesetzmäßigkeiten, Mustern und Strukturen im Vordergrund, lässt sich mithilfe des Taschenrechners der kognitive Anspruch zur Bewältigung der Rechenanforderungen reduzieren und sich Kapazitäten für Kreativität und Argumentationsfähigkeit auf Seiten der Schüler*innen schaffen (Krauthausen, 2012; Walter 2018). In diesem Sinne kann der Taschenrechner selbst einen Anlass für Problemstellungen liefern – ein bekanntes Beispiel hierfür ist der *Broken Calculator*, bei dem trotz fehlender Tasten Operationen angestellt und Aufgaben gelöst werden sollen (Hoffmann & Spiegel, 2006). Gleichfalls liefert die Integration des Taschenrechners in den Mathematikunterricht Anlässe zur Auseinandersetzung mit Fragestellungen auf einer metakognitiven Ebene. Demgemäß können anhand des Taschenrechnereinsatzes mit den Lernenden Grenzen, Vorteile und die Bedeutung des digitalen Mediums bzw. Arbeitsmittels oder notwendige Kompetenzen im Umgang mit ihm reflektiert werden. Typischerweise wird der Taschenrechner zur Reduktion des Rechenaufwands im Kontext der Ergebnisermittlung von Anwendungs- und Sachaufgaben eingesetzt. So können etwa Zahlen aus der Umwelt und realistische Sachsituationen im Mathematikunterricht der Grundschule fokussiert werden (Spiegel, 1988). Jedoch ist es hierzu notwendig, dass von den Schüler*innen ein Verständnis für die Aufgabe und auszuwählende Operation sowie für den entsprechenden Größenbereich vorhanden ist, um mögliche Ergebnisse vor der Bearbeitung der Aufgabe abschätzen und die mithilfe des Taschenrechners ermittelten Ergebnisse im Aufgabenkontext interpretieren zu können (Krauthausen, 2018).

2.2 KI-basierte Taschenrechner

In der fachdidaktischen Literatur wird auf vielfältige Einsatzmöglichkeiten für den Taschenrechner in der Grundschule verwiesen, wobei einige der Szenarien über die Rechenmethode hinaus unmittelbar auf die spezifischen Funktionen des digitalen Mediums bzw. Arbeitsmittels bezogen werden. Demgemäß schließt sich die

Frage an, was der herkömmliche Taschenrechner im Vergleich zu KI-basierten Taschenrechnern eigentlich nicht kann (Polya, 1995). Vor diesem Hintergrund wird im Folgenden vor allem auf die Funktionsweisen von KI-Technologien Bezug genommen, zumal die Palette an Definitionen von KI äußerst breit ist (Legg & Hutter, 2007). Prinzipiell zielt KI jedoch darauf ab, technische Systeme aus Algorithmen und statistischen Methoden zu schaffen, die in der Lage sind, Probleme zu lösen. Dieser Vorgang wird aufgrund der Nähe zu menschlichen Denkprozessen und -fähigkeiten oder Verhalten als intelligent empfunden (Russell & Norvig, 2009). Für die Mathematikdidaktik schlagen Van Vaerenbergh und Pérez-Suay (2022) folgende Taxonomie von Funktionsweisen vor, die sich innerhalb von KI-Systemen unterscheiden lassen. *Information extractors* entnehmen mithilfe von Kameras, Mikrofonen o.Ä. (mathematische) Informationen aus der Umwelt (z. B. visuelle oder auditive Daten) und wandeln sie in eine für das System verwertbare digitale mathematische Repräsentation um. *Reasoning engines* erkennen in diesen Repräsentationen der realen Welt (Input) das mathematische Problem, verarbeiten es auf Softwareebene (sog. black-box) und gelangen zu einem korrespondierenden Ergebnis (Output). *Explainers* übersetzen diesen noch maschinellen Code in eine für den Menschen logisch interpretierbare Lösung des ursprünglichen mathematischen Problems. Darüber hinaus schließt ein *data-driven Model* nach dem Empfang von Daten aus verschiedenen Quellen auf ein Modell, das für Vorhersagen verwendet werden kann.

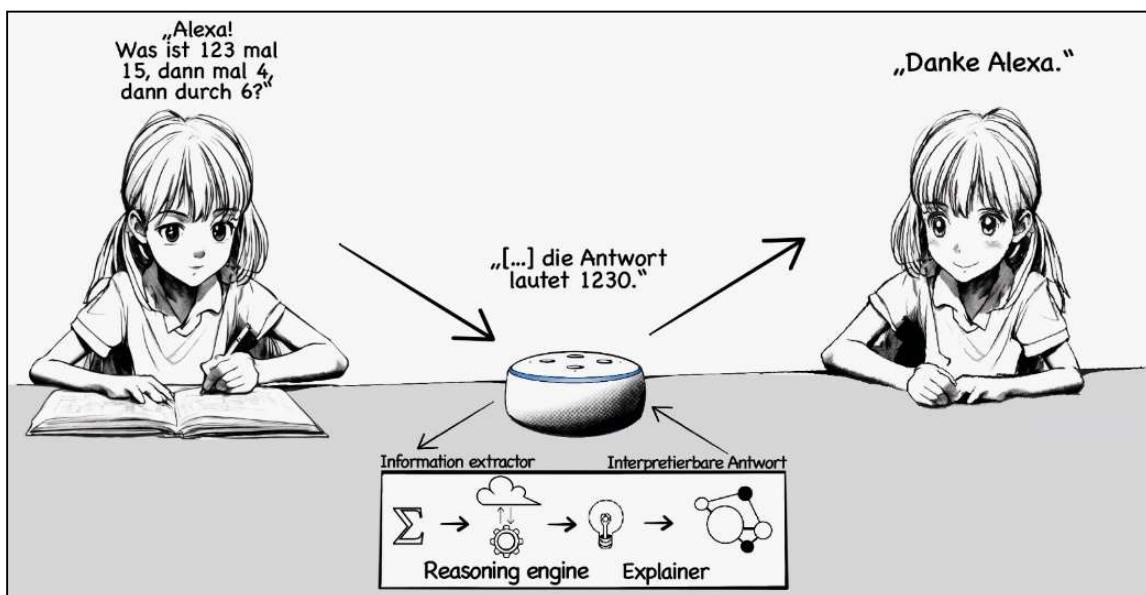


Abbildung 1: Arbeitsprozess des KI-basierten Taschenrechners *Alexa*.

Bis auf ein *data-driven Modeling* bzw. ähnliche generative Fähigkeiten bedienen sich KI-basierte Taschenrechner wie *Alexa* von *amazon* (Vaerenbergh & Pérez-Suay, 2022) (bisher) der Funktionsweisen von Informationsentnahme, Bearbeitung des mathematischen Problems in der black-box und Übersetzung des Ergebnisses im Sinne einer verständlichen Antwort auf die mathematische Frage (Abb. 1). Das in unterschiedlicher Hardware (z. B. *amazon Echo*) integrierte *sprache-*

gesteuerte Assistenzsystem nutzt dabei eine KI und maschinelles Lernen, um Anfragen zu verstehen und Aufgaben zu bearbeiten, indem es auf vordefinierte Algorithmen und (Online-)Datenbanken zugreift (Weiss et al., 2021). Voraussetzung für die Verwendung ist, dass die Hardware mit dem Internet verbunden ist, da *Alexa* mit dem cloudbasierten Service *Amazon Voice Service (AVS)* – der eigentlichen KI hinter dem Sprachassistenten – kommuniziert (Chung et al., 2017). Diese KI nutzt weitere Cloudsysteme und teilweise Anwendungen von Drittanbietern, um notwendige Daten zu sammeln und Lösungen mit Quellen außerhalb des Problems zu vernetzen (Vaerenbergh & Pérez-Suay, 2022), wobei Details ihrer *reasoning engine* und black-box als Betriebsgeheimnis von *amazon* gelten:

“Like other cloud services, Alexa operates using pre-defined APIs to transceive data, but unfortunately the available API list is not officially open to the public” (Chung et al., 2017, S. 17).

3. Die Studie

3.1 Ziel und Forschungsfragen

Mit Blick auf die eingangs skizzierte Trivialisierung menschlichen Denkens und Handels durch KI und einen sinnvollen Umgang mit ihr im Mathematikunterricht (Hischer, 2023) scheint es sinnvoll, zunächst die Nutzung ihrer erweiterten Funktionsweisen auf Ebene der Lernenden zu untersuchen. Das Ziel der explorativen Studie liegt daher in der Identifikation der Nutzungsweisen von Kindern (Walter, 2018) bei der Verwendung von KI-basierten Taschenrechnern. Hierzu sollen die beiden Forschungsfragen beantwortet werden:

1. Inwiefern nutzen Kinder Funktionsweisen des KI-basierten Taschenrechners bei der Bearbeitung von Aufgaben, die in der einschlägigen Literatur für den Taschenrechnereinsatz als geeignet beurteilt werden?
2. Welche Unterschiede ergeben sich hinsichtlich der Nutzungsweisen zwischen herkömmlichen und KI-basierten Taschenrechnern?

3.2 Anmerkungen zur Aufgabenauswahl

Zunächst wurden Nutzungsweisen von Kindern beim KI-basierten Taschenrechnereinsatz anhand unterschiedlicher Aufgaben mithilfe der Methode des klinischen Interviews (Selter & Spiegel, 1997) und einer anschließenden qualitativen Inhaltsanalyse (Mayring, 2015) im Rahmen einer Vorstudie erkundet. Auch wenn es im anglo-amerikanischen und britischen Raum durchaus die Tendenz gibt, Taschenrechner in allen Jahrgangsstufen einzusetzen, wurden gemäß des deutschen mathematikdidaktischen Konsens (Padberg & Benz, 2021) die Vor- und Hauptstudie mit Schüler*innen der vierten Klasse durchgeführt. In Anbetracht der Vorreiterstellung und des Bekanntheitsgrads von *Alexa* bei den Kindern (Bader, 2022) wurde sich für diesen Sprachassistenten und die Hardware *Amazon Echo Dot* der dritten Generation entschieden (Kap. 2.2).

Begründet durch die Eindrücke aus der Vorstudie und die Empfehlungen der einschlägigen Literatur zum Taschenrechnereinsatz in der Grundschule (Kap. 2.1) wurde eine Auswahl von Aufgaben für die Hauptstudie getroffen (Tab. 1). Da es bislang an eigens für die Arbeit mit KI-basierten Taschenrechnern speziell konstruierten Aufgabenstellungen fehlt, wurden im Sinne der Funktionen nach Spiegel (1988) *Anlässe für neuartige Problemstellungen* und *Anlässe zur Auseinandersetzung mit metakognitiven Fragestellungen* ausgeklammert. Die verbleibenden Funktionen des Taschenrechners als *Instrument zur Ergebniskontrolle*, zum *Entdecken von Gesetzmäßigkeiten* und zur *Ergebnisermittlung von (Anwendungs- und Sach-)Aufgaben* bilden daher die Grundlage der Aufgabenauswahl in Anlehnung an Padberg und Benz (2021, S. 328, 332, 336).

Aufgabe	Aufgabenstellung	Funktion des Taschenrechners	Ziel des Taschenrechnereinsatzes
Nachbarzahlen	„Welche beiden Nachbarzahlen ergeben multipliziert das Produkt (306; 1122; 10302)?“	Instrument zur Ergebniskontrolle	Überschlagendes Rechnen.
Dreistellige Zahl	„Wähle eine dreistellige Zahl. Rechne nach der Regel. Schreibe deine Zwischenschritte auf. Was fällt dir auf? Warum ist das so? Begründe. (z. B. Erst mal 15, dann mal 4, dann durch 6.)“	Entdecken von Gesetzmäßigkeiten	Entlastung von der reinen Rechenarbeit und Schaffen von Kapazitäten für das Aufstellen von Vermutungen und deren Überprüfung anhand zahlreicher Aufgaben und deren Modifikation.
Millionär	„Der 10-jährige Peter nimmt sich an Silvester vor, eine Million Euro zu sparen. a) Wie viel Geld muss Peter täglich in sein Sparschwein werfen, um in 20 Jahren Millionär zu sein? b) Peter will jeden Tag 2 Euro sparen. Schafft er es so, in seinem Leben Millionär zu werden? Begründe.“	Ergebnisermittlung von (Anwendungs- und Sach-)Aufgaben	Konzentration auf das Finden adäquater arithmetischer Operationen, unterschiedlicher Lösungswege und das Überprüfen der Ergebnisse auf ihre Plausibilität. Auseinandersetzung mit realistischer Situation und entsprechendem Zahlenraum.

Tabelle 1: Aufgabenauswahl für die Hauptstudie.

3.3 Anmerkungen zu Rahmenbedingungen

An der Hauptstudie zur Identifikation der Nutzungsweisen bei der Verwendung von KI-basierten Taschenrechnern nahmen 19 Kinder der vierten Jahrgangsstufe im zweiten Schulhalbjahr teil. Die Kinder wurden in zwei zueinander möglichst geschlechts- und notenhomogene Gruppen eingeteilt. Gruppe A stand zur Bearbeitung der Aufgaben (Tab. 1) ein herkömmlicher Taschenrechner, Gruppe B ein KI-basierter Taschenrechner (*Alexa*) zur freien Verfügung. Vor Beginn der maximal 30-minütigen Aufgabenbearbeitung, die im Rahmen leitfadengestützter Einzelinterviews stattfand, erhielten die teilnehmenden Kinder die Gelegenheit, sich mit der Bedienung von *Alexa* zunächst in nicht-mathematischen Kontexten vertraut zu

machen (z. B. „Alexa, was ist die Hauptstadt von Frankreich?“ „Alexa, stopp!“). In beiden Gruppen wurden im Sinne eines kurzen Warm-ups zudem typische Kopfrechenaufgaben gestellt und ggf. mithilfe des Arbeitsmittels überprüft – auch um die Möglichkeit zur Bedienung des herkömmlichen Taschenrechners zu eröffnen, da er den Kindern im Mathematikunterricht bisher nicht zur Verfügung stand. Allen Kindern war der Sprachassistent *Alexa* aus ihrem eigenen oder einem anderen Haushalt bekannt.

3.4 Anmerkungen zur Methode und Auswertung

Der qualitative Zugang des klinischen Interviews zielte auf die Rekonstruktion der Denk- und Vorgehensweisen der Kinder bei der Aufgabenbearbeitung (Selter & Spiegel, 1997), die zur Auswertung videografiert wurde. Neben den videografierten Interviews wurden zudem Lösungen und Produkte der Kinder sowie Beobachtungsprotokolle im Sinne einer Daten-Triangulation mithilfe der qualitativen Inhaltsanalyse nach Kuckartz (2018) ausgewertet. Die Entscheidung fiel im Vergleich zur Vorstudie von Mayring (2015) auf Kuckartz (2018), um iterativ und stärker datenmaterialgeleitet ein deduktiv-induktives Categoriesystem zu erstellen. Die InterCoderreliabilität ist substantiell ($\kappa = .72$), wobei die Autoren als InterCoder fungierten.

4. Ergebnisse

4.1 Identifizierte Nutzungsweisen

Das Ziel der explorativen Studie lag in der Identifikation der Nutzungsweisen von Kindern bei der Verwendung von KI-basierten Taschenrechnern. In Tabelle 2 sind als Ergebnis Ober- und Unterkategorien der Nutzungsweisen und ihrer Definitionen sowohl bei der Verwendung von herkömmlichen als auch von KI-basierten Taschenrechnern dargestellt.

1. *Inwiefern nutzen Kinder Funktionsweisen des KI-basierten Taschenrechners bei der Bearbeitung von Aufgaben, die in der einschlägigen Literatur für den Taschenrechnereinsatz als geeignet beurteilt werden?*

Die Kinder der Gruppe B nutzten *Alexa* bei der Bearbeitung der Aufgaben (Kap. 3.2) auf vielfältige Weise. Als *Hilfsmittel* wurde die KI zur Ergebnisberechnung im Sinne der Rechenmethode Taschenrechner verwendet. Außerdem erfüllte die KI die basale Funktion des Taschenrechners bei der Ergebniskontrolle, dem intuitiven Probieren und der Speicherung von (Zwischen-)Ergebnissen. Darüber hinaus konnte beobachtet werden, wie die Kinder Funktionsweisen und Arbeitsprozesse des KI-basierten Taschenrechners als *erweitertes Hilfsmittel* nutzten, indem sie mögliche aufgabenrelevante Informationen in Erfahrung brachten (Kap. 4.2) oder das unmittelbar mit der Aufgabenstellung korrespondierende mathematische Problem zu lösen versuchten. Als vermeintlich allwissendes *sprachgesteuertes Assistenzsystem* mit weiblicher Sprachausgabe wurde *Alexa* zudem von den Kindern

der vierten Jahrgangsstufe als *Tutorin* vereinnahmt, indem ganze Aufgabenstellungen weitergegeben wurden, zum Teil über das mathematische Probleme hinausgehende Hilfe eingefordert oder sich in einigen Fällen bei Alexa wie im Umgang mit Personen bedankt wurde.

Oberkategorie	Taschenrechner	KI-basierter Taschenrechner	Definition
Hilfsmittel	Ergebnisberechnung	Ergebnisberechnung	Rechenmethode „Taschenrechner“
	Ergebniskontrolle	Ergebniskontrolle	Ein zuvor von den Lernenden selbst ermitteltes Ergebnis wird mit Hilfe des Taschenrechners kontrolliert.
	Intuitives Probieren	Intuitives Probieren	Sukzessives Annähern an die Lösung durch intuitives Probieren oder systematisches Verändern von Zahlenwerten und Operationen.
	Speicherung von (Zwischen-)Ergebnissen	Speicherung von (Zwischen-)Ergebnissen	Taschenrechner: Bildschirmanzeige <i>Alexa</i> : Die Lernenden lassen sich ein Ergebnis, durch einen entsprechenden Befehl, erneut in versprachlichter Form ausgeben.
Erweitertes Hilfsmittel		Ermittlung aufgabenrelevanter Informationen	Die Lernenden verwenden <i>Alexa</i> ähnlich digitalen oder analogen Nachschlagewerken, indem sie gezielt Informationen abfragen.
		Formulierung des mathematischen Problems	Das mathematische Problem wird von den Lernenden umformuliert: „ <i>Alexa</i> , wie kann man 306 teilen?“
Tutorin		Weitergabe der Aufgabe	Die Aufgabenstellung wird im Wortlaut an <i>Alexa</i> weitergegeben.
		Einforderung verstehensbezogener Hilfe	Die Lernenden äußern gegenüber <i>Alexa</i> , dass sie die Aufgabe nicht verstehen bzw. erfragen Begriffsbedeutungen o.Ä.
		Personifikation von <i>Alexa</i>	Lernende kommunizieren mit <i>Alexa</i> , wie mit einem Lebewesen. Sie bedanken sich oder streicheln das Gerät.

Tabelle 2: Ober- und Unterkategorien der identifizierten Nutzungsweisen.

2. Welche Unterschiede ergeben sich hinsichtlich der Nutzungsweisen zwischen herkömmlichen und KI-basierten Taschenrechnern?

Durch die Beobachtungen und den Vergleich der Nutzungsweisen in den Gruppen A und B wurde deutlich, dass der herkömmliche Taschenrechner in der Grundschule in seiner Funktion als *Hilfsmittel* vor allem auf die Bewältigung von Rechenanforderungen und basale Funktionen wie die Ergebniskontrolle und Durchführung arithmetischer Operationen beschränkt ist. Die Nutzung des KI-basierten Taschenrechners als *erweitertes Hilfsmittel* und als *Tutorin* ist analog dazu auf

seine soft- und hardwareabhängigen Arbeitsprozesse und einzelnen (intelligent wirkenden) Funktionsweisen der Informationsentnahme, Bearbeitung des mathematischen Problems in der black-box und Übersetzung des Ergebnisses zurückzuführen (Kap. 2.2), wobei er dabei gleichzeitig basale Funktionen des herkömmlichen Taschenrechners erfüllt (Kap. 4.2).

4.2 Spotlight und weitere Eindrücke

Die identifizierte Nutzungsweise von Kindern bei der Verwendung des KI-basierten Taschenrechners *Ermittlung aufgabenrelevanter Informationen* (Unterkatégorie von *erweitertes Hilfsmittel*) zeichnet sich vor allem durch das gezielte Abfragen von Inhalten zu korrespondierenden (Teil-)Aspekten der Aufgabenstellung aus, um zu einer Lösung zu gelangen. Bei allen Schüler*innen, die mithilfe von *Alexa* Aufgaben bearbeiteten, konnte diese Nutzungsweise in unterschiedlichem Ausmaß beobachtet werden (Z. 1). Kinder stellten *Alexa* u. a. Fragen zum Durchschnittsalter von Menschen oder zur Anzahl von Tagen pro Jahr. Das folgende Vorgehen und die Interaktion mit *Alexa* bei der Bearbeitung der Aufgabe „Millionär b)“ (Tab. 1) liefert ein entsprechendes Beispiel (Tab. 3), bei dem der Schüler durch allmähliches Annähern (basale Funktion des Taschenrechners) zu einer Lösung des mathematischen Problems kommt (Abb. 2):

1	S	Äh, wie viele Tage hat nochmal ein Jahr? Alexa, wie viele Tage hat ein Jahr?
2	A	Ein Jahr sind 365 Tage.
3	S	Alexa, wie viel ist 365 mal zwei?
4	A	365 mal zwei ist 730.
5	S	<i>(Notiert die Rechnung)</i>
6		Okay. Alexa, was ist 730 mal 30?
7	A	730 mal 30 ist 21.900.
8	S	<i>(Überlegt länger)</i> Alexa, was ist 730 mal 50?
9	A	730 mal 50 ist 36.500.
10	S	<i>(Nach einem kurzen Gespräch mit dem Interviewer über sein Vorgehen äußert der</i>
11		<i>Schüler die Vermutung, dass Menschen im Durchschnitt 80 Jahre alt werden)</i>
12		Alexa, was ist 730 mal 80?
13	A	730 mal 80 ist 58.400.
14	S	Entweder muss er richtig alt werden, oder ich rechne es einfach falsch.
15		<i>(Schreibt eine Lösung auf)</i>

Tabelle 3: Ermittlung aufgabenrelevanter Informationen – Schüler*in 12.

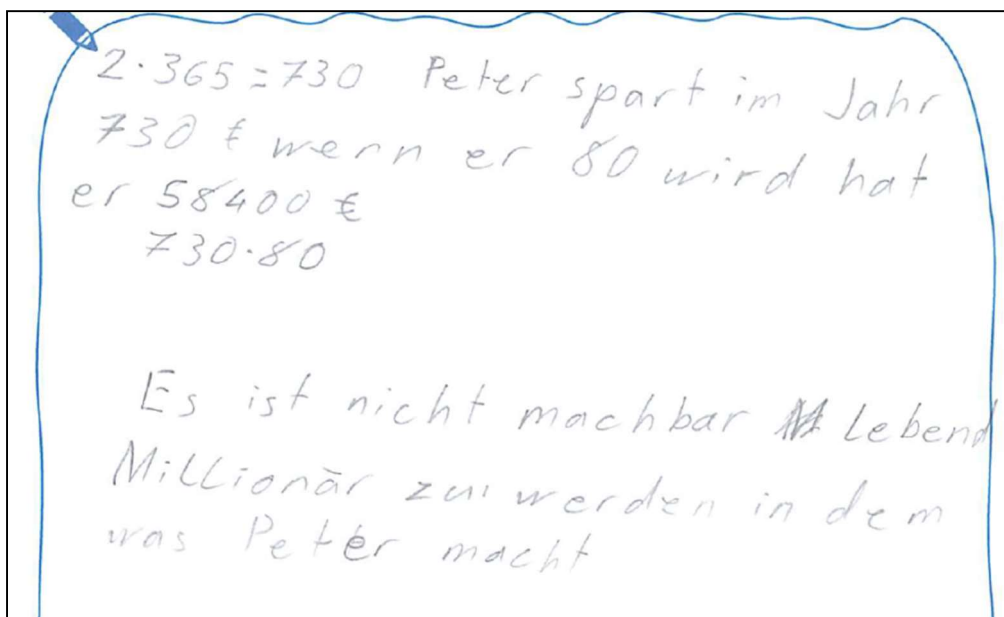


Abbildung 2: Lösung zur Aufgabe „Millionär“ – Schüler*in 12.

Neben den identifizierten Nutzungsweisen bei der Verwendung von herkömmlichen und KI-basierten Taschenrechnern waren während der klinischen Interviews in einigen Fällen *Ressentiments und Ablehnung* auf Seiten der Schüler*innen gegenüber des Gebrauchs solcher Hilfsmittel zu beobachten. So erklärten jene Kinder, man lerne nichts oder es handle sich um „Schummeln“, Aufgaben mit einem Taschenrechner zu bearbeiten – passend dazu das folgende Zitat:

„Man hat nix davon, man kann es dann auch direkt einfach sein lassen mit Mathe. Man muss es ja auch lernen und wenn man jetzt einfach alles nachguckt, oder auf'm Taschenrechner oder so, nützt es auch nix.“

Zum Teil begründeten die Lernenden ihre Ablehnung gegenüber dem KI-basierten Taschenrechner mit dem Ehrgeiz, die Aufgaben selbstständig lösen zu wollen („Ich mach das immer eher lieber selber.“). Einige Schüler*innen äußerten ein gewisses Misstrauen gegenüber den Fähigkeiten des KI-Systems und dessen möglichen Ergebnissen („Die Alexa hilft mir auch nicht weiter irgendwie; Textaufgaben kann sie nicht so gut.“). Demgegenüber waren Kinder, die mit dem Gebrauch von *Alexa* in ihrem häuslichen Umfeld bereits vertraut waren, in der Lage, die Aufgabenstellungen passend für *Alexa* zu paraphrasieren oder im Sinne der Nutzungsweise *Formulierung des mathematischen Problems* den Kern der Aufgabe an den KI-basierten Taschenrechner zu übergeben. Darüber hinaus war bei einigen Schüler*innen eine *unreflektierte Reproduktion der Antworten* des KI-Systems zu beobachten. So wurden vermeintlich korrekte Aufgabenlösungen von *Alexa*, die auf eine simple und wenig intelligent anmutende Recherche des Systems in der Cloud zurückzuführen sind, durch die Schüler*innen zu Papier gebracht, ohne die Ergebnisse vor dem Hintergrund der eigentlichen Aufgabenstellung auf ihre Plausibilität zu überprüfen:

1	S	Alexa, wie lange müsste ich sparen, dass ich in 20 Jahren Millionärin bin?
2	A	Wenn Sie 1.000 US-Dollar pro Monat in einem Aktienfond sparen und die Börse
3		Renditen erzielt, die den historischen Ergebnissen ähneln, könnten Sie in etwa 20
4		Jahren Millionär sein.
5	S	(<i>Schaut kurz auf und notiert das Ergebnis</i>)

Tabelle 4: Unreflektierte Reproduktion der Antwort – Schüler*in 17.

5. Diskussion

Wie gezeigt existieren zahlreiche Empfehlungen für den Taschenrechnereinsatz in der Grundschule (Krauthausen, 2018; Padberg & Benz, 2021), die sich auf seine Funktionen zurückführen lassen (Spiegel, 1988). Offen ist dagegen, wo die Einsatzmöglichkeiten für eine neue Generation von Taschenrechnern liegen (Vaerenbergh & Pérez-Suay, 2022), deren technische Systeme die Bewältigung von Rechenanforderungen und das Lösen mathematischer Probleme im Sinne von Aspekten menschlichen Denkens und Handels vermeintlich trivialisieren (Hischer, 2023). Anhand der empirischen Eindrücke und identifizierten Nutzungsweisen von Kindern bei der Verwendung von KI-basierten Taschenrechnern lassen sich mögliche Ankerpunkte eines KI-basierten Taschenrechnereinsatzes in der Grundschule diskutieren.

Prinzipiell können didaktische Konzepte und Voraussetzungen des herkömmlichen auf den KI-basierten Taschenrechnereinsatz übertragen werden (Kap. 2.1), da basale Funktionen des Taschenrechners wie die *Ergebniskontrolle* und das *Entdecken von Gesetzmäßigkeiten* auch mit dem KI-basierten Taschenrechner erfüllt werden. Besondere Stärken des KI-basierten Taschenrechners kommen vor allem bei der Ergebnisermittlung und Bearbeitung von (komplexen) Anwendungs- und Sachaufgaben zum Tragen (Kap. 4), da er dort *erweiterte Hilfestellungen* bietet und möglicherweise selbstständiges Arbeiten eröffnet – Eigenschaften, die ihn für digitale Lernumgebungen interessant machen könnten (Roth, 2022). Analog zum herkömmlichen Taschenrechnereinsatz sollte auf Seiten der Schüler*innen ein Verständnis für die jeweilige Sach- und Anwendungsaufgabe vorhanden sein, um die mithilfe des KI-basierten Taschenrechners ermittelten Ergebnisse interpretieren zu können. Vor dem Hintergrund des eingangs skizzierten „Déjà-vu-Erlebnis“ (Hischer, 2023, S. 6) ist die Voraussetzung für einen sinnvollen KI-basierten Taschenrechnereinsatz auch hier, dass die Schüler*innen „den [KI-basierten] Taschenrechner und seine Möglichkeiten und Grenzen umfassend kennen lernen [...]“ (Meißner, 2006). Demgemäß lassen sich entsprechende Anlässe zur *Auseinandersetzung mit metakognitiven Fragestellungen* (Spiegel, 1988) schaffen, die in der vorliegenden Studie nicht explizit betrachtet wurden, deren Notwendigkeit sich jedoch anhand der Ressentiments und Vorurteile (Déjà-vu: der Taschenrechner als „Rechenvermeidungsgerät“) auf Seiten der Schüler*innen gegenüber KI-basierten Taschenrechnern, aber auch der *Personifikation von Alexa*, begründen lässt. Insbesondere die *unreflektierte Reproduktion* von Antworten des KI-Systems erinnert wieder an Dagewesenes:

„There is a saying in the computer world: ‚Garbage in, garbage out‘. When using a computer or calculator, there is still a vital need for the user to check the results for sensibleness“ (Levin 1981, S. 423).

Levins Aussage, die Eindrücke der vorliegenden Studie und die Vorgaben der Kultusministerkonferenz zur Entfaltung informatischer Kompetenzen in nicht-informatischen Kontexten im Mathematikunterricht der Grundschule (KMK, 2022, S. 8) weisen auf die Relevanz von *Anlässen zur Auseinandersetzung mit neuartigen Problemstellungen* hin, bei denen kreatives Modellieren, Strukturieren und kritisches Interpretieren von Informationen eröffnet werden. Teilaspekte informatischer Kompetenzen wie das strukturierte Zerlegen und Lösen von Aufgaben, konnten beim KI-basierten Taschenrechnereinsatz der Kinder und ihrer Nutzungsweise *Formulierung des mathematischen Problems* beobachtet werden („Welche Fragen soll ich *Alexa* stellen?“ „Welche Teilaspekte der Aufgabe/ des mathematischen Problems sind zunächst relevant?“). Mithin dürften sich prinzipiell auch solche KI-Systeme in das Curriculum des Mathematikunterrichts der Grundschule verorten lassen (Van Vaerenbergh & Pérez-Suay, 2022).

In Bezug auf die Belastbarkeit der Studienergebnisse ist deren thesenhafter Charakter zu betonen, der sich schon aus den Limitationen des explorativen Studiendesigns ergibt, etwa hinsichtlich des Problems der Generalisierung (Mayring, 2015). Zudem wurde auf den Schritt einer komparativen Analyse verzichtet (Glaser & Strauss, 2005), sodass Fragen hinsichtlich der Unterschiede und Deutung der Nutzungsweisen offenbleiben. Entsprechende Anschlussuntersuchungen wären mit einer gezielten statt zufälligen Fallauswahl durchzuführen (Bortz & Döring, 2006).

Vor dem Hintergrund der digitalen Entwicklung und Potenziale ihrer Systeme werden damals wie heute Forderungen laut, didaktische Konzepte auf der Grundlage mathematikdidaktischer Erkenntnisse zu entwickeln und hinsichtlich ihrer Wirksamkeit zu prüfen (Ladel, 2022; Weber & Benölken, 2023) – ein Anspruch der in Anbetracht der Geschwindigkeit des technischen Fortschritts seit jeher zu „didaktischen Herausforderungen“ führt (Hischer, S. 6). Eine zu erwartende Reduzierung der Anzahl der Eingaben und Rechenschritte, die Lernende durchführen müssen, um zur Lösung einer Aufgabe zu gelangen (Van Vaerenbergh & Pérez-Suay, 2022) konnte in der vorliegenden Studie beim Einsatz des KI-basierten Taschenrechners *Alexa* nicht beobachtet werden. Jedoch ist darauf hinzuweisen, dass etwa die unterschiedliche Handhabung und Bedienung der Werkzeuge (Tasten des Taschenrechners, die mit der Hand bedient werden vs. Sprachsteuerung bei *Alexa*) nicht explizit berücksichtigt worden sind. Wenngleich „digitale Medien individuelle Zugangsweisen einer heterogenen Schülerschaft [nicht] per se [...] unterstützen“ (Walter & Dixel, 2020, S. 77), könnten Unterschiede in ihrer Handhabung für individuelle Beeinträchtigungen und mögliche Unterstützungsbedarfe von Schüler*innen relevant sein. Die nahe Aussicht auf *sprachgesteuerte Assistenzsysteme*, die mit einer generativen KI ausgestattet sind (Rausch, 2023), dürfte analog

zum mathematikdidaktischen Diskurs über *ChatGPT* zur Frage führen (in Anlehnung an Hischer, 2023, S. 11): Wie ist dann damit sinnvollerweise in der Grundschule umzugehen?

Literatur:

- Bader, M. (2022). Hey Alexa ... was ist sechs mal sieben? Eine explorative Studie zur Nutzung von künstlichen Intelligenzen durch Kinder mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen am Beispiel der Multiplikation. Bachelorthesis: Bergische Universität Wuppertal.
- Becker, J., & Selter, C. (1996). Elementary School Practices. In A. Bishop, A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Hrsg.), *International Handbook on Mathematics Education* (S. 511–564). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-94-009-1465-0_15
- Bortz, J., & Döring, N. (2006). *Forschungsmethoden und Evaluation für Human- und Sozialwissenschaftler*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-33306-7>
- Buchholtz, N., Baumanns, L., Huget, J., Peters, F., Pohl, M. & Schorcht, S. (2023). Herausforderungen und Entwicklungsmöglichkeiten für die Mathematikdidaktik durch generative Sprachmodelle. *GDM Mitteilungen*, 114, 19–26.
- Chung, H., Jungheum, P., & Lee, S. (2017). Digital forensic approaches for Amazon Alexa ecosystem. *Digital Investigation*, 22, 15–25.
<https://doi.org/10.1016/j.diin.2017.06.010>
- Fuchs, M., & Käpnick, F. (Hrsg.) (2009). *Mathe für kleine Asse* (Klassen 3 und 4, Bd. 2). Cornelsen.
- Glaser, B. G., & Strauss, A. L. (2005). *Grounded theory: Strategien qualitativer Forschung*. Huber.
- Hischer, H. (2023). ChatGPT und Mathematikunterricht – eine didaktische Herausforderung? *GDM Mitteilungen*, 115, 6–11.
- Hoffmann, S. & Spiegel, H. (2006). Ein ›defekter‹ Taschenrechner. Ausgangspunkt für substanzielle Aufgabenformate im Mathematikunterricht. *Grundschule*, 38(1), 44–46.
- KMK (2022). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik Primarbereich*. Berlin.
- Kovács, Z., & Recio, T. (2020). Geogebra reasoning tools for humans and for automations. In *Proceedings of the 25th Asian Technology Conference in Mathematics* (S. 16–30). Mathematics and Technology. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.26851.58407>
- Krauthausen, G. (2020). Tablets ante portas. Innovation oder / und Déjà-vu (?) In B. Brandt, L. Bröll & H. Dausend (Hrsg.), *Digitales Lernen in der Grundschule II – Aktuelle Trends in Forschung und Praxis* (S. 40–59). Waxmann.
- Krauthausen, G. (2018). *Einführung in die Mathematikdidaktik – Grundschule*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-54692-5>

- Krauthausen, G. (2012). *Digitale Medien im Mathematikunterricht der Grundschule*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2277-4>
- Kuckartz, U. (2018). *Qualitative Inhaltsanalyse: Methoden, Praxis, Computerunterstützung*. Beltz.
- Ladel, S. (2022). Tablet-Apps zur Unterstützung des Erwerbs arithmetischer Kompetenzen. In G. Pinkernell, F. Reinhold, F. Schacht, & D. Walter (Hrsg.), *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule* (S. 189–211). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-65281-7_9
- Legg, S., & Hutter, M. (2007). *A Collection of Definitions of Intelligence*. Technical Report, IDSIA 07-07. <https://doi.org/10.48550/arXiv.0706.3639>
- Levin, J. A. (1981). Estimation techniques for arithmetic: Everyday math and mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 421–434. <https://doi.org/10.1007/BF00308140>
- Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Technik*. Beltz.
- Meißner, H. (2006). Taschenrechner im Mathematikunterricht der Grundschule. *mathematica didactica*, 29(1), 5–25.
- Padberg, F., & Benz, C. (2021). *Didaktik der Arithmetik: fundiert, vielseitig, praxisnah*. Springer Spektrum.
- Plunkett, S. (1987). Wie weit müssen Schüler heute noch die schriftlichen Rechenverfahren beherrschen? *mathematik lehren*, (21), 43–46.
- Polya, G. (1995). *Schule des Denkens: Vom Lösen mathematischer Probleme*. Francke.
- Rausch, D. (2023, September 20). *Previewing the future of Alexa*. <https://www.aboutamazon.com/news/devices/amazon-alexa-generative-ai>
- Roth, J. (2022). Digitale Lernumgebungen – Konzepte, Forschungsergebnisse und Unterrichtspraxis. In G. Pinkernell, F. Reinhold, F. Schacht, & D. Walter (Hrsg.), *Digitales Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule* (S. 109–136). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-65281-7_6
- Russell, S., & Norvig, P. (2009). *Artificial intelligence: A modern approach*. Prentice Hall Press.
- Ruthven, K. (2007). Towards a Calculator-Aware Number Curriculum. In J. Novotná & H. Moraová (Hrsg.), *Proceedings of the International Symposium Elementary Maths Teaching – SEMT* (S. 9–22). Charles University, Faculty of Education, Prague.
- Selter, C., & Spiegel, H. (1997). *Wie Kinder rechnen*. Klett.
- Spiegel, H. (1988). Vom Nutzen des Taschenrechners im Arithmetikunterricht der Grundschule. In P. Bender (Hrsg.), *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter* (S. 177–189). Cornelsen.
- Van Vaerenbergh, S., & Pérez-Suay, A. (2022). A Classification of Artificial Intelligence Systems for Mathematics Education. In P. R. Richard, M. P. Vélez, & S. Van Vaerenbergh (Hrsg.), *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence: How Artificial Intelligence can Serve Mathematical Human Learning* (S. 89–106). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-86909-0_5

- Walter, D. (2018). *Nutzungsweisen bei der Verwendung von Tablet-Apps*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-19067-5>
- Walter, D. & Dexel, T. (2020). Heterogenität im Mathematikunterricht der Grundschule mit digitalen Medien begegnen? *Zeitschrift für Grundschulforschung*, 13, 65–80. <https://doi.org/10.1007/s42278-019-00071-6>
- Wittmann, E. C., & Müller, G. N. (2018). *Handbuch produktiver Rechenübungen – Band 2: Halbschriftliches und schriftliches Rechnen*. Ernst Klett.
- Weber, D., & Auhagen, W. (2023). Potenzialorientierte Förderung aller Kinder unter digitalen Möglichkeiten – Konsequenzen für ein Konzept zur Förderung mathematisch begabter Kinder in der Grundschule. In Kongressband 7. Münsterscher Bildungskongress: *Potenziale erkennen – Talente entwickeln – Bildung nachhaltig gestalten*. Waxmann [im Druck].
- Weber, D., & Benölken, R. (2023). Das Lehr-Lern-Labor „MaKosi 2.0“: Ein hybrides Beispielkonzept für die Förderung von Kindern mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen. *Die Materialwerkstatt. Zeitschrift für Konzepte Und Arbeitsmaterialien für Lehrer*innenbildung Und Unterricht*, 5(1), 24–68. <https://doi.org/10.11576/dimawe-6491>
- Weiss, M., Ebner, M., & Ebner, M. (2021). Speech-based Learning with Amazon Alexa. In T. Bastiaens (Hrsg.), *Proceedings of EdMedia + Innovate Learning* (S. 156–163). Association for the Advancement of Computing in Education (AACE).

Möglichst kurz, aber dennoch didaktisch wertvoll – Können mathematische Erklärvideos dem Spannungsfeld beider Ansprüche gerecht werden?

In den letzten Jahren sind viele Kriterienkataloge zur Gestaltung „guter“ (mathematischer) Erklärvideos entwickelt worden. Die Fülle an Anforderungen steht jedoch oft im Widerspruch zum Wunsch nach einer möglichst kurzen Videolänge. In diesem Beitrag wird dieses Spannungsfeld aus theoretischer Perspektive und auf Basis exemplarischer empirischer Ergebnisse analysiert, zwei Lösungsansätze (Auf- und Unterteilung eines Inhalts) diskutiert und Forschungslücken aufgezeigt.

1. Einführung

Erklärvideos sind beliebt - und das nicht nur im Bereich der Mathematik. Für Schüler*innen sind sie ein Medium, das sie dort abholt, wo sich ihre Lebensrealität außerhalb der Schule zu großen Teilen abspielt: in Interaktion mit digitalen Medien und vor allem auch auf Video-Plattformen wie YouTube oder TikTok. Laut der aktuellen JIM-Studie nutzen Jugendliche im Alter zwischen zwölf und neunzehn Jahren täglich für durchschnittlich 82 Minuten YouTube, um sich dort Videos anzusehen (Medienpädagogischer Forschungsverbund Südwest, 2022). Dass sich viele Jugendlichen einen Teil dieser Zeit auch mit schulischen Themen beschäftigen, zeigt die Studie „Jugend / YouTube / Kulturelle Bildung“ (Rat für kulturelle Bildung, 2019): von allen Befragten 12- bis 19-jährigen Jugendlichen, die YouTube nutzen, geben 47 Prozent an, dass YouTube bei schulischen Themen für sie wichtig oder sogar sehr wichtig ist. Durch die Covid-19-Pandemie bekam das Medium einen weiteren Schub, da es während des Distanzunterrichts ein asynchrones Wissensvermittlungsangebot aus der Ferne darstellen konnte (vgl. z.B. Barlovits et al., 2021).

Insgesamt werden dem Medium eine Vielzahl lernförderlicher Eigenschaften zugeschrieben. So ermöglichen Erklärvideos Lernenden beispielsweise eine selbstständige Erarbeitung des Lernstoffs im eigenen Tempo (Wetzel, 2021), die Videos können zeit- und ortsunabhängig angeschaut werden (Anders, 2019) und Wissen wird auf visuelle und auditive Weise gleichzeitig vermittelt (Brame, 2016).

In den letzten Jahren sind Erklärvideos auch in der Forschung angekommen und im Zuge dessen verschiedene Kataloge mit Kriterien für gute Erklärvideos entstanden (vgl. z.B. Marquardt, 2016; Kulgemeyer, 2020; Ratnayake et al, 2019). In verschiedenen Beiträgen wird außerdem die Forderung gestellt, dass Videos möglichst kurz sein sollen, insbesondere in nicht-mathematikspezifischen Arbeiten lässt sich diese Forderung oft finden (vgl. z.B. Bonk, 2011; Schön & Ebner, 2013; Guo et al., 2014). Auch auf Seiten der Lernenden lässt sich der Wunsch nach kurzen Videos zum Teil empirisch belegen, wie beispielsweise die Ergebnisse einer

Online-Umfrage mit $n = 1.017$ Schüler*innen der Sekundarstufe II von Wetzel und Ludwig (2021a) zeigen. Auf der anderen Seite findet sich gerade im Bereich der Mathematikdidaktik die Forderung nach Videos, die mehr als oberflächliches Prozedurenwissen vermitteln (z.B. Bersch et al., 2020; Korntreff & Prediger, 2021). Hieraus resultieren verschiedene Anforderungen an Videos: So sollen sie ein Thema anhand einer authentischen Problemstellung einführen, nötiges Vorwissen thematisieren, der Lernenden die Möglichkeit geben einen Inhalt selbst zu erarbeiten sowie typische Fehlvorstellungen ansprechen (vgl. z.B. Bersch et al, 2020; Marquardt, 2016). Versucht man diesen und weiteren Ansprüchen gerecht zu werden und gleichzeitig ein möglichst kurzes Video zu produzieren, so kann sehr herausfordernd sein, abhängig auch davon was unter einem „kurzen“ Video verstanden wird. In diesem Beitrag wird dieses Spannungsfeld theoretisch analysiert, unterstützt durch ausgewählte empirische Ergebnisse und praktische Erfahrungen der Autor*innen. Darauf aufbauend werden Forschungslücken aufgezeigt und mögliche Lösungsansätze diskutiert.

2. Das Medium Erklärvideo

Videos, die schulische bzw. bildende Inhalte vermitteln, werden unter anderem als Lern- oder Erklärvideos bezeichnet. Die Bezeichnung als Lernvideo liegt nahe, da die Intention der Nutzenden in der Regel darin liegt, etwas zu lernen. Marquardt kritisiert die Nutzung dieses Begriffs jedoch:

Gegen die Verwendung der Bezeichnung „Lernvideo“ spricht zudem, dass durch das Ansehen der Videos noch lange kein Lernen stattfinden muss, dies durch den Begriff aber möglicherweise suggeriert wird. (Marquardt, 2016, S. 8)

Es ist nicht sichergestellt, dass durch den Konsum eines Videos, in dem ein Bildungsgegenstand erläutert wird, tatsächlich ein (erfolgreicher) Lernprozess stattfindet. Dieses grundlegende Problem, dass selbst eine optimale Erklärung nicht automatisch zu erfolgreichem Lernen führt, wird auch von Kulgemeyer (2020) thematisiert im Kontext instruktionaler Erklärungen, die er als übergeordnete Theorie zur Beschreibung solcher Videos heranzieht. Die Bezeichnung als Erklärvideo erscheint daher insgesamt treffender. Dieser Begriff geht nicht auf eine mögliche Wirkung zurück, sondern beschreibt die Intention des Erstellenden und das, was tatsächlich im Video passiert. Entsprechend werden Erklärvideos von Wolf (2015) als „eigenproduzierte Filme“ definiert, „in denen erläutert wird, wie man etwas macht oder wie etwas funktioniert bzw. in denen abstrakte Konzepte erklärt werden“ (S. 123). Diese Definition ist erstmal neutral, sie verrät weder etwas über die erklärende Person noch über die Inhalte oder die Art und Weise, wie diese vermittelt werden. Zentral ist nur die Tätigkeit des Erklärens. Bednorz und Bruhn (2021) bemerken, dass es eine Vielzahl unterschiedlicher Definitionen in der Literatur gibt, die den Schwerpunkt jeweils auf andere Aspekte setzen und es nicht immer klar sei, warum eine Eigenschaft als besonders wichtig angesehen werde (S. 10). Daher soll hier in Ergänzung zu Wolf (2015) noch die Definition nach

Fiorella (2022) aus *dem Cambridge Handbook of Multimedia Learning* mit weiteren charakterisierenden Eigenschaften angeführt werden:

Instructional videos are dynamic audiovisual presentations in which an instructor delivers oral explanations while presenting corresponding visual information (e.g., graphs, diagrams, animations, or models) on the screen. (Fiorella, 2022, S. 487)

Auch hier wird von Erklärungen gesprochen, jedoch wird auch auf die mediale Form einer audiovisuellen Repräsentation eingegangen, die sich in der Regel aus einer mündlichen Erklärung und einer visuellen Unterstützung durch Grafiken, Animation oder ähnliches zusammensetzt. Die Kombination aus auditiven und visuellen Inhalten ist ein inhärenter Vorteil, der Videos der *kognitiven Theorie des multimedialen Lernens* zufolge zugesprochen wird (vgl. Mayer, 2021). Dieser Theorie liegt die Annahme zugrunde, dass Menschen unterschiedliche Kanäle besitzen, um visuelle und auditive Informationen aufzunehmen und zu verarbeiten. Da man ebenfalls davon ausgeht, dass die Aufnahmekapazität eines Menschen beschränkt ist, können oft nur Teile der Informationen, denen man ausgesetzt ist, verarbeitet werden. Die *kognitive Theorie des multimedialen Lernens* beschreibt, wie die empfangenen visuellen und auditiven Informationen im menschlichen Gehirn verarbeitet und vorselektiert, zueinander in Bezug gesetzt und mit dem Vorwissen in Verbindung gebracht werden. Die Verarbeitung gelingt dabei besser, wenn auditive und visuelle Informationen zueinander passen und sich sinnvoll ergänzen. Dies können sich Erklärvideos zunutze machen: durch gut aufeinander abgestimmte visuelle und auditive Inhalte, wird die Verarbeitung für den Lernenden erleichtert. Dadurch, dass beide Sinneskanäle stimuliert werden, gelingt die Aufnahme der Inhalte unter Umständen besser als bei einer rein visuellen Repräsentation (z.B. in Form von Texten) oder einer rein auditiven Repräsentation (z.B. in Form mündlicher Erklärungen).

Weitere Vorteile des Mediums Erklärvideos ergeben sich durch die Möglichkeiten der Steuerung: dadurch, dass ein Video pausiert oder man im Video vor oder zurückspringen kann, können schwierige Stellen wiederholt werden oder bereits Verstandenes übersprungen werden. Außerdem können Erklärungen pausiert werden, um das Gesagte nochmal selbst zu verarbeiten oder eine weiterführende Lernaktivität durchzuführen (z.B. im Falle eines mathematischen Videos das Bearbeiten einer Aufgabe). Diese Möglichkeit der Steuerung des Lerntempos ist eine Möglichkeit den Lernprozess mit Videos eher an die individuellen Bedürfnisse anzupassen und ist der meistgenannte Vorteil mathematischer Erklärvideos in einer Umfrage von Wetzels und Ludwig (2021a) unter 1.017 ausgewerteten Antworten von Schüler*innen der Sekundarstufe II in einem Freitextfeld. Auch die Verfügbarkeit der Videos auf Plattformen wie YouTube, unabhängig von Zeit und Ort (vorausgesetzt man hat ein entsprechendes Endgerät und eine funktionierende Internetverbindung) ermöglichen Erklärvideos an die individuellen Anforderungen angepasst zu nutzen (Anders, 2019).

Erklärvideos werden von Schüler*innen in verschiedenen Kontexten genutzt, welche sich durch die Einteilung in eigeninitiierte und fremdinitiierte Nutzungen unterscheiden lassen. Bei Letzterem wird das Erklärvideo in der Regel im schulischen Kontext genutzt, z.B. als Teil eines Flipped Classrooms (vgl. Bergmann & Sams, 2012) oder als alternative Form des Inputs, sowohl innerhalb als auch außerhalb des Klassenzimmers. Die eigeninitiierte Nutzung wiederum geht aus dem Bedürfnis des Lernenden hervor, sich mit dem Lerngegenstand auseinanderzusetzen, sei es aus Interesse, um sich auf eine Klausur vorzubereiten oder weil ein Thema nicht gut verstanden wurde.

Den zahlreichen Vorteilen stehen jedoch auch verschiedene Probleme gegenüber, die in Abschnitt 4 nochmal speziell im Kontext mathematischer Videos diskutiert werden. Eine häufig formulierte Kritik an Erklärvideos ist die Rolle des Lernenden als passiver Rezipient, der sein Wissen nicht selbst aktiv konstruiert (vgl. z.B. Bersch et al., 2020). Auch die zuvor angesprochene Möglichkeit ein Video durch Pausieren oder Spulen zu steuern reicht – wenn es überhaupt gemacht wird – allein nicht unbedingt aus, damit Lernende ausreichend kognitiv aktiviert werden (ebd.). Eine Möglichkeit Lernende aus der Passivität herauszuholen, kann sich durch die interaktive Gestaltung eines Erklärvideos, zum Beispiel mithilfe interaktiver Aufgaben, ergeben (vgl. Wetzel & Ludwig, 2021b). Auf diese Möglichkeit wird in Abschnitt 5 nochmal ausführlicher eingegangen.

3. Bedeutung der Videolänge

In Arbeiten zu Erklärvideos findet sich immer wieder die Forderung, dass Videos möglichst kurz sein sollen, damit Lernende fokussiert bleiben und kognitiv nicht überlastet werden (vgl. z.B. Brame, 2016). In den zwei vorgestellten Definitionen im vorherigen Abschnitt ist die Länge kein Kriterium. Es gibt jedoch auch verschiedene Definitionen, die die Länge bzw. den Faktor Zeit als charakterisierende Eigenschaft mitaufgreifen. Ein Beispiel findet sich bei Krämer und Böhrs (2017):

Explainer videos [are] a format that conveys complex facts to a target group within a very short time. (S. 254)

Ihre Empfehlung einer „sehr kurzen“ Länge begründen sie vor allem mit der Arbeit von Bonk (2011). Bonk spricht sich für eine Videolänge von 1-4 Minuten aus, diese Empfehlung wiederum basiert auf einer nicht näher definierten „kürzlich durchgeführten Umfrage mit über 1.000 Teilnehmenden“ (S. 15, eigene Übersetzung). Es bleibt unklar, wie genau sich diese doch eher präzise Angabe begründet. Insgesamt ist dieses Phänomen öfters zu beobachten: die Forderung ein Video müsse möglichst kurz sein, wird aufgegriffen basierend auf einer Empfehlung, die an anderer Stelle ausgesprochen wurde. Ein Blick in den zitierten Quellartikel zeigt jedoch zum Teil, dass die Empfehlung auf eigenen praktischen Erfahrungen ohne weitere empirische Belege basiert. Auch Schön und Ebner (2013) werden gelegentlich zitiert mit ihrer Empfehlung einer Videolänge zwischen zwei und fünf Minuten, wobei sie selbst konstatieren es komme „natürlich auch auf den Zweck und Inhalt des Videos an“ (S. 29). Ihre Empfehlung basiert unter anderem auf den

Erfahrungen aus dem Projekt „Ich zeig es Dir – HOCH 2“ in dem sie mit 9-12-Jährigen über einen Zeitraum von etwa sechs Monaten Erklärvideos produzierten und der Frage nachgingen, was ein gutes Erklärvideo ausmacht. Ob oder wie dieses Projekt empirisch begleitet wurde bleibt in dem Buch jedoch unklar.

Insgesamt sind mehr empirische Ergebnisse experimenteller Studien zum Einfluss verschiedener Videolängen auf den Lernerfolg wünschenswert. Eine der ersten größeren Studien in diesem Bereich, in der zwar nicht der Lernerfolg gemessen wurde jedoch ein Maß für den Grad an „Engagement“ mit einem Video bestimmt wurde, findet sich bei Guo et al. (2014). Die Autoren untersuchten Daten zu 6,9 Millionen Videositzungen, in denen sich Studierende mit einem Video beschäftigten („video watching sessions“) im Rahmen vier verschiedener MOOCs mit einem mathematischen oder MINT-Fokus. Zwei Faktoren beeinflussen das Maß an Engagement in der Studie: wie lange sich ein Studierender mit einem Video beschäftigt hat und ob im Anschluss eine weiterführende Aufgabe passend zum Video bearbeitet wurde. Als größtes Einflusskriterium auf den Grad des Engagements, identifizierten die Autoren die Länge eines Videos. Die mittlere Zeit, die sich Studierenden mit einem Video beschäftigten, war für Videos mit einer Länge von sechs bis neun Minuten am höchsten. Bei Videos dieser Länge lag der Median der Zeit, die sich Studierende mit dem Video beschäftigten, bei ca. sechs Minuten. Bei einer Videolänge von neun bis zwölf Minuten liegt der Median knapp darunter. Ab jedoch einer Länge von 12 Minuten und mehr fällt der Median stark ab und liegt gerade noch bei etwas mehr als drei Minuten. Die Studierenden schauen sich bei langen Videos also nur noch kurze Teilausschnitte an. Schaut man sich die Beschäftigungszeit im Verhältnis zur Videolänge an, so ist dieses Verhältnis bei Videos mit einer Länge von maximal drei Minuten am besten: mehr als 75% der Sitzungen dauerten mindestens dreiviertel der Videolänge an. Die Häufigkeit, mit der eine Anschlussaufgabe bearbeitet wurde, sank ebenfalls mit steigender Videolänge. Insgesamt fanden die Autoren einen negativen Zusammenhang zwischen Videolänge und Engagement. Das Engagement-Level ist für Videos zwischen 0 und 6 Minuten noch auf einem ähnlich hohen Niveau und fällt für Videos mit einer größeren Länge. Ein möglicher Faktor, der dies begünstigt, sei den Autoren zufolge auch, dass kürzere Videos häufig besser geplant und produziert seien, während längere Videos in der Regel klassischen Vorlesungen ähnlicher seien. Insgesamt sprechen Guo et al. (2014) eine Empfehlung für maximal sechsminütige Videos aus. Diese Empfehlung wurde schon an vielen Stellen aufgegriffen (vgl. z.B. Bednorz & Bruhn, 2021; Brame, 2016; Marquardt, 2020). Die sechs Minuten wirken zum Teil fast wie eine „magische“ Obergrenze, was aber unter Umständen auch daran liegen könnte, dass es neben der Arbeit von Guo et al. (2014) bisher wenig andere großangelegte Studien zur optimalen Länge eines Erklärvideos gibt, zumindest sind den Autor*innen keine weiteren bekannt.

4. Erklärvideos in der Mathematik: Ansprüche und Grenzen

Auch oder gerade im Bereich der Mathematik sind Erklärvideos bei Lernenden sehr beliebt (Bersch et al., 2020). Videos von Daniel Jung, Simpleclub, Lehrerschmidt oder DorFuchs gehören zu den meistgeschauten deutschsprachigen Videos auf YouTube, in denen ein mathematischer Inhalt erklärt wird (Wetzel, 2021). Das meistgesehene Video von Daniel Jung zu Parabeln und quadratischen Funktionen (<https://www.youtube.com/watch?v=KEuNUgIiIyI>) bringt es beispielsweise auf über 2,1 Millionen Views – insgesamt wurde sein Kanal mehr als 900.000-mal abonniert (Stand: 06.10.2023). Es scheint also kaum zu leugnen sein, dass diese Videos ein beliebtes Angebot darstellen und von Jugendlichen zum Lernen konsumiert werden.

Aus mathematikdidaktischer Sicht bringen viele dieser Videos jedoch spezielle Probleme mit sich. So wird oft kritisiert, dass mathematische Erklärvideos Prozeduren rezepthaft bzw. schematisch vermitteln und das „Warum?“ wenig bis keine Rolle spielt (vgl. z.B. Bersch et al., 2020; Klinger & Walter, 2020). Auch wenn Korntreff und Prediger (2021) zeigen, dass es durchaus Videos gibt in denen sinnvolle Verstehensangebote gemacht werden, so sind solche Videos eher die Ausnahme. Bednorz und Bruhn (2021) weisen darauf hin, dass dies auch an den Bedürfnissen der Zielgruppe läge, die die Videos oft zur Bearbeitung von Hausaufgaben oder für die Klausurvorbereitung gezielt bei Schwierigkeiten aufrufen. Bersch et al. (2020) weisen darauf hin, dass Erklärvideos theoretisch auch andere didaktische Funktion z.B. zur Hinführung, Erarbeitung, Sicherung oder Wiederholung eines Lerngegenstand erfüllen könnten, was jeweils eine andere Art der Videogestaltung erfordere. Gerade aber die ersten beiden Formen sind vor allem in Erklärvideos, die im Zusammenhang mit Unterricht erstellt werden, zu finden. Im Zuge einer eigeninitiierten Nutzung eines Erklärvideos auf YouTube, entscheidet jedoch der Lernende selbst, aus welchem Anlass er sich für welches Video entscheidet. Dies ist ein Nachteil für die Videoerstellenden: sie wissen bei der Erstellung des Videos nicht, wer ihr zukünftiges Publikum sein wird. Folglich kann das Video nicht individualisiert auf den Lernstand bzw. die Vorkenntnisse der jeweiligen Zielgruppe zugeschnitten werden, sondern muss eher allgemein gehalten werden. Damit kann das Video kaum dem von Kulgemeyer (2020) als zentral angesehenen Kriterium der Adaptivität gerecht werden. Eine Mathematik Lehrkraft, die ein Video für die eigene Klasse erstellt, kann hier viel gezielter vorgehen, da sie genau weiß, welchen Lernstand die Gruppe hat und wo es gegebenenfalls noch Lernschwierigkeiten bestehen.

Auch wenn die Forschung zu mathematischen Erklärvideos an Bedeutung gewonnen hat, so ist die Menge an gesicherten Erkenntnissen nach wie vor „überschaubar“ (Klinger & Walter, 2020, S. 514). Insbesondere hinsichtlich der Frage, was ein aus mathematikdidaktischer Sicht „gutes“ Erklärvideo ausmacht, gäbe es Korntreff et al. (2023) zufolge noch erheblichen Forschungsbedarf. Während es schon verschiedene Kriterienkataloge für Erklärvideos gibt, die zum Teil auch empirisch abgesichert sind, beispielsweise bei Kulgemeyer (2020) für physikalische

bzw. naturwissenschaftliche Videos im Allgemeinen, so sind diese Kataloge in der Regel nicht spezifisch für Videos mit mathematischen Inhalten erarbeitet bzw. getestet worden.

Mathematikspezifische Anforderungen an Erklärvideos finden sich beispielsweise in bei Marquardt (2016), welche unter anderem aus Erkenntnissen der mathematischen Schulbuchforschung theoretisch abgeleitet wurden. In einem späteren Beitrag verweist Marquardt (2020) auf die Arbeit von Fuchs (2018), in der das von ihm entwickelte Beurteilungsraster praktisch von zehn Lehrkräften am Beispiel von fünf Erklärvideos zum Thema Satz des Pythagoras erprobt wurde. Hierbei sollten Interpretationsschwierigkeiten einzelner Items aufgedeckt werden, nachdem bei Items, bei denen sich die Ratings der Lehrkräfte stark unterschieden, eine inhaltliche Diskussion mit den Teilnehmenden stattfand. Insgesamt wurden acht problematische Items identifiziert. Basierend darauf wurde eine verbesserte Version des Beurteilungsrasters erarbeitet (siehe Fuchs, 2018). Im Gegensatz zu vielen allgemeinen Kriterienkatalogen, die sich überwiegend auf gestalterische, technische oder sprachliche Aspekte beschränken, finden sich hier auch konkrete mathematikspezifische Kriterien wie beispielsweise das Kriterium angemessene fachdidaktische Reduktion des Inhalts, das Vorhandensein verschiedener Beispiele in unterschiedlichen Darstellungsformen oder dem Einsatz des Computers als Hilfsmittel wo dies angemessen ist, z.B. durch die Zuhilfenahme dynamischer Geometriesoftware.

Letzterer Aspekt ist auch Bersch et al. (2020) sehr wichtig. So könnten viele mathematische Inhalte von der dynamischen Repräsentation in einem Video profitieren, als Beispiel nennen sie Funktionenscharen, jedoch würden die Videoerstellenden von dieser Möglichkeit in der Regel keinen Gebrauch machen. Darüber hinaus verweisen Bersch et al. (2020) auch auf weitere Probleme aus mathematikdidaktischer Sicht und sprechen Empfehlungen aus basierend auf „einem modernen, kompetenzorientierten Verständnis von gutem Unterricht [...] und unter Einbezug der Dimensionen des AAER“ (S. 61). Das Augsburger Analyse- und Evaluationsraster (AAER) ist zur Beurteilung von Lehr-Lern-Mitteln, insbesondere digitaler Art, jedoch nicht spezifisch mit mathematischen Inhalten, entwickelt worden (<https://aaer.digillab.uni-augsburg.de/>). Als ersten Aspekt nennen die Autor*innen die zu wünschende jedoch oft fehlende „Einbettung in einen sinnstiftenden Kontext, etwa durch ein tragfähiges inner- oder auch außermathematisches Einstiegsproblem oder einen Ausblick mit Anwendungsbezug“ (S. 61). Während diese Anforderung für viele Videos eine inhaltliche Erweiterung bedeuten würde, sind die nächsten zwei bzw. drei Punkte grundlegender. So sei eine korrekte Fachsprache notwendig, in der sich außerdem nicht abwertend gegenüber der Mathematik geäußert werde, und außerdem müssten fachliche Fehler vermieden werden. Während diese Punkte unstrittig erscheinen und eine Art Mindeststandard darstellen sollten, so seien sie Bersch et al. (2020) zufolge in der Realität doch oft verletzt. Gerade eine fachlich ungenaue Darstellung, könne Inhalte einfacher machen, als sie eigentlich seien, was bei Lernenden den zum Teil vorhandenen Eindruck bestärke, dass Erklärvideos Inhalte besser erklären könnten als die eigene Lehrkraft.

Klinger und Walter (2020) konnten dieses Phänomen ebenfalls beobachten bei der Analyse von Kommentaren unter Erklärvideos. So drückten viele Viewer*innen ihre Dankbarkeit aus in Kommentaren wie „Warum können meine Lehrer nicht so einfach und gut erklären!? Danke!!!“. Ein Beispiel für eine vermeintlich einfachere Erklärung, die jedoch eine Fehlvorstellung auslösen bzw. verstärken kann, findet sich bei Korntreff und Prediger (2021). Sie nennen exemplarisch die „Obstsalat-Algebra“: das Zusammenfassen von Termen wird mit dem Zusammenzählen von gleichnamigen Obststücken verglichen. Dies könne jedoch zu langanhaltenden Fehlvorstellungen in Bezug auf Variablen führen, wenn diese folglich als physische Gegenstände interpretiert werden. Auch Bender (2020) nennt ein Beispiel bei dem in einem Video zum Paradoxon vom Wettlauf zwischen Achilles und der Schildkröte „genau die Fehlvorstellungen und Fehlverständnisse produziert bzw. bedient werden, die für die meisten Menschen den Erwerb des Grenzwertbegriffs verunmöglichen“ (S. 79).

Bersch et al. (2020) kritisieren auch, dass es in Erklärvideos in der Regel keine Möglichkeit gäbe, dass Lernenden sich die Inhalte zumindest zum Teil selbstständig erarbeiten. Wünschenswert wäre in diesem Zuge beispielsweise, wenn Lernende in Videos dazu aufgefordert werden eigene Vermutungen aufzustellen, bevor ein Zusammenhang erläutert wird. Dies wäre eine Möglichkeit, den Frontalunterricht-Charakter von Erklärvideos aufzubrechen.

Auch bei Ratnayake et al. (2019) finden sich verschiedene Kriterien für gute mathematische Erklärvideos. Wenn man die Kriterien von Bersch et al. (2020), Marquardt (2016) bzw. Fuchs (2018) und Ratnayake et al. (2019) zusammennimmt, kommt eine umfangreiche Liste von Empfehlungen für bzw. Anforderungen an mathematische Erklärvideos zusammen, die wir hier zusammenfassen:

1. Keine fachlichen Fehler
2. Korrekte Fachsprache, keine abwertende Sprache
3. Angemessene didaktische Reduktion des Inhalts
4. Unterstützender Einsatz von Programmen wie DGS oder Tabellenkalkulationsprogrammen wo angemessen
5. Ebenfalls Vermittlung von Zusammenhängen und konzeptuellem Wissen
6. Nutzung anregender Beispiele in wechselnden Kontexten und Darstellungen
7. Nutzung unterschiedlicher Aufgaben(typen)
8. Thematisierung von Vorerfahrungen und Vorwissen
9. Formulierung des Lernziels
10. Begründung der Relevanz des Themas
11. Verwendung eines Einstiegsproblems in sinnstiftendem Kontext
12. Herstellung von Anwendungsbezug

13. Thematisierung verschiedener Lösungswege
14. Anregung bzw. Ermöglichung, dass sich Lernende die Inhalte partiell eigenständig erarbeiten oder mathematisch argumentieren
15. Zusammenfassung der Inhalte am Ende des Videos

Diese zusammengefasste Liste ist nicht empirisch abgesichert und erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit, sie zeigt jedoch, dass es eine Vielzahl an Anforderungen an mathematische Erklärvideos aus didaktischer Sicht geben kann. Es wäre wünschenswert, dass in künftigen Arbeiten die Wirksamkeit bzw. der Einfluss dieser mathematikspezifischen Kriterien auf den Lernerfolg untersucht würde, ähnlich wie es beispielsweise bei Kulgemeyer (2020) im Hinblick auf Kriterien für gute physikalische bzw. naturwissenschaftliche Videos gemacht wurde.

Gerade auch hinsichtlich des oben an fünfter Stelle genannten Kriteriums, dass in Erklärvideos auch Zusammenhänge und konzeptuelles Wissen vermittelt werden sollen, scheint es notwendig, in Lernwirksamkeitsstudien zwischen den Dimensionen des prozeduralen und konzeptuellen Wissens zu unterscheiden. Dies geschieht unter anderem in der andauernden experimentellen Pretest-Posttest-Studie von Wetzel und Ludwig (2022), in der die Auswirkung interaktiver Aufgaben in und einer verstehensorientierten Gestaltung von mathematischen Erklärvideos auf das prozedurale und konzeptuelle Wissen untersucht wird.

5. Spannungsfeld der verschiedenen Ansprüche und Lösungsansätze

Ein Erklärvideo soll, wie in Abschnitt 3 dargelegt, möglichst kurz sein, gleichzeitig gibt es jedoch auch eine Vielzahl von Kriterien, die Erstellende bei der Gestaltung idealerweise berücksichtigen. Es stellt sich daher die Frage, ob diese Ansprüche zusammenzubringen sind.

Dass die Empfehlung einer kurzen Dauer eines Erklärvideos nicht unumstritten ist, konstatieren beispielsweise Bednorz und Bruhn (2021), die sie als ein „stark diskutierte[s] Kriterium“ (S. 11) bezeichnen. Andere Autor*innen produzieren längere mathematische Erklärvideos, zum Beispiel Hattermann et al. (2022), die zehn- bis fünfzehnminütige Erklärvideos an der Hochschule nutzen. Während sie verschiedene Gestaltungselemente der Videos und der Lernumgebung genau didaktisch oder pädagogisch begründen, wird die Länge nur erwähnt und nicht weiter begründet. Auch Biehler et al. (2023), die insgesamt ca. 300 Mathematikerklärvideos produziert haben, geben an, das Videos „möglichst unter 10 Minuten“ sein sollten gemäß „gängiger Design-Prinzipien“ (S. 9). Es stellt sich daher die Frage, ob die Forderung nach sehr kurzen Erklärvideos im einstelligen Minutenbereich für die Mathematik überhaupt passend beziehungsweise insbesondere im Hinblick auf den Wunsch nach didaktisch wertvollen Videos praktikabel ist. Wenngleich diese Frage an dieser Stelle nicht abschließend beantwortet werden kann, da es hierfür noch weiterer Forschung bedarf, soll der Konflikt hier nochmal anhand von Praxiserfahrungen der Autor*innen und dazugehörigen ersten empirischen Ergebnissen verdeutlicht werden. Für die bereits erwähnte, in Wetzel und Ludwig (2022)

vorgestellte Studie, wurden zwei Erklärvideos zum Thema Bestimmung und Bedeutung der Lösungsmenge linearer Gleichungssysteme angefertigt für die neunte Klasse. Beide Videos sollen den Anforderungen an ein gutes mathematisches Erklärvideo genügen, wie in Abschnitt 4 dargelegt. Der gleichzeitige Versuch, angelehnt an Guo et al. (2014), das Video auf maximal sechs Minuten Länge zu beschränken, gelang jedoch trotz mehrerer Überarbeitungszyklen nicht. Dies könnte zum einen auf eine zu große Menge an Lerninhalten je Video zurückzuführen sein. So soll kurz wiederholt werden was ein lineares Gleichungssystem und eine Lösungsmenge ist, wie Letztere strukturell aussehen kann und wie diese exemplarisch mit dem Einsetzungsverfahren bestimmt wird. Allein dem Einsetzungsverfahren könnte auch ein eigenes Video gewidmet werden. Ein eigenes Video nur für ein Lösungsverfahren wäre jedoch stark prozedural ausgerichtet, was den Bezug zu den Aspekten Bedeutung bzw. Struktur der Lösungsmenge wieder erschweren würde, die jedoch besonders betont werden sollten. Daher wurde die Entscheidung getroffen die Inhalte in einem Video zu bündeln, um besonders auf die Beziehung der Inhalte untereinander eingehen zu können.

Ein anderer Grund, warum die Videos eher länger wurden, könnte die Vielzahl an Kriterien sein, die die Videos erfüllen sollen. Nach mehrmaliger Überarbeitung wurde bei beiden Videos eine Endlänge von jeweils ca. zehn Minuten erlangt, analog zur Empfehlung von Biehler et al. (2023). Selbst bei dieser Länge, die schon vier Minuten über der von Guo et al. (2014) empfohlenen Maximallänge von Videos liegt, mussten trotzdem noch didaktisch-inhaltliche Abstriche gemacht werden. So startete die erste Version der Videos zu Beginn mit einem kleinen Exkurs zum Anwendungskontext linearer Gleichungssysteme in der Computertomographie. Diese Art der Einbettung in einen sinnstiftenden Kontext, wie von Bersch et al. (2020) gefordert, musste jedoch am Ende aus Überlegungen hinsichtlich einer noch vertretbaren Länge aus den Videos entfernt werden. Auch andere Elemente mussten aus den Videos entfernt oder gekürzt werden, wie beispielsweise Teile zur Wiederholung des notwendigen Vorwissens. Anstatt auch das Vorwissen zu Gleichungen zu thematisieren, beschränkten wir uns am Ende auf die Wiederholung der Frage, was eine Lösung einer Gleichung eigentlich ist. Die entstandenen Videos sind daher als Kompromiss zu sehen aus mathematikdidaktischen Ansprüchen und dem Wunsch nach einer nicht zu großen Videolänge.

Im Zuge der Pilotierung dieser Studie, die im Januar 2023 durchgeführt wurde (für Ergebnisse siehe Wetzel & Ludwig, 2024), wurden die teilnehmenden Schüler*innen auch in einem Fragebogen nach der Länge des Videos gefragt, nachdem sie eines davon in ihrem eigenen Tempo auf einem Tablet angeschaut hatten. Auf einer fünfstufigen Likert-Skala mussten die Schüler*innen ihre Zustimmung zu drei Items hinsichtlich der Länge angeben (siehe Tabelle 1). Während die Zustimmung zur Aussage, dass das Video zu kurz war, mit einem Mittelwert von 1,87 nur eine geringe Zustimmung bekam, war die Zustimmung zur Aussage, dass das Video zu lang war mit einem Mittelwert von 2,74 größer, jedoch ist auch die Standardabweichung mit 1,18 eher hoch. Die größte Zustimmung gab es jedoch zur Aussage, dass die Videolänge genau richtig war, mit einem Mittelwert von 3,32. Auch die

Antworten in einem Freitextfeld, in dem die Teilnehmenden nochmal etwas zum Video loswerden konnten, waren gemischt. Unter den Antworten, die sich auf die Länge des Videos bezogen, gab es sowohl solche die sich mehr Inhalte, mehr Beispiele und insgesamt ein langsames Tempo gewünscht hätten und andere die schrieben, dass das Video zu ausführlich sei oder zu lang dauere. Es ist denkbar, dass es hier einen Zusammenhang mit dem vorhandenen Vorwissen gibt und leistungsschwächere Lernende ein ausführlicheres Video eher bevorzugen könnten. Tatsächlich zeigt sich eine schwach negative Korrelation ($r = -.23, p < .05$) mit dem prozeduralen Vorwissen in Form des Pretest-Scores und der Zustimmung zur Aussage, dass das Video zu lang war. Beim konzeptuellen Vorwissen zeigt sich dieser Zusammenhang jedoch nicht ($r = -.08, p = .44$).

Item	Mittelwert	Std.-Abw.
Das Video war zu kurz.	1,87	0,69
Das Video war zu lang.	2,74	1,18
Die Länge des Videos war genau richtig.	3,32	1,06

Tabelle 1: Zustimmung von $n = 84$ Teilnehmenden auf einer Likert-Skala von 1 (Stimme gar nicht zu) bis 5 (Stimme voll und ganz zu) zu Aussagen bezüglich der Videolänge.

Insgesamt muss dieser Zusammenhang in Zukunft weiter untersucht werden. Um die Aussagen hinsichtlich der Länge besser auf derselben Skala darstellen und vergleichen zu können, werden die drei Items aus Tabelle 1 für die Hauptstudie in einem einzigen Item mit einer sechsstufigen Unterteilung zur Videolänge kondensiert, bei der das linke Ende für „zu kurz“ und das rechte Video für „zu lang“ steht. Die Ergebnisse der Hauptstudie, die im Juni und Juli 2023 in 20 Klassen durchgeführt wurde, stehen noch aus.

Unsere praktischen Erfahrungen bei der Erstellung der Videos im Rahmen der Studie, machen für uns die Frage, ob bzw. welche Lösungsansätze es geben kann, um dem Spannungsfeld zwischen einer möglichst kurzen Videolänge und verschiedenen didaktischen Ansprüchen begegnen zu können, umso relevanter. Verschiedene Ideen aus der Literatur zur optimalen Gestaltung von Erklärvideos können hierfür aufgegriffen und als Möglichkeit, das Dilemma zumindest zu reduzieren, verstanden werden. Dabei kann man diese Ideen zu zwei Arten von Lösungsansätzen zusammenfassen. Zum einen kann ein vorhandenes Video unterteilt, zum anderen ein Inhalt auf mehrere Videos aufgeteilt werden. Diese beiden Ansätze werden im Folgenden vorgestellt.

5.1. Lösungsansatz 1: Unterteilen eines Videos

Ein bereits vorhandenes langes mathematisches Erklärvideo oder ein komplexer Inhalt kann von einer Strukturierung profitieren. Optimalerweise werden Strukturierungshilfen bei der Gestaltung eines Erklärvideos direkt mitberücksichtigt, sodass die Passung zwischen Inhalt und den Strukturelementen möglichst gut ist, es ist jedoch auch möglich ein Video nachträglich zu strukturieren. Eine mögliche Strukturierungshilfe ist die Unterteilung eines Videos in Bedeutungsabschnitte

(vgl. z.B. Marquardt, 2020; Ratnayake et al., 2019). In Anschluss an die *kognitive Theorie des multimedialen Lernens* (vgl. Mayer, 2021) kann eine Segmentierung des Inhalts die Lernenden dabei unterstützen sich nur mit kleineren Mengen an Informationen auf einmal zu beschäftigen (Brame, 2016). Die Vorstrukturierung könne den Lernenden eher dabei helfen die Inhalte zu durchdringend und zu ihrem Vorwissen in Bezug zu setzen (ebd.). Hinsichtlich der Gestaltung dieser Segmentierung gibt es verschiedene Möglichkeiten. Ohne die Möglichkeiten einer externen Lern- bzw. Abspielumgebung miteinzubeziehen, können die Erstellenden eines Videos an bestimmten Stellen das Publikum zum Pausieren auffordern, um beispielsweise das Gesagte nochmal nachzuvollziehen oder eine Aufgabe zu bearbeiten. Altieri et al. (2018) konnten bei den 91 Teilnehmenden einer Vorlesung zur Ingenieursmathematik, die ein Erklärvideo zum Thema Differenzialgleichungen mit oder ohne Pausen sahen, von besseren Ergebnissen im Nachtest berichten bei Teilnehmenden, die ein Video mit Pausen gesehen hatten. Dabei machte es keinen Unterschied, ob die Studierenden vor der Pause nur dazu aufgefordert wurden, über das eben gezeigte nachzudenken oder ob sie aufgefordert wurden die Pause zu nutzen, um die Inhalte nochmal in eigenen Worten aufzuschreiben. Das Forcieren der Pausen scheint hier den positiven Effekt zu bewirken.

Wenn die Lernenden zum Pausieren aufgefordert werden, ist dies nur ein Angebot, das nicht angenommen werden muss: das Video kann theoretisch einfach fortgesetzt werden. Ist die Segmentierung jedoch von außen vorgegeben, wie es in der Studie von Altieri et al. (2018) der Fall ist, beispielsweise durch eine Unterteilung in Kapitel, zwischen denen das Video automatisch pausiert, ist es wahrscheinlicher, dass dieses Angebot von den Lernenden auch im Sinne des Erstellenden genutzt wird. Eine solche Segmentierung hängt jedoch auch mit den Gegebenheiten der Plattform zusammen, auf der das Video hochgeladen ist. Auch auf YouTube ist eine Unterteilung in Kapitel mittlerweile möglich, die separat angesteuert werden können. Jedoch wird in YouTube die Wiedergabe beim Übergang von einem zum nächsten Kapitel einfach fortgesetzt, eine erzwungene Pause ist nicht möglich. Um dies zu realisieren, muss man andere Videoplayer oder Lernumgebungen nutzen. Eine Software, die das Setzen erzwungener Pausen ermöglicht, ist beispielsweise H5P (<https://h5p.org/>). Mit H5P erstellte interaktive Videos können z.B. auf Moodle zur Verfügung gestellt werden. Die Software ermöglicht auch andere Arten von Interaktivität. Insbesondere kann das Video nachträglich mit Aufgaben versehen werden, beispielsweise in Form von Multiple-Choice-Quizaufgaben, die an bestimmten Stellen im Video angezeigt werden. Die stärkere kognitive Aktivierung, die mit interaktiven Aufgaben optimalerweise erzielt wird (Brame, 2016), kann die Gesamtlänge eines Videos weniger relevant machen, wenn die Lernenden mehrfach aus ihrer passiven Rolle herausgeholt werden und mathematisch aktiv werden müssen. In der weiter oben vorgestellten Studie der Autor*innen, ist dies auch ein Effekt, der untersucht wird. Bei einer Videolänge von ca. 10 Minuten deuten die Ergebnisse der Pilotstudie darauf hin, dass das Vorhandensein interaktiver Aufgaben einen positiven Einfluss auf den Erwerb von konzeptuellem Wissen haben kann (Wetzel & Ludwig, 2024).

5.2. Lösungsansatz 2: Aufteilen eines Videos

Unter bestimmten Umständen kann es sinnvoll sein einen Inhalt auf mehrere kürzere Videos aufzuteilen, die verschiedene Aspekte fokussieren (vgl. z.B. Korntreff & Prediger, 2021; Marquardt, 2020). Dies wird in der Praxis auf vielen YouTube-Kanälen praktiziert. So findet sich beispielsweise bei Simpleclub auf YouTube eine Vielzahl solcher Playlists. Eine davon ist die Playlist „Stammfunktion & Integral“ (<https://www.youtube.com/watch?v=1N4YcJ8iKIU&list=PLjaA00udJtOpEkZF2FX8hTR9iqLpD35Kr>), die in insgesamt zwanzig Videos verschiedene Unterthemen beleuchtet. Gerade bei den bekannten Kanälen auf YouTube stellt sich jedoch die Frage, inwieweit diese Unterteilung unter didaktischen Gesichtspunkten durchgeführt wurde. Neben der Einteilung in verschiedene Unterthemen, können Videos zum selben Thema auch mit unterschiedlichen Intentionen produziert werden. In Abschnitt 4 wurde bereits die Unterteilung von Bersch et al. (2020) analog zu verschiedenen Phasen des Unterrichts vorgestellt. Biehler et al. (2023) stellen im Zuge ihres Projekts studiVEMINTvideos eine weitere Unterteilung vor. In diesem Projekt wurden ca. 300 mathematische Erklärvideos für Studierende erstellt. Die vorgenommene Unterteilung in verschiedene Videoarten folge dabei einem „Ansatz, der sich zumindest in unserem Projekt als praktikabel erwiesen hat“ (Biehler et al., 2023, S. 9). Dabei werden die Videos, die übergeordnet als Lernvideos bezeichnet werden, in die drei Kategorien Einführungsvideos, Theorievideos und Praxisvideos unterteilt. Während unter der Kategorie Praxisvideo nur der Subtyp Aufgabenvideo zu finden ist, werden die Theorievideos nochmal unterteilt in Begriffsvideo, Begründungsvideo und Illustrationsvideo. Ob diese Unterteilung sinnvoll ist, wurde (noch) nicht empirisch validiert. Sie ermöglicht jedoch eine strukturierte Aufteilung eines Inhalts auf mehrere Videos. Im Kontext eines Projektes wie studiVEMINTvideo, in dem die Videos eingebettet in eine Lernumgebung zur Verfügung gestellt werden, zum Teil mit weiterführenden vertiefenden Aufgaben, erscheint diese Unterteilung sehr passend. Bei Videos auf YouTube stellt sich jedoch die Frage, ob Lernende zu einem Thema mehr als ein Video anschauen würden. Es scheint unwahrscheinlich, dass nach dem Anschauen eines Aufgabenvideos, um bei der Terminologie von Biehler et al. (2023) zu bleiben, in dem wohlmöglich ein Rechenbeispiel von genau dem Typ vorgeführt wird, den ein Lernender nicht beherrscht, noch das zugehörige Begründungsvideo aufgerufen wird. Die aus didaktischer Sicht wünschenswerte Vernetzung prozeduraler und konzeptueller Elemente, wie zum Beispiel in Korntreff und Prediger (2021) gefordert, bleibt dann aus.

Es bleibt daher die Frage, ob die Empfehlung einen Inhalt auf mehrere Videos aufzuteilen, in jedem Kontext Anwendung finden kann oder sollte. Eingebettet in eine didaktisch sinnvoll aufgebaute Lernumgebung können kurze Videos mit jeweils verschiedenen Funktionen und Schwerpunkten sich gegenseitig sinnvoll ergänzen und erscheinen eine gute Lösung zu sein. Die Anforderung einer kurzen Länge und verschiedener didaktischen Kriterien lassen sich hier sinnvoll zusammenbringen, da nicht jedes Video alle Kriterien erfüllen muss. Für ein einzelnes

Video auf YouTube, das, auch wenn es theoretisch Teil einer Playliste ist, eventuell doch isoliert angeschaut wird, sieht dies jedoch anders aus. Hier ist weitere Forschung zum Konsumverhalten von Lernenden auf YouTube notwendig.

6. Fazit und Ausblick

In diesem Beitrag wurde die Forderung nach kurzen Erklärvideos, deren maximal vertretbare Länge sich je nach Autor*innen unterscheidet, in Bezug gesetzt zu den mathematikdidaktischen Ansprüchen, welche Inhalte und Elemente ein „gutes“ Erklärvideo enthalten sollte. Es stellt sich die Frage, ob für mathematische Videos die Forderung nach sehr kurzen Videos zu halten ist oder ob man nicht zu gemäßigteren Längenvorgaben beispielsweise im Bereich 10 bis 15 Minuten übergehen sollte. Erste empirische Daten einer Studie von Wetzels und Ludwig (2024) legen nahe, dass leistungsschwächere Schüler*innen längere Videos eher akzeptieren oder sogar wünschen als leistungsstärkere. Gleichzeitig ist zu diskutieren, ob mathematikdidaktische Ansprüche in ihrer Gesamtheit für einzelne Videos überhaupt umgesetzt werden können. Hier ist mehr Forschung notwendig, um die Lerneffektivität von mathematischen Erklärvideos mit unterschiedlichen Längen und variierender Passung zu didaktischen Kriterienkatalogen zu untersuchen.

Im Abschnitt 5 wurden zwei Möglichkeiten vorgestellt, wie dem Konflikt begegnet werden kann: einerseits können Videos sinnvoll unterteilt, andererseits kann ein Inhalt auf mehrere Videos aufgeteilt werden. Diese Möglichkeiten bringen Vorteile aber auch verschiedene Nachteile mit sich; insbesondere entfalten beide Möglichkeiten erst ihr volles Potenzial in Kombination mit einer geeigneten Lernumgebung. Insgesamt bleibt es ein Forschungsdesiderat die Länge als Faktor für den Lernerfolg näher zu untersuchen, sowohl im Kontext einer vorgegebenen Lernumgebung als auch bei der eigeninitiierten Nutzung auf einer Plattform wie YouTube.

Literatur:

- Altieri, M., Köster, A., Friese, N., & Paluch, D. (2018). Größerer Lernerfolg durch Pausen in Lernvideos? Untersuchung zu segmentierten Lernvideos in der Ingenieurmathematik. In P. Bender & T. Wassong (Eds.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018* (S. 153–156). WTM Verlag.
- Anders, P. (2019). Erklärvideo. In P. Anders, M. Staiger, C. Albrecht, M. Rüssel & C. Vorst (Hrsg.): *Einführung in die Filmdidaktik* (S. 255–268). J.B. Metzler.
https://doi.org/10.1007/978-3-476-04765-6_18

- Barlovits, S., Jablonski, S., Lázaro, C., Ludwig, M., & Recio, T. (2021). Teaching from a distance—Math lessons during COVID-19 in Germany and Spain. *Education Sciences*, 11(8), 406.
- Bednorz, D. & Bruhn, S. (2021). Mehr als nur Erklären – eine Bestandsanalyse des Angebots an mathematischen YouTube-Videos. *GDM-Mitteilungen*, 110, 10–17.
- Bender, P. (2020). Zu: „Jetzt fangen die Physiker aber das Spinnen an“. *MNU-Journal*, 01/2020, 78–79.
- Bergmann, J., & Sams, A. (2012). *Flip your classroom: Reach every student in every class every day*. International Society for Technology in Education.
- Bersch, S., Merkel, A., Oldenburg, R., & Weckerle, M. (2020). Erklärvideos: Chancen und Risiken: Zwischen fachlicher Korrektheit und didaktischen Zielen. *GDM-Mitteilungen*, 109, 58–63.
- Bonk, C. J. (2011). YouTube Anchors and Enders: The Use of Shared Online Video Content as a Macrocontext for Learning. *Asia-Pacific Collaborative education Journal*, 7(1), 13–24.
- Biehler, R., Liebendörfer, M., & Schmitz, A. (2023). Lernvideos und ihre Erstellung: Das Projekt studiVEMINTvideos. *GDM-Mitteilungen*, 114, 8–12.
- Brame, C. J. (2016). Effective Educational Videos: Principles and Guidelines for Maximizing Student Learning from Video Content. *CBE Life Sciences Education*, 15(4).
- Fiorella, L. (2021). Multimedia Learning with Instructional Video. In R. Mayer & L. Fiorella (Eds.), *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (S. 487–497). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781108894333.050>
- Fuchs, T. (2018). Praktische Erprobung des Marquardt-Beurteilungsrasters für Mathematik-Erklärvideos. Diplomarbeit. Universität Wien. https://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Lehre/Diplomarbeiten/DIPLOMARBEIT_Theresa_Fuchs.pdf [09.10.2023]
- Guo, P. J., Kim, J. & Rubin, R. (2014). How Video Production Affects Students Engagement. An Empirical Study of MOOC Videos. In: *Proceedings of the first ACM conference on Learning @ scale conference* (S. 41–50).
- Hattermann, M., Salle, A., Bärthel, M., & Hofrichter, R. (2021). Instruktionale Texte und Lernvideos – Konzeption und Evaluation zweier multimedialer Lernformate. In: R. Biehler, A. Eichler, R. Hochmuth, S. Rach & N. Schaper (Hrsg.), *Lehrinnovationen in der Hochschulmathematik praxisrelevant – didaktisch fundiert – forschungsba-siert* (S. 399–436). Springer.
- Marquardt, K. (2016). *Beurteilungsraster für Mathematik-Erklärvideos. Chancen, Grenzen und Durchführung einer Operationalisierung mittels Resultaten aus der Schulbuchforschung*. Diplomarbeit. Universität Wien. https://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/Lehre/Diplomarbeiten/DIPLOMARBEIT_Karl_Marquardt.pdf [09.10.2023]
- Marquardt, K. (2020). Qualitätskriterien für Mathematik-Erklärvideos. *GDM-Mitteilungen*, 109, 43–49.

- Mayer, R. E. (2021). Cognitive Theory of Multimedia Learning. In R. Mayer & L. Fiorella (Eds.), *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (S. 57–72). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781108894333.008>
- Medienpädagogischer Forschungsverbund Südwest (2022). *JIM-Studie 2022: Jugend, Information, Medien. Basisuntersuchung zum Medienumgang 12- bis 19-Jähriger*. <https://www.mpfs.de/studien/jim-studie/2022/>
- Klinger, M., & Walter, D. (2020). „Ein wahrer Ehrenmann“ – Wie mathemathikhaltige Apps und Videos von Nutzenden bewertet werden. In H.-S. Siller, W. Weigel & J. F. Wörler (Hrsg.), *BzMU 2020* (S. 185–188). WTM-Verlag.
- Korntruff, S., & Prediger, S. (2021). Verstehensangebote von YouTube-Erklärvideos – Konzeptualisierung und Analyse am Beispiel algebraischer Konzepte. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 43(2), 281–310.
- Korntruff, S., Prediger, S., Altieri, M., & Bach, S. (2023). Verstehensorientierung und fokussierte kognitive Aktivierung in Erklärvideos – Designprinzipien und Designelemente. *Digitaler Mathematikunterricht in Forschung und Praxis: Tagungsband zur Vernetzungstagung 2022 in Siegen*, 103.
- Krämer, A., & Böhrs, S. (2017). How Do Consumers Evaluate Explainer Videos? An Empirical Study on the Effectiveness and Efficiency of Different Explainer Video Formats. *Journal of Education and Learning*, 6(1), 254–266.
- Kulgemeyer, C. (2020). A framework of effective science explanation videos informed by criteria for instructional explanations. *Research in Science Education*, 50(6), 2441–2462.
- Rat für kulturelle Bildung (2019). Jugend / YouTube / Kulturelle Bildung: Horizont 2019. <https://www.bosch-stiftung.de/de/publikation/jugend-youtube-kulturelle-bildung-horizont-2019>
- Ratnayake, I., Bruder, R., Johlke, F., & Feldt-Caesar, N. (2019). Quality Criteria for Teachers to Choose Video Tutorials for Different Learning Situations. In L. Gómez Chova, A. López Martínez, & I. Candel Torres (Hrsg.), *Proceedings of EDU-LEARN19 Conference* (S. 3669–3674).
- Schön, S., & Ebner, M. (2013). *Gute Lernvideos: ... so gelingen Web-Videos zum Lernen*. Books on Demand.
- Wetzel, S. (2021). *Mathematiklernen mithilfe von Videos: Analyse von didaktischem Aufbau und Nutzung von mathematischen Lernvideos außerhalb der Schule*. WTM-Verlag.
- Wetzel, S., & Ludwig, M. (2021a). CATEGORISING PERCEIVED ADVANTAGES OF INSTRUCTIONAL MATHEMATICS VIDEOS. *Proceedings of PME* (S. 257–263).
- Wetzel, S., & Ludwig, M. (2021b). Mathematische Erklärvideos interaktiv gestalten: Ansätze für Lehre und Forschung. In: K. Hein, C. Heil, S. Ruwisch & S. Prediger (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2021*. WTM-Verlag.
- Wetzel, S. & Ludwig, M. (2022). Mathematische Erklärvideos effektiv gestalten: Eine Studie. In IDMI-Primarstufe Goethe-Universität Frankfurt (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2022* (S. 1456). WTM-Verlag.

- Wetzel, S., Ludwig, M. (2024). Role of interactive tasks and a comprehension-oriented design in instructional videos: Results of a pilot study. In D. Diamantidis, M. Karavakou, M. Grizioti, & C. Kynigos (Eds.), *Proceedings of the 16th International Conference on Technology in Mathematics Teaching*, (pp. 117-124). Athens, Greece. NKUA.
- Wolf, K. D. (2015). Video-Tutorials und Erklärvideos als Gegenstand, Methode und Ziel der Medien- und Filmbildung. In A. Hartung-Griemberg, T. Ballhausen, C. Trültzsch-Wijnen, A. Barberi, & K. Kaiser-Müller (Eds.), *Mediale Impulse: Vol. 2. Filmbildung im Wandel* (pp. 121–131). new academic press.

Mira H. Wulff & Aiso Heinze

IPN – Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik, Kiel

mwulff@leibniz-ipn.de, heinze@leibniz-ipn.de

Vorbereitung auf die digitale Arbeitswelt im regulären Mathematikunterricht? Der 3D-Druck als authentischer Lernkontext aus Sicht von Unternehmen

Der 3D-Druck gewinnt in der Arbeitswelt zunehmend an Relevanz. Für einen erfolgreichen Übergang in Berufe, die diese Technologie nutzen, sind Informationen über die von Unternehmensseite erwarteten Kenntnisse relevant. In einer Interviewstudie mit 15 Repräsentant:innen verschiedener Branchen wurden Erwartungen zu 3D-Druck-bezogenen Kenntnissen sowie Einbindungsmöglichkeiten in den regulären Fachunterricht herausgearbeitet.

1. Einleitung

Laut den Schulgesetzen der Bundesländer ist ein Bestandteil des Bildungsauftrages der allgemeinbildenden Schulen die Ausbildung von Schüler:innen zu mündigen Bürger:innen. Hierzu gehören neben fachlichen, emotionalen und sozialen Kompetenzen unter anderem die Fähigkeit, sich in der stetig wandelnden Welt zurecht zu finden sowie die Vorbereitung auf das spätere Berufsleben. Auftrag der allgemeinbildenden Schulen ist also neben dem generellen Erziehungsauftrag und der Vermittlung von fachlichen Inhalten ebenso die Möglichkeit zur Berufsorientierung sowie der Berufsvorbereitung (KMK, 2017).

Aufgrund der zunehmenden Digitalisierung der Arbeitswelt hat diese in den letzten Jahrzehnten eine Transformation von mechanischen oder analogen zu digitalen, automatisierten Prozessen durchlaufen (z. B. Kaiser et al., 2021). Als Folge dieses Wandels erlangen zunehmend neue Technologien, wie beispielsweise die 3D-Druck-Technologie, an Relevanz auf dem Arbeitsmarkt. Dies bedingt Veränderungen in den Anforderungen an Kompetenzprofile beim Einstieg in die Arbeitswelt (z. B. Grundke et al., 2017). Es stellt sich die Frage, inwieweit die allgemeinbildende Schule Kompetenzen zu diesen neuen digitalen Technologien vermitteln soll und kann.

Um sich einer Antwort auf diese Frage zu nähern, wurde die hier berichtete Studie als Rahmenbedingungsstudie eines Forschungsprojekts durchgeführt. Die Frage, inwiefern der 3D-Druck in den regulären mathematischen Fachunterricht eingebunden werden kann, um Schüler:innen eine frühzeitige Berufsorientierung sowie die Auseinandersetzung mit einer für den Arbeitsmarkt relevanten digitalen Technologie zu ermöglichen, ist Fokus des Projektes. Die berichtete Studie fokussiert auf Basis durchgeführter Interviews die aus Unternehmenssicht erwarteten Kenntnisse in Berufen, die im professionellen Alltag die 3D-Druck-Technologie nutzen sowie Einbindungsmöglichkeiten im Fachunterricht, die eine Auseinandersetzung

mit der Technologie aus Unternehmensperspektive fördern könnten. Hierzu wird zunächst der allgemeine Fachunterricht betrachtet, bevor im Ausblick dann auf den Mathematikunterricht eingegangen wird.

2. 3D-Druck in der digitalen Arbeitswelt und im regulären Fachunterricht der allgemeinbildenden Schulen

2.1 Theoretischer Rahmen

3D-Druck als „neues“ digitales Werkzeug der digitalen Arbeitswelt

In einer im Jahr 2021 durchgeführten Befragung des Branchenverbandes der deutschen Informations- und Telekommunikationsbranche (BITKOM) gaben 44% der 551 befragten Industrieunternehmen an, dass sie bereits den 3D-Druck einsetzen, weitere 42% planen oder diskutieren die Nutzung der Technologie (Rohleder, 2021). Seit den 1980er-Jahren hat der 3D-Druck als „neue“ Produktionsmethode neben den herkömmlichen formgebenden (z. B. Gießen) und subtraktiven Verfahren (z. B. Fräsen) insbesondere in Industrie und Handwerk eine kleine Revolution ausgelöst (Fastermann, 2014; Hagl, 2015; Junk, 2017). Hierfür gibt es vielfältige Gründe: Die 3D-Druck-Technologie kann zwar herkömmliche Produktionsmethoden nicht ersetzen, bietet aber in vielen Aspekten eine wichtige, kosten- und zeitsparende Alternative (Fastermann, 2014). Insbesondere in den Bereichen Customization und Personalization³⁰ wirkt die Technologie vorteilhaft, da auch kleine Stückzahlen oder Einzelstücke ohne Mehrkosten produziert werden können. Weitere Vorteile umfassen u. a. das Einsparen von Abfallprodukten sowie die Flexibilität der Einsatzmöglichkeiten oder die Handhabbarkeit (u. a. Fastermann, 2014; Hagl, 2015). Deswegen ist es auch nicht verwunderlich, dass die 3D-Druck-Technologie in seinen verschiedenen Facetten³¹ bereits in vielen Branchen, wie u. a. der Bauindustrie, der Medizintechnik, der Luft-, Schiff- und Raumfahrttechnik oder im Prototypenbau eingesetzt wird. Durch diesen Einsatz wird die Technologie folglich weiterentwickelt und es kann davon ausgegangen werden, dass die Technologie in den kommenden Jahren auch in weiteren Bereichen zum Einsatz kommt.

Institutionelle Bildungsziele der allgemeinbildenden Schulen

Der generelle Bildungsauftrag der allgemeinbildenden Schulen umfasst neben der fachlichen Förderung und Ausbildung, dem allgemeinen Erziehungsauftrag, der Entwicklung kognitiver, emotionaler, sozialer, kreativer und körperlicher Fähigkeiten sowie der kulturellen und gesellschaftlichen Orientierung u. a. auch die Ermöglichung von beruflicher Teilhabe. So besagt beispielsweise das Schulgesetz Schleswig-Holstein:

³⁰ Customization bezieht sich auf die explizite individuelle Anpassungsfähigkeit eines Produkts durch die Anwender:in oder die Käufer:in. Personalization hingegen ist die implizite Anpassung eines Produkts durch ein (dienstleistendes) Unternehmen an die Bedürfnisse der Anwender:in.

³¹ Für einen Überblick über die verschiedenen Produktionsmethoden, die unter dem Überbegriff „3D-Druck“ oder „Additive Manufacturing“ gesammelt werden, siehe u. a. Fastermann (2014)

Die Schule soll dem jungen Menschen zu der Fähigkeit verhelfen, in einer ständig sich wandelnden und dabei zunehmend digitalen Welt ein erfülltes Leben zu führen [...]. Es gehört zum Auftrag der Schule, die jungen Menschen zur Teilnahme am Arbeitsleben und zur Aufnahme einer hierfür erforderlichen Berufsausbildung zu befähigen. (SchulG SH, 2007, §4)

Die Kultusministerkonferenz (KMK) veröffentlichte 2017 eine Empfehlung zur Umsetzung der Ermöglichung beruflicher Teilhabe in der allgemeinbildenden Schule. Diese zeigt neben Zielen (u. a. Persönlichkeitsentwicklung, Kennenlernen verschiedener Berufsbereiche) auch Maßnahmen und konkrete Umsetzungsmöglichkeiten auf: Die KMK empfiehlt die Verknüpfung von Angeboten zur Berufsorientierung mit dem Schulalltag, u. a. in einer möglichen Zusammenarbeit zwischen beruflichen Schulen, aber auch durch Praktika. Es ist hervorzuheben, dass die aufgeführten Umsetzungsmöglichkeiten sowohl an schulischen als auch an außerschulischen Lernorten durch ihren Projektcharakter vereint werden. Einer 2022 durchgeführten Untersuchung der Bertelsmann Stiftung zufolge empfinden nur ein Viertel der befragten 14- bis 20-jährigen, dass es genügend Informationen zur Berufswahl gibt und sie sich gut zurechtfinden, 53% hingegen geben an, dass es zwar genügend Informationen gibt, sie sich aber schwer zurechtfinden. Darüber hinaus geben 18% der Befragten an, dass es insgesamt zu wenig Informationen zur richtigen Berufswahl gibt (Barlovic et al., 2022). Dies lässt vermuten, dass die von der KMK vorgeschlagenen Maßnahmen, abgesehen von den Berufspraktika, nur wenig oder unzureichend umgesetzt werden.

An dieser Stelle bleibt die Frage, inwiefern neben den Berufspraktika, bei denen Schüler:innen eigenständig Berufsbranchen wählen, insbesondere in der Schule authentische Kontaktmöglichkeiten zur digitalen Arbeitswelt geschaffen werden können, sodass Schüler:innen mit verschiedenen Branchen, einzelnen Berufen oder relevanten Aspekten der Arbeitswelt in Berührung kommen. Dabei ist vor allem der reguläre Fachunterricht von Interesse, in dem diese Thematik im Verlauf der Sekundarstufe kontinuierlich betrachtet werden kann. Dies dürfte nicht nur eine höhere Effektivität haben als punktuelle Angebote im Rahmen einer Projektwoche, sondern durch die Verknüpfung mit den curricularen Fachinhalten auch deren Relevanz für die Arbeitswelt aufzeigen. Der zuletzt genannte Punkt ist insbesondere für den Mathematikunterricht interessant, da das Relevanzparadox (Niss, 1994) für das Fach Mathematik eine besondere Herausforderung darstellt.

2.2 Forschungsfragen

Aus mathematikdidaktischer Perspektive werfen die oben genannten Aspekte die Frage auf, inwiefern es möglich ist, dass der Mathematikunterricht sinnvoll zu einer Berufsorientierung und -vorbereitung der Schüler:innen beiträgt. Aufgrund der Relevanz der 3D-Druck-Technologie für den derzeitigen und zukünftigen Arbeitsmarkt soll diese für die Beantwortung der Frage exemplarisch herangezogen wer-

den. In unserer Studie sollen einerseits die Rahmenbedingungen der digitalen Arbeitswelt insbesondere in Bezug auf die aus Unternehmenssicht erwarteten Kenntnisse zukünftiger Arbeitnehmer:innen hinsichtlich der 3D-Druck-Technologie sowie andererseits die Möglichkeiten für die Integration der 3D-Druck-Technologie in den regulären (Mathematik-)Unterricht als Lerngelegenheit untersucht werden. Leitend sind dabei die folgenden zwei Forschungsfragen:

1. Welche 3D-Druck-bezogenen Kenntnisse werden von Schulabsolvent:innen beim Übergang in die Ausbildung bzw. bei dem Einstieg in Berufe, die im professionellem Alltag die 3D-Druck-Technologie nutzen, erwartet?
2. Wie könnten diese Kenntnisse aus Unternehmenssicht bereits an allgemeinbildenden Schulen thematisiert werden?

3. Methode

Als Design der Studie wurde ein leitfadengestütztes Interview gewählt. Dies begründet sich aus dem explorativen Charakter der Studie und der Tatsache, dass die befragten Personen keinen bildungswissenschaftlichen Hintergrund haben und damit keine entsprechenden Modelle und fachsprachlichen Begriffe in ihren Äußerungen verwenden. Das gewählte Format der Datenerhebung musste demnach sicherstellen, dass sich die Befragten in ihrer eigenen Ausdrucksweise äußern können und dass die Äußerungen der befragten Personen in dem gemeinten Sinne weitgehend verstanden werden (ggf. durch Nachfragen im Interview).

3.1 Stichprobe

Repräsentant:innen dänischer und deutscher Unternehmen verschiedener Branchen³², die in ihrem beruflichen Alltag die 3D-Druck-Technologie nutzen, wurden per E-Mail kontaktiert und um ein Interview gebeten. Die Entscheidung für eine binationale Stichprobe ergab sich einerseits aus dem Kontext des deutsch-dänischen Forschungsprojekts. Andererseits bietet die deutsch-dänische Stichprobe aufgrund der deutlich stärkeren digitalen Ausrichtung des Schulunterrichts in Dänemark (Eickelmann et al., 2019) die Chance, dass von den dänischen Unternehmen ein größeres Potenzial in den Schulen gesehen wird als es bei deutschen Unternehmen der Fall ist. Dies lässt einen reichhaltigeren Datensatz erwarten.

Es beteiligten sich 15 Repräsentant:innen von Unternehmen aus Deutschland und Dänemark (9 resp. 6 Teilnehmende; 2 weiblich, 13 männlich). Bei der Altersverteilung³³ war die Kategorie zwischen 41-50 Jahren mit 6 Personen am stärksten vertreten, gefolgt von den Kategorien „31-40“ (3 Personen), „51-60“ und „61+“ (je

³² Es wurde eine Stichprobe mit vielen verschiedenen existierenden Branchen angefragt, die im professionellen Alltag die 3D-Druck-Technologie nutzen. Die angefragten Branchen umfassen u. a. Forschungsinstitute, Bauindustrie, Prototypenbau, Luft- und Schifffahrt, Automobilindustrie, 3D-Drucker-Fertigung, Gießformendruck, Spritzguss-Maschinenbau, Automatisierungs- und Produktionsindustrie sowie Medizintechnik.

³³ Die Aufnahmequalität eines Interviews ließ nicht zu, Altersgruppe oder Erfahrung mit der 3D-Druck-Technologie im beruflichen Kontext der befragten Person zu transkribieren, weshalb diese beiden demographischen Angaben nur mit $n = 14$ dargestellt werden.

2 Personen). Zudem war zum Erhebungszeitpunkt eine Person jünger als 31 Jahre. 10 der befragten Expert:innen hatten mehr als 7 Jahre Erfahrung im beruflichen Umgang mit sowie der professionellen Nutzung der 3D-Druck-Technologie (davon hatten 6 Personen 7-18 Jahre und 4 Personen 19-30 Jahre Erfahrung). Zudem gaben jeweils 2 der Expert:innen an, 4-6 Jahre oder 1-3 Jahre Erfahrung im Umgang mit der Technologie im beruflichen Alltag zu haben.

3.2 Instrumente

Die Datenerhebung erfolgte mittels 20- bis 40-minütiger leitfragengestützter Einzelinterviews in einer Videokonferenz³⁴. Die Leitfragen waren dabei in drei Fragenblöcke aufgeteilt. Der erste Block umfasste vier demographische Fragen (vgl. Abschnitt 3.1), der zweite Block behandelte die Nutzung der 3D-Druck-Technologie im Unternehmen und beinhaltete folgende Fragen:

- *In welcher Branche ist Ihr Unternehmen tätig?*
- *Wofür wird die 3D-Druck-Technologie bereits konkret in Ihrem Unternehmen eingesetzt und welche 3D-Druck-Technologie(n) nutzen Sie?*
- *Was sind aus Ihrer Sicht die wichtigsten Vorteile der 3D-Druck-Technologie?*

Der dritte Fragenblock diskutierte abschließend die zu durchlaufenden Ausbildungsschritte für den Umgang mit der Technologie mittels der folgenden Fragen:

- *Wie erkennt man jemanden, der sehr gut mit der 3D-Druck-Technologie umgehen kann?*
- *Was muss jemand lernen/gelernt haben, der bei Ihnen im Unternehmen einen a) Modellierungsprozess, b) Tessellierungs-/Triangulierungsprozess, c) Slicingprozess und/oder d) Druckprozess durchführt?*
- *Was von dem zuvor Genannten lernen zukünftige Arbeitnehmende in der Ausbildung? Was wird nicht in der Ausbildung, sondern nach Beendigung dieser im Unternehmen gelernt?*
- *Inwiefern denken Sie, dass die genannten Fähigkeiten bereits in der Sekundarstufe der allgemeinbildenden Schule (Klasse 5 – 13) aufgegriffen werden könnten? Was wäre sinnvoll, was nicht?*

4. Ergebnisse

Zur Beantwortung der Forschungsfragen wurde eine qualitative Inhaltsanalyse nach Mayring (2015) durchgeführt. Hierfür wurden zunächst die Audioaufnahmen der geführten Interviews transkribiert. Anschließend wurden induktiv zwei Kategoriensysteme entsprechend den Forschungsfragen gebildet. Diese wurden abschließend deduktiv durch eine zweite Person doppelkodiert (60% der Interviews

³⁴ Alle Interviews wurden durch die zweisprachige Erstautorin durchgeführt. Das Studiendesign und die Fragen wurden zuvor vom Datenschutzbeauftragten und der Ethikkommission des IPN Kiel genehmigt.

wurden doppelkodiert, was 63,16% der Codes entspricht, davon 64 Codes (64,65%) im Kategoriensystem zur Forschungsfrage 1 und 20 Codes (54,05%) im Kategoriensystem zur Forschungsfrage 2). Die InterCoder-Reliabilität war sehr gut (Krippendorff's $\alpha = .87$ für das erste Kategoriensystem und $\alpha = .86$ für das zweite Kategoriensystem nach Konsensverfahren).

Bezüglich Forschungsfrage 1 zeigen die Daten, dass von zukünftigen Arbeitnehmer:innen, die mit der 3D-Druck-Technologie in ihrem professionellen Alltag umgehen, Kenntnisse aus verschiedenen Bereichen erwartet werden. Eine dezidierte Trennung von erwarteten Kenntnissen zu Beginn der Ausbildung und Beginn des Arbeitsverhältnisses war dabei nicht möglich, da alle befragten Unternehmensrepräsentant:innen auf einen Mangel an Ausbildungsmöglichkeiten zur 3D-Druck-Technologie hinwiesen³⁵. Die genannten Kenntnisse wurden mittels Kategorisierung in sieben Bereiche aufgeteilt: Programmier- und Softwarekenntnisse, Wissen über Möglichkeiten und Limitationen, Umgang mit dem Drucker und Hardwarekenntnisse, Mathematisches Vorwissen, (Technische) Affinität, Branchenspezifisches Wissen³⁶ und Materialkenntnisse (s. Tabelle 1).

Zur Beantwortung der Forschungsfrage 2 ist in Tabelle 2 das Kategoriensystem aufgeführt, welches aus Unternehmenssicht sinnvolle Möglichkeiten zur frühzeitigen Thematisierung der in Tabelle 1 genannten Kenntnisse im Schulkontext aufzeigt. Hierbei ist zu beachten, dass es sich bei diesen Kategorien um Wünsche und Hinweise von Unternehmen handelt, die hier zunächst noch nicht mit dem realen Schulalltag in Verbindung gebracht sind. Die interviewten Unternehmensrepräsentant:innen schlagen zur Förderung der erwarteten Kenntnisse vor, dass die 3D-Druck-Technologie in den Regelunterricht (sowohl im alltäglichen Unterricht als auch im Projektkontext) eingeht. Zudem sehen sie das Aufzeigen der Alltagsrelevanz der Technologie und das damit einhergehende Stärken von Interesse an selbiger als förderlich für den Erwerb der von ihnen erwarteten Kenntnisse an. Darüber hinaus wurde auch das Schaffen erster Druckerfahrungen und das Darlegen verschiedener Drucktechnologien als relevant erachtet.

³⁵ Mittlerweile werden Weiterbildungskurse zur 3D-Druck-Technologie von verschiedenen IHK's in Deutschland angeboten. Zudem sollte hier auch angemerkt werden, dass FabLabs/Makerspaces, d. h. offene Werkstätten, in denen auch Privatpersonen Zugang zu u. a. der 3D-Druck-Technologie haben, verbreiteter und oft an Universitäten oder auch Schulen angebunden sind.

³⁶ Unter Branchenspezifischem Wissen wurde all diejenigen Aussagen kategorisiert, die Wissen umfassen, die nur auf die jeweilige Branche, nicht aber branchenübergreifend als relevant genannt wurden.

Kategorie	Anzahl der Aussagen	Anzahl der Interviews	Beispielaussage
Programmierung und Softwarekenntnisse	24	14 von 15	„Es ist ein klarer Vorteil, wenn du mit 3D-Druck arbeitest, dass du Wissen von [CAD-Programmen] mitbringst [...]. Das ist eines der grundlegenden Dinge, in denen man gut sein muss.“ (<i>Automatisierungsindustrie (übersetzt)</i>)
Wissen über Möglichkeiten und Limitationen	16	9 von 15	„[Man muss] verstehen, welche Vorteile habe ich, und einen Vorteil habe ich, wenn ich Gewichtsersparnisse herkrige. Also müsste ich das anders konstruieren [...], vielleicht möchte ich eine Funktion reinbauen, die ich eben nur durch 3D-Druck oder additiv herstellen kann, weil ich das nicht gießen und auch nicht fräsen kann.“ (<i>Drucker-Fertigung</i>)
Umgang mit dem Drucker & Hardwarekenntnisse	14	10 von 15	„[...] wenn ich jetzt an unsere [Drucker] denke muss man natürlich ein bisschen aufpassen mit den Dämpfen, man muss ein bisschen aufpassen mit heißen Oberflächen, mit Flüssigkeiten, also das muss schon jemand [sein], der ruhig und sorgfältig ist.“ (<i>Prototypenbau</i>)
Mathematisches Vorwissen	13	8 von 15	„Und später kommt es natürlich ganz einfach auf Volumenberechnung, auf Zeitberechnung, auch auf Materialberechnung hinsichtlich der Gewichte an. Mathematik ist eine absolute Basis-Grundlage.“ (<i>Luft- & Schifffahrt</i>)
(Technische) Affinität	12	9 von 15	„Die Person muss natürlich irgendwie eine Affinität zu Technik haben.“ (<i>Drucker-Fertigung</i>)
Branchenspezifisches Wissen	11	6 von 15	„Der Mix aus: Wir verstehen die Maschine, wir wissen, wie man 3D druckt als solches, und wir wissen, wie eine Baustelle abzulaufen hat. Also welche Gewerke muss man wann integrieren, wann kommt der Beton, wann kommt die Isolierung, wie hoch drucken wir.“ (<i>Bauindustrie</i>)
Materialkenntnisse	9	6 von 15	„[...] vor allem mit welchen Materialien man arbeiten kann [...], soll das Produkt z. B. aus Plastik oder Metall sein, und wenn es aus Plastik sein soll, aus welchem Plastik und wenn es aus Metall sein soll, aus welchem Metall.“ (<i>Produktionsindustrie (übersetzt)</i>)

Tabelle 1: Kategoriensystem zur Forschungsfrage 1 mit Beispielaussagen aus den Interviews, der absoluten Anzahl der zugeordneten Aussagen sowie der Anzahl der Interviews, die Aussagen der jeweiligen Kategorie vorweisen. Beispielaussagen aus Interviews mit dänischen Repräsentant:innen wurden durch die Erstautorin übersetzt.

Kategorie	Anzahl der Aussagen	Anzahl der Interviews	Beispielaussage
Eingang in den regulären Fachunterricht	16	10 von 15	„Wir würden uns natürlich wünschen, dass auch schon in der Schule das Thema digitale Modelle auftaucht, da reden wir dann eben über ein digitales Modell in 3D, was dann ja die Basis für die anderen Prozesse [ist].“ (<i>Drucker-Fertigung</i>)
Alltagsrelevanz aufzeigen & Interesse stärken	10	7 von 15	„Die gehen alle nach Hause und sagen, hey Papa, hey Mama, ich brauche einen 3D-Drucker [...] und das ist glaube ich ganz cool, weil man es irgendwo mit der Digitalisierung zu tun hat, sprich mit Computern, mit Computerprogrammen [...] und ich dann wirklich auch was bauen kann. Diese Kombination ist spannend.“ (<i>Spritzguss</i>)
Erste Druckerfahrungen	9	6 von 15	„Ich glaube, ganz generell sollte es darum gehen, die 3D-Druck- oder Additive Manufacturing-Technologie den SuS vorzustellen, [...] dass sie damit arbeiten.“ (<i>Automatisierung (übersetzt)</i>)
Aufzeigen verschiedener Drucktechnologien & Möglichkeiten	2	2 von 15	„Was ich mir noch wünschen würde, wenn man auf unterschiedliche Druck-Technologien eingeht. Weil sich da ganz viel tut und auch sich der Markt teilweise ganz schnell bereinigt, ist das natürlich immer gut, dass man da ein bisschen über den Tellerrand schauen kann.“ (<i>Prototypenbau</i>)

Tabelle 2: Kategoriensystem zur Forschungsfrage 2 mit Beispielaussagen aus den Interviews, der absoluten Anzahl der zugeordneten Aussagen sowie der Anzahl der Interviews, die Aussagen der jeweiligen Kategorie vorweisen. Beispielaussagen aus Interviews mit dänischen Repräsentant:innen wurden durch die Erstautorin übersetzt.

5. Diskussion und Ausblick

Aufgrund des wachsenden Fachkräftemangels kommen Berufsorientierungsmöglichkeiten in der schulischen Bildungsphase eine zentrale Rolle zu. Neben verschiedenen außerschulischen Möglichkeiten zur Berufsorientierung, wie Unternehmensbesuche oder Praktika, bieten auch innerschulische Angebote eine Möglichkeit, Schüler:innen einen authentischen Einblick in verschiedene Branchen des digitalen Arbeitsmarktes zu geben. Da Praktika und andere außerschulische Berührungspunkte mit der Arbeitswelt meist auf Basis individueller Vorstellungen und Interessen ausgewählt werden, können innerschulische Aspekte im Rahmen des regulären Unterrichts dazu dienen, dass Schüler:innen Einblicke in zuvor nicht von ihnen bedachte Branchen erhalten. Folglich kann erwartet werden, dass Schüler:innen für später anstehende Entscheidungsprozesse ein breiteres Überblickswissen zu den verschiedenen Bereichen und Möglichkeiten der Arbeitswelt aufbauen.

Die in der Interviewstudie mit Unternehmensrepräsentant:innen erarbeiteten Kategoriensysteme (Tab. 1 und 2) zeigen exemplarisch Anknüpfungspunkte auf, wie Schüler:innen erste Einblicke in solche Berufe gegeben werden können, die in ihrem professionellem Alltag die 3D-Druck-Technologie nutzen. Dabei können aus dem ersten Kategoriensystem (Tab. 1) Anhaltspunkte abgeleitet werden, welches Wissen und welche Fertigkeiten aus Unternehmenssicht von Schulabsolvent:innen beim Übergang in diese Berufe erwartet werden:

- *Programmier- und Softwarekenntnisse:* (Zukünftige) Arbeitnehmende müssen sich mit der notwendigen Begleitsoftware auseinandersetzen. Dies umfasst sowohl die Modellierungsarten (direkt, parametrisch, skriptbasiert, vgl. Fastermann, 2014) als auch den Umgang mit Modellierungs- und Triangulationssoftware und das Verständnis für die zugrundeliegenden Prozesse.
- *Wissen über Möglichkeiten und Limitationen:* Dieser Bereich umfasst das Wissen darüber, wofür die verschiedenen Technologien, die unter dem Überbegriff „3D-Druck“ gesammelt werden, genutzt werden können und wofür sie hingegen nicht eingesetzt werden können oder sollten.
- *Umgang mit dem Drucker & Hardwarekenntnisse:* Neben dem Wissen über die Begleitsoftware müssen (zukünftige) Arbeitnehmende auch ausreichendes Wissen über den tatsächlichen Druckvorgang sowie der Bedienung und Instandhaltung eines 3D-Druckers besitzen. Unter diesen Wissensbereich fallen zudem auch die Nachbehandlung von gedruckten Objekten.
- *Mathematisches Vorwissen:* Jegliche Technologie basiert in ihren Grundlagen auf mathematischen Elementen, sodass auch zur professionellen Nutzung der 3D-Druck-Technologie ein mathematisches Verständnis der Technologie erwartet wird. Unter diesen Wissensbereich fallen u. a. logisches Verständnis (z. B. für Codestrukturen) oder das räumliche Vorstellungsvermögen.

- *(Technische) Affinität:* Von (zukünftigen) Arbeitnehmenden wird zudem Affinität und Offenheit bezüglich sowie Interesse an technischen Elementen erwartet. Dieser Bereich deckt weniger einen Wissensbereich als eine Haltung ab, die in der Schule entwickelt werden kann.
- *Branchenspezifisches Wissen:* Neben Wissen zur 3D-Druck-Technologie gibt es auch immer branchenspezifisches Wissen, das nicht über verschiedene Branchen hinweg relevant ist. Ein Beispiel hierfür ist architektonisches Wissen für die Nutzung des 3D-Drucks im Hausbau. Beim branchenspezifischen Wissen ist ein schulisches Angebot aufgrund der Spezialisierung vermutlich am schwierigsten umzusetzen.
- *Materialkenntnisse:* Neben den Hardware- und Softwarekenntnissen ist ein letzter relevanter Bereich das Wissen über Material, das für den 3D-Druck-Prozess genutzt werden kann sowie der Umgang mit Druckmaterialien.

Es ist nicht die Frage, ob Schüler:innen während ihrer Schulbiografie mit verschiedenen Branchen der Arbeitswelt in Kontakt kommen können sollen (u. a. ist es Ziel der gymnasialen Oberstufe, vgl. KMK, 2023), sondern wie dies sinnvoll mit dem regulären Schulunterricht verknüpft werden kann. Neben der Nutzung außerschulischer Lernorte sollten dementsprechend auch innerschulische Lernangebote zur Berufsorientierung und -vorbereitung in den verschiedenen Schularten angeboten werden. Für das betrachtete Exempel einer relevanten digitalen Technologie des digitalen Arbeitsmarktes, das für derzeitige und zukünftige Arbeitsprozesse von Relevanz ist (hier: 3D-Druck), können drei Ansätze der Schaffung von unterrichtlichen Lernangeboten aufgezeigt werden: die Nutzung von 3D-Druck zur Lernunterstützung, als Lerninhalt oder als Lernkontext (vgl. u. a. Figueiredo & Alfonso, 2005). Diese sollen hier mit Bezug zum Mathematikunterricht vorgestellt werden.

3D-Druck zur Lernunterstützung

Die Technologie wird verwendet, um Visualisierungshilfen zu drucken, die das Mathematiklernen unterstützen. Dabei kann die 3D-Druck-Technologie sowohl von den Lehrkräften (z. B. für den Vergleich eines Kegels und Pyramiden mit verschiedenen n-Ecken als Grundseite) als auch von den Schüler:innen (z. B. der Druck von manipulierten Würfeln, vgl. Dilling et al., 2021) eingesetzt werden. Die 3D-Druck-Technologie wird hier also genutzt, um Lerninhalte zu veranschaulichen. Bei der Nutzung der 3D-Druck-Technologie als Lernunterstützung könnten zwei der vier Kategorien des zweiten Systems (Tab. 2) abgedeckt werden, indem die Schüler:innen *erste Druckerfahrungen* erlangen, dadurch dass sie eigene Modelle zur Visualisierung drucken, die anschließend im *regulären Fachunterricht* verwendet werden können. Neben den bereits angeführten Beispielen der Kegel bzw. Pyramiden mit n-eckiger Grundseite oder der manipulierten Würfel, kann der 3D-Druck für jegliche druckbare Objekte genutzt werden, die differenzierend oder enaktiv wirkend den Mathematikunterricht unterstützen. Hierbei verbleibt die 3D-Druck-Technologie aber implizit, da sie nicht weiter thematisiert bzw. analysiert

wird. Folglich werden weder die *Alltagsrelevanz* der Technologie noch die *verschiedenen Drucktechnologien* und die damit verbundenen *Möglichkeiten* aufgezeigt.

3D-Druck als Lerninhalt

In diesem Ansatz wird die 3D-Druck-Technologie explizit im regulären Unterricht oder im Projektkontext aufgegriffen. Im fächerübergreifenden Mathematik-, Informatik- oder Technikunterricht kann z. B. thematisiert werden, wie die Hardware des 3D-Drucks funktioniert oder welche Code-Strukturen im 3D-Druck-Prozess genutzt werden. Zudem können auch Materialzusammensetzungen zum 3D-drucken im Chemieunterricht betrachtet werden (z. B.: Welches Material kann potenziell verwendet werden, beispielsweise bei der Nutzung des Extrusionsverfahrens?). Bei einem Einsatz der 3D-Druck-Technologie als Lerninhalt im Mathematikunterricht würde die größtmögliche Thematisierung der Technologie erreicht werden. Innerhalb dieses Ansatzes würde die Technologie im Mathematikunterricht explizit aufgegriffen und analysiert werden (u. a. können die Schüler:innen einen gesamten Druckprozess durchlaufen und so *erste Druckerfahrungen* erlangen, *verschiedene Drucktechnologien und Möglichkeiten kennenlernen*, um die Kategorisierung „3D-Druck“ zu verstehen und *Alltagsbereiche kennenlernen*, in denen der 3D-Druck relevant ist). Da jedoch die curricularen Inhalte des regulären Fachunterrichts eine zentrale Bedeutung haben, ist hierbei mit hoher Wahrscheinlichkeit ein Projektkontext (statt einer Thematisierung im *regulären Mathematikunterricht*) notwendig. Dieser Kontext könnte aber ggf. mit fachlichen Inhalten in Konkurrenz stehen und insbesondere in Post-Corona-Zeiten aus Zeitgründen nicht umsetzbar sein. Zudem kann in Frage gestellt werden, inwiefern eine Auseinandersetzung in einem Projektkontext nachhaltig für die Berufsorientierung und -vorbereitung wirken kann, wenn diese nur sehr selten oder sogar nur einmalig stattfindet.

3D-Druck als Lernkontext

Im Gegensatz zur vorhergehenden Möglichkeit fokussiert dieser Ansatz die curricularen Lerninhalte des Mathematikunterrichts, die mittels des *Kontextes* 3D-Druck thematisiert und unterrichtet werden. Hierfür können innerhalb des Mathematikunterrichts Verknüpfungen von curricularen mathematischen Lerninhalten mit der 3D-Druck-Technologie gewählt werden. Hervorzuheben ist hierbei, dass der Fachunterricht nicht durchgehend mittels des Technologiekontextes unterrichtet wird, sondern dass Lernangebote, die die 3D-Druck-Technologie nutzen, im Verlauf der Bildungsbiografie regelmäßig in verschiedenen Schuljahren wiederkehren. Für die Kategorie *regulärer Mathematikunterricht* (Tab. 2) würde dies bedeuten, dass curriculare Lerninhalte im Lernkontext des 3D-Drucks unterrichtet werden. So könnte u. a. der Lerninhalt „Zusammengesetzte Körper“, der Teil des Geometrieunterrichts der Sekundarstufe I ist, im Kontext des 3D-Drucks mithilfe von Modellierungssoftware thematisiert werden. Hierdurch lernen die Schüler:innen die Zusammensetzung von geometrischen Grundkörpern als eine Boolesche Operation kennen, die Grundlage für den direkten Modellierungsprozess ist (vgl.

Wulff et al., 2023b). Durch die Verwendung authentischer Aufgabenkontexte können die Schüler:innen zudem *verschiedene Drucktechnologien und Möglichkeiten der Technologie* in professionellen Nutzungsbereichen kennenlernen. Durch die Verknüpfung des außermathematischen Kontextes des 3D-Drucks mit curricularen Lerninhalten sowie mittels der authentischen Aufgabenkontexte kann zudem *die Alltagsrelevanz des 3D-Drucks* sowie der Lebensweltbezug des Mathematikunterrichts aufgezeigt werden. Ein weiterer Vorteil dieses Ansatzes ist, dass ein 3D-Drucker nicht notwendigerweise an der Schule vorhanden sein muss. Auch wenn die Nutzung der 3D-Druck-Technologie als Lernkontext von dem Vorhandensein eines 3D-Druckers nicht abhängig ist, so können die Schüler:innen im Unterricht nur *erste Druckerfahrungen* machen, wenn ein 3D-Drucker vorhanden ist³⁷ oder andere Möglichkeiten wie z. B. FabLabs oder Makerspaces genutzt werden.

Implikationen

Vor dem Hintergrund der Unternehmenssicht decken also die Nutzung der 3D-Druck-Technologie als Lerninhalt oder zur Lernunterstützung zwar relevante, aber nicht alle Möglichkeiten zur frühzeitigen Berufsorientierung und zielgerichteten Berufsvorbereitung ab. Die Nutzung des 3D-Drucks als Lernkontext kann hingegen neben den aus Unternehmenssicht relevanten Punkten auch einen für Akteure der Schulbildung zentralen Aspekt erfüllen: Mittels diesem Aspekt werden curriculare Inhalte aufgegriffen, es entsteht also keine allein implizite Nutzung des 3D-Drucks (3D-Druck als Lernunterstützung) und es ist kein Projektkontext notwendig (3D-Druck als Lerninhalt), der ggf. auf Kosten einer Auseinandersetzung mit fachlichen Inhalten durchgeführt wird. Neben den Rahmenbedingungen aus Unternehmenssicht, die in der berichteten Studie identifiziert wurden, spielen für das Gelingen der Verknüpfung von Anforderungen des digitalen Arbeitsmarktes mit dem Mathematikunterricht aber auch schulische Rahmenbedingungen eine zentrale Rolle. Neben den institutionellen Vorgaben, die eine Ermöglichung beruflicher Teilhabe vorsehen (SchulG SH §4; KMK 2017, 2023), sind die Einstellungen von Lehrkräften zentral für eine Implementation im regulären Fachunterricht. Eine weitere innerhalb des Forschungsprojektes durchgeführte Rahmenbedingungsstudie bezogen auf schulische Rahmenbedingungen weist auf eine Offenheit der Mathematik-Lehrkräfte hin, die mit dem erwarteten Nutzen des 3D-Druck-Kontextes und der Selbstwirksamkeitserwartung der Lehrkräfte zusammenhängt (Wulff et al., 2023a). Eine weitere wesentliche Frage ist die Sicherung des Lernzuwachses der Schüler:innen bei der Nutzung der 3D-Druck-Technologie als Lernkontext im Mathematikunterricht. So sollte die Berufsvorbereitung nicht zulasten der fachlichen Lerninhalte implementiert werden. In folgenden Schritten soll deswegen in einem quasi-experimentellen Forschungsdesign die Frage beantwortet werden, ob sich Schüler:innen durch die Nutzung von 3D-Druck als Lernkontext nicht nur mit

³⁷ Im Rahmen von ICILS 2018 gaben 11,8% der befragten Schüler:innen an, eine Schule zu besuchen, in der mindestens ein 3D-Drucker sowohl für Lehrkräfte als auch für Schüler:innen nutzbar ist (Eickelmann et al., 2019). In einer im vorliegenden Forschungsprojekt durchgeführten Befragung gaben 34,8% der befragten Lehrkräfte von Gemeinschaftsschulen und Gymnasien in Schleswig-Holstein an, in ihrer Schule Zugriff auf einen 3D-Drucker zu haben (vgl. Wulff et al., 2023a).

der Technologie auseinandersetzen und diese Auseinandersetzung im Sinne der Berufsorientierung unterstützend wirkt, sondern auch ob die Lernziele zu den curricularen mathematischen Fachinhalten (z. B. zusammengesetzte Körper oder Ebenendarstellungen) erreicht werden.

Limitationen der Studie

Die Interviews mit den Unternehmensrepräsentant:innen geben Einblicke in den Arbeitsalltag und die Voraussetzungen für verschiedene Branchen der digitalen Arbeitswelt, jedoch kann kein Anspruch auf Vollständigkeit oder Allgemeingültigkeit für alle Branchen, die mit der 3D-Druck-Technologie arbeiten, erhoben werden. Wir gehen jedoch davon aus, dass durch die Auswahl der Branchen eine große Breite erreicht wurde. Zudem wurde der 3D-Druck in dieser Studie als exemplarisches relevantes digitales Werkzeug der digitalen Arbeitswelt betrachtet. Dementsprechend können aus den Ergebnissen keine Schlüsse für eine allumfassende Berufsorientierung und -vorbereitung der Schüler:innen gezogen werden. Des Weiteren kann trotz der angegebenen Anzahl der codierten Elemente der Interviews keine Aussage über die Relevanz der verschiedenen Wissensbereiche im Sinne eines Rankings getroffen werden. Die Ergebnisse zeigen jedoch exemplarisch für eine Technologie auf, welches Wissen und welche Fertigkeiten erwartet werden, sowie wie diese aus Unternehmenssicht sinnvoll Eingang in die reguläre Schulbildung erhalten könnte.

Literatur:

- Barlovic, U., Burkard, C., Hollenbach-Biele, N., Lepper, C., & Ullrich, D. (2022). *Berufliche Orientierung im dritten Corona-Jahr. Eine repräsentative Befragung von Jugendlichen 2022*. Bertelsmann Stiftung. Verfügbar unter <https://www.bertelsmannstiftung.de/de/publikationen/publikation/did/berufliche-orientierung-im-dritten-corona-jahr-all> [25.09.2023]. doi:10.11586/2022070
- Dilling, F., Marx, B., Pielsticker, F., Vogler, A., & Witzke, I. (2021). *Praxishandbuch 3D-Druck im Mathematikunterricht. Einführung und Unterrichtsentwürfe für die Sekundarstufen I und II*. Waxmann.
- Eickelmann, B., Bos, W., Gerick, J., Goldhammer, F., Schaumburg, H., Schwippert, K., Senkbeil, M., & Vahrenhold, J. (Hrsg.) (2019). *ICILS 2018 #Deutschland. Computer- und informationsbezogene Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern im zweiten internationalen Vergleich und Kompetenzen im Bereich Computational Thinking*. Waxmann.
- Erneuerung der „Gemeinsame Erklärung zur regionalen Zusammenarbeit zwischen dem Land Schleswig-Holstein und der Region Syddanmark“. (2021). Verfügbar unter

- https://www.schleswig-holstein.de/DE/fachinhalte/D/daenemark_zusammenarbeit/Downloads/gemeinsame_erklaerung_sh_syddanmark.pdf?__blob=publication-File&v=1 [25.09.2023].
- Fastermann, P. (2014). *3D-Drucken. Wie die generative Fertigungstechnik funktioniert*. Springer.
- Figueiredo, A. D. & Afonso, A. P. (2005). Context and Learning: A Philosophical Framework. In Figueiredo, A. D. & Afonso, A. P. (Hrsg.). *Managing Learning in Virtual Settings: The Role of Context* (S. 1-22). Information Science Publishing. doi: 10.4018/978-1-59140-488-0.ch001
- Grundke, R., Jamet, S., Kalamova, M., Keslair, F., & Squicciarini, M. (2017). Skills and global value chains: A characterization. *OECD Science, Technology and Industry Working Papers 2017(05)*. OECD Publishing.
- Hagl, R. (2015). *Das 3D-Druck-Kompodium. Leitfaden für Unternehmer, Berater und Innovationstreiber*. Springer Fachmedien.
- Junk, S. (2017). *Onshape – kurz und bündig. Praktischer Einstieg in Cloud-basiertes CAD und 3D-Druck*. Springer Fachmedien.
- Kaiser, S., Kozica, A., Littig, B., Müller, M., Rauch, R., & Thiemann, D. (2021). Di-giTraIn 4.0: Ein Beratungskonzept für die Transformation in eine digitale Arbeitswelt. In W. Bauer, S. Mütze-Niewöhner, S. Stowasser, C. Zanker & N. Müller (Hrsg.), *Arbeit in der digitalisierten Welt. Praxisbeispiele und Gestaltungslösungen aus dem BMBF-Förderschwerpunkt* (S. 415-425). Springer. doi:10.1007/978-3-662-62215-5_27
- Kultusministerkonferenz (KMK) (2017). *Empfehlung zur Beruflichen Orientierung an Schulen*. Verfügbar unter https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2017/2017_12_07-Empfehlung-Berufliche-Orientierung-an-Schulen.pdf [25.09.2023].
- Kultusministerkonferenz (KMK) (2023). *Vereinbarung zur Gestaltung der gymnasialen Oberstufe und der Abiturprüfung*. Verfügbar unter https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/1972/1972_07_07-VB-gymnasiale-Oberstufe-Abiturpruefung.pdf [25.09.2023].
- Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken* (12., überarb. Aufl.). Beltz
- Niss, M. (1994). Mathematics in Society. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Strässer, & B. Winkelmann (Hrsg.). *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (S. 367–378). Kluwer Academic Publishers.
- Rohleder, B. (2021). *Industrie 4.0 – so digital sind Deutschlands Fabriken*. Verfügbar unter https://www.bitkom.org/sites/default/files/2021-04/bitkom-charts-industrie-4.0-07-04-2021_final.pdf [25.09.2023].
- Schulgesetz Schleswig-Holstein (SchulG SH). (2007). Verfügbar unter <https://www.gesetze-rechtsprechung.sh.juris.de/bssh/document/jlr-SchulGSH2007rahmen/part/X> [25.09.2023].

- Wulff, M. H., Radkowitsch, A., Wilken, M., & Heinze, A. (2023a). Wie sehen Lehrkräfte die Nutzung des 3D-Drucks als Lernkontext im Mathematikunterricht der Sekundarstufe? in F. Dilling, D. Thurm, & I. Witzke (Hrsg.), *Digitaler Mathematikunterricht in Forschung und Praxis: Tagungsband zur Vernetzungstagung 2022 in Siegen* (S. 263-273). (Mathematiklernen mit digitalen Medien; Band 3). WTM. doi: 10.37626/GA9783959872041.0.26
- Wulff, M. H., Wilken, M., & Heinze, A. (2023b). Increasing the skills on occupationally relevant digital technologies among students in Southern Denmark and Northern Germany: 3D printing as a learning context in regular mathematics class. In F. Dilling, F. Pielsticker, & I. Witzke (Hrsg.), *Learning mathematics in the context of 3D printing: Proceedings of the International Symposium on 3D Printing in Mathematics Education* (S. 51-72). (MINTUS - Beiträge zur mathematisch-naturwissenschaftlichen Bildung). Springer Spektrum. doi: 10.1007/978-3-658-38867-6_3

Die Digitalisierung im Mathematikunterricht bietet sowohl Potenziale als auch Herausforderungen für das Lehren und Lernen. Die Bandbreite der verwendeten digitalen Medien und Werkzeugen ist dabei in den letzten Jahren extrem gewachsen und geht von 3D-Druckern über Lego-Roboter bis hin zu Erklärvideos. Bei der zweiten Vernetzungstagung zum Thema „Mathematikunterricht mit digitalen Medien und Werkzeugen in Schule und Forschung“ kamen im Mai 2023 in Siegen viele Wissenschaftler:innen und Schulpraktiker:innen zusammen, um aktuelle Themen im Bereich der Digitalisierung zu diskutieren. Das Programm war durch Vorträge, Workshops, Posterpräsentationen und Diskussionsrunden strukturiert.

Der vorliegende Band stellt in 28 Beiträgen wesentliche Ergebnisse der Tagung vor. Dabei handelt es sich um eine Zusammenstellung aus unterrichtspraktischen Beiträgen, in welchen konkrete Lernumgebungen vorgestellt werden, und wissenschaftlichen Beiträgen, die empirische Studien aufzeigen und Metathemen in den Blick nehmen. Ebenso lässt sich eine große Vielfalt von unterschiedlichen Medienarten identifizieren, die in den Beiträgen betrachtet werden. In seiner Gesamtheit bildet der Tagungsband somit eine gute Basis für die weitere Entwicklung des Themas.